

〈論 文〉

## 公的年金積立金市場運用の期待値予測に潜む 取り返しのつかないリスク：再訪

大 野 薫\*

### I はじめに

2015 年 10 月 1 日付の日本経済新聞（朝刊）は，年金積立金管理運用独立行政法人（Government Pension Investment Fund, GPIF）の 2015 年 7～9 月期の運用成績が，9.4 兆円程度の損失になりそうだというショッキングな試算を報じた。もちろんこれは試算なので確定された数値ではないが<sup>1)</sup>，2009 年のリーマン・ショック以降，順調な運用成績を重ね，アベノミクスによる金融緩和と円安・株高による追い風の中，2014 年 10 月 31 日に国内債券への投資配分を減らし国内株式及び外国株式の保有割合を倍増すると発表して以来，GPIF が初めて経験する巨額な運用損失になることは間違いない。この背景には，2015 年 4 月にギリシャのデフォルト懸念が拡大して世界市場が神経質に変動性を増す中，8 月に入って上海株式市場の急落を引き金に世界同時株安が発生したことがある。GPIF は 2014 年度に過去最高となる 15 兆円強の収益をあげ，さらに株式の保有割合を増やしてきた矢先だっただけに，この巨額損失のニュースはサプライズなものであった。

とはいえ，GPIF にとってこの程度の損失は，一時的なもので想定内といえる。GPIF の平成 26 年度業務概況書（17 ページ）によると，基本ポートフォリオ作成過程における検証で，基本ポートフォリオに過去 10 年間（平成 16 年度から 25 年度）の各資産の市場平均収益率を当てはめた場合，リーマン・ショック発生年度（平成 20 年度）では，収益率は -21.2% で 26.2 兆円の損失になる。その一方で，単年度収益率が一番高かった平成 24 年度では，収益率は 16.5% で 18.1 兆円の利益となり，新しい基本ポートフォリオは単年度における収益変動が大きいものの，10 年間を通した収益率は年率 4.3% で，変更前の基本ポートフォリオよりもパフォーマンスが向上するとしている。かつて Mehra and Prescott [1985] が謎として指摘した高い株式リスク・プレミアムも，現在では長期ヒストリカル・リターンよりやや低い 5% 程度とみなされており<sup>2)</sup>，GPIF 基本ポートフォリオの期待リターンについてはほぼ妥当な見通しといえるかもしれない。しかしながら，安全を第一とすべき公的年金積立金の運用において，これだけのリスクを取ることが果たして妥当なのかどうかについてはさまざまな見解があろう。

健全な年金財政の持続可能性と積立金運用に関しては，北村ほか [2006]，北村 [2008]，米澤 [2010] 等がシミュレーション分析と考察を行い，積立金の市場運用に伴うリスクを指摘しているが，GPIF

---

\*中央大学大学院国際会計研究科教授

1) 本稿の執筆時点で，GPIF の 2015 年 7～9 月期の運用実績は発表されていない。

2) 将来の株式リスク・プレミアムに関しては，Fama and French [2002]，Ibbotson and Chen [2003]，Martin, et al. [2008]，Siegel [2014] 等を参照されたい。

が株式への投資配分を倍増すると発表した2014年10月31日以前の運用を前提としており、新しい基本ポートフォリオは直接的に反映されていない。

大野〔2015〕はGPIFの基本ポートフォリオ資産配分変更を巡る議論に関連して、年金資金株式市場運用の期待値予測に潜むリスクを、過去60年間以上にわたる日経平均株価の月次データを基に、シンプルな運用モデルを想定したブートストラップ・シミュレーションで考察した。シミュレーションの結果、年金資金の株式市場運用には、順調な期待値予測の裏に、年金システムが破綻するという取り返しのつかないリスクが潜んでいる可能性が示されたが、これは一資産に限った考察であり、必ずしもGPIFが行っている分散投資を基本としたポートフォリオ運用に適用できる分析とはいえない。そこで本稿では、GPIFの基本ポートフォリオ運用を直接的に反映するモンテカルロ・シミュレーション・モデルを構築し、GPIFの基本ポートフォリオによる市場運用が内包するリスクを、より詳細に考察する。

第Ⅱ節では、GPIFの運用が対象とする国内債券、国内株式、外国債券、外国株式という4つの資産<sup>3)</sup>について、資産価格推移の確率過程モデルを想定し、GPIFの基本ポートフォリオ・アロケーションに沿った運用の安全性を、相関乱数を用いたモンテカルロ・シミュレーションで、下方リスクの観点から観察する。この基本シミュレーションでは、確率過程の拡散項に正規分布を仮定することから、つづいて第Ⅲ節では、リーマン・ショックのようなグローバル市場に大きな影響を及ぼす突発的なリスク・イベントの影響を考察するために、ジャンプ過程も加えて、シミュレーションを行う。

## Ⅱ 基本シミュレーション

### 1 資産価格モデル

各資産の価格推移の確率過程モデルとして、以下を想定した。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t$$

ここで、 $S_t$ は $t$ 時における資産価格、 $\mu$ は期待リターン(%)、 $\sigma$ はボラティリティ(%)、 $dz_t$ はブラウン運動による増分である。これはブラック・ショールズ・オプション・プライシング・モデル等でも仮定されている幾何ブラウン運動による確率過程モデルで、金融資産価格のモデル化に広く用いられている基本的なものである。

コンピュータでプログラム可能な離散化式は、

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

となるが、 $\Delta t$ が十分に微少な区間でないと誤差が大きくなる。したがって、本稿のシミュレーションのように四半期ごとに資産価格評価を行う場合でも、正確な推定を行うためには $\Delta t$ を数日間といった短い期間に設定する必要がある。膨大な計算時間が要求される。そこで本稿のシミュレーションでは、より正確で計算速度も速い、対数変換した資産価格に対する離散化式を用いた。

伊藤のレナマを用いると、 $\ln S$ は次の確率過程に従う。

3) 資産全体の5%を上限とするオルタナティブ資産も、リスク・リターン特性に応じてこれら4つの資産に区分される。

$$d\ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz_t$$

離散化式は

$$\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

となり、指数変換して元に戻すと、

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}\right]$$

を得る。この離散化式は、 $\mu$  と  $\sigma$  が定数の場合、微少な時間 ( $\Delta t$ ) だけでなく、すべての時間に対して成立するので、四半期を細かく分割して価格パスを構築せずに、いきなり四半期後の資産価格を推定することが可能になり、大幅な計算時間の削減につながる。

## 2 ポートフォリオ運用モデル

GPIF は分散投資によるポートフォリオ運用を基本としており、資産間の共分散構造がリスク削減の肝となる。本稿のシミュレーション・モデルでも、資産間の共分散構造を反映させるために拡散過程の増分に相関があると仮定し、GPIF のシミュレーション分析と同じ相関マトリックスをベースに、コレスキー分解を用いて相関乱数シーケンスを生成した。

資産構成割合は GPIF の新しい基本ポートフォリオの基準配分割合とし、乖離許容幅も GPIF と同じものを用いた。しかしながら GPIF の運用では、「基本ポートフォリオの乖離許容幅の中で市場環境の適切な見通しを踏まえ、機動的な運用を行い」、さらに「基本ポートフォリオのリスク管理は、乖離許容幅に加え、ポートフォリオ全体のリスク量などにより、複線的に行う」としている<sup>4)</sup>。GPIF の「市場環境の適切な見通しを踏まえた機動的な運用」や「複線的なリスク管理」によるアロケーション変更を、コンピュータ・シミュレーション・モデルに反映することはできないので、本稿のシミュレーションでは、基準配分割合と乖離許容幅で機械的にアロケーションの見直しを行い、ある四半期に1つの資産でも乖離許容幅を超えた場合は、翌四半期の始めにポートフォリオ全体が基準配分割合にリセットされると仮定した。

## 3 シミュレーション・パラメーター

表1は基本的なシミュレーションのパラメーターをまとめたものである。インプットとなる期待リターンは、平成26年6月に厚生労働省が公表した「国民年金及び厚生年金に係る財政の現況及び見通し—平成26年財政検証結果—」のケースEに相当する「経済中位ケース」を前提としたもので、名目賃金上昇率を引いた実質的なリターンである。GPIFはこの他に『市場に織り込まれている将来の金利水準を前提とした「市場基準ケース」(平成26年財政検証のケースGに相当)』によるシミュレーションも行っているが、下方リスク分析の観点で両ケースはさほど差がないため、本稿のシミュレーションではケースEだけを対象とした。標準偏差と相関係数は、GPIFが過去20年間のデータ等を基に推計したもので、国内債券のリスク計算においては、将来のデフレーションの長期化が考慮されているという<sup>5)</sup>。

4) 年金積立金管理運用独立行政法人2014年10月31日付 Press Release, 14ページ。

5) 年金積立金管理運用独立行政法人, 前掲書, 26ページ。

表1 基本的なシミュレーションのパラメーター

		国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
期待リターン(実質)		-0.2%	3.2%	0.9%	3.6%
標準偏差		4.7%	25.1%	12.6%	27.3%
相関係数	国内債券	1.00	-0.16	0.25	0.09
	国内株式	-0.16	1.00	0.04	0.64
	外国債券	0.25	0.04	1.00	0.57
	外国株式	0.09	0.64	0.57	1.00
資産構成割合基準		35%	25%	15%	25%
乖離許容幅(±)		10%	9%	4%	8%
資産配分上限		45.00%	34.00%	19.00%	33.00%
資産配分下限		25.00%	16.00%	11.00%	17.00%

出所) 年金積立金管理運用独立行政法人『平成26年度業務概況書』より

モンテカルロ・シミュレーションでは、結果の妥当性と信頼性の大部分が、使用する疑似乱数のランダム性に依存している。本稿では、一様乱数を発生させる乱数ジェネレーターとして、L'Ecuyer [1999] のMRG32k3aを用いた。これは $2^{191}$ という長い周期性を持ち、最低限45次元まで良好な一様性を保つ。また、正規乱数への変換には、下方リスク評価で極めて重要になるテール部分の近似にすぐれた、Moro [1995] のインバース法アルゴリズムを用いた。

その他、初期元本は130兆円<sup>6)</sup>で、運用期間はGPIFの想定運用期間と同じ25年とし、四半期ごとの評価とアロケーションの見直しを仮定した。加えて、財政検証では当初10年間程度は積立金の取崩しが想定されており、GPIFの第3期中期計画期間(平成27~31年度)のキャッシュアウト見込額は経済中位ケースで約20兆円となっていることから、本稿のシミュレーションでは当初5年間は年間4兆円、次の5年間は3兆円のキャッシュアウト額を想定した。なお、残高がマイナスになった場合は運用が停止されたものとみなし、無効データとして翌四半期以降の観察結果から除外した。また試行回数(サンプル数)は、すべてのシミュレーションで100万回行った。

#### 4 シミュレーション結果

##### 1) 25年後の運用残高

図1は、25年後の推定運用残高分布である<sup>7)</sup>。平均値は186.83兆円と順調な運用を印象づけるが、分布は極端なポジティブ・スキューであり、平均値以下になる発生確率は50%より高い。

最大値は4427.33兆円という途方もない値が観察されたが、あまりに少ない頻度なので、確率推定的には無視してよい数値であろう。また、最小値は0.02兆円とほぼ運用停止レベルになっており、実際、運用停止も100万回のうち29回発生している。とはいえ、これもあまりに少ない頻度なので確率的には同様に無視してよい数値であろう。しかしながら、発生確率が極めて低いこれらの

6) GPIFの平成26年度末の運用資産額は137兆4769億円だった。

7) 縦軸の確率は、最大値から最小値までのレンジを200分割した区間での相対度数を表している。

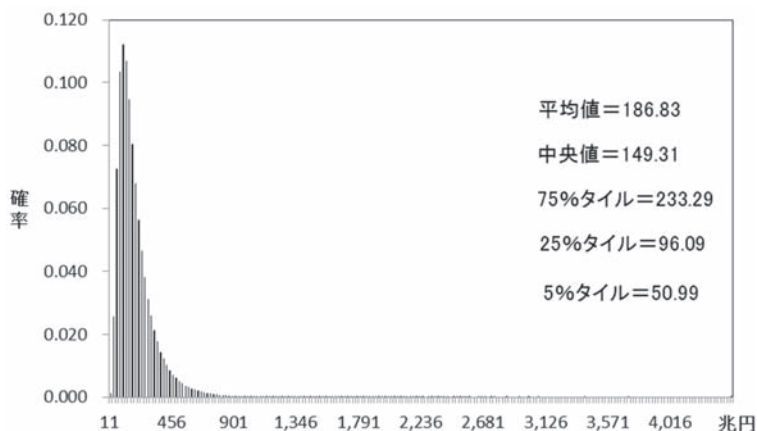


図1 25年後の推定運用残高分布

極端な数値を基に現実的なリスクを語る事が妥当でないとはいえ、すくなくともこれだけのばらつきは、GPIFの基本ポートフォリオが内包する潜在的に大きな運用パフォーマンスの不確実性を示唆しているといえよう。

分布が極端にスキューしているので、ばらつき具合を表す統計数値として標準偏差は有効ではない。そこで中央値を確認すると149.31兆円で、75%タイルは233.29兆円、25%タイルは96.09兆円だった。

安全を基本とする運用では期待値と共に下方リスクも重要な指標となるが、25年後に元本の130兆円を下回る確率は約41.61%だった。また、5%タイル値は50.99兆円で、元本を基準にすると79.01兆円の損失(5% VaR)を意味する。しかしながら、このように大きな下方リスクが顕在化した時に、損失額がびったり5%タイル値になるということはまずあり得ないので、下方リスクの期待値として、パーセンタイル値にそれほどの意味を持たせることはできない。そこで5%タイル値以下の発生確率加重損失額である5% CVaR (Conditional Value at Risk)<sup>8)</sup>を計算してみると、90.23兆円だった。5%以下の確率とはいえ、そのような状況が発生した際に90.23兆円もの損失が期待されるポートフォリオが、公的年金積立金の運用として安全なものみなせるかどうかは、大きく意見の分かれるところであろう。

参考までにリターンの分布例を提示する。図2は、想定運用期間最後にあたる25年後の四半期リターン分布である。平均値は0.44%、標準偏差は6.48%、最小値は-23.52%、最大値は38.89%だった。平均値と標準偏差を年率換算すると、それぞれ1.78%と12.95%になり、基本ポートフォリオの期待リターン(1.77%)と標準偏差(12.77%)に沿った値が出ているのが確認できる。観察された値がインプット値と多少異なるのは、モンテカルロ・シミュレーションであることに加え、25年後の四半期期初の資産配分比率が、それまでのサンプル・パスによって、基準配分と異なっているのも一因である。

8) 期待ショートフォールやETL (Expected Tail Loss) とも呼ばれる。



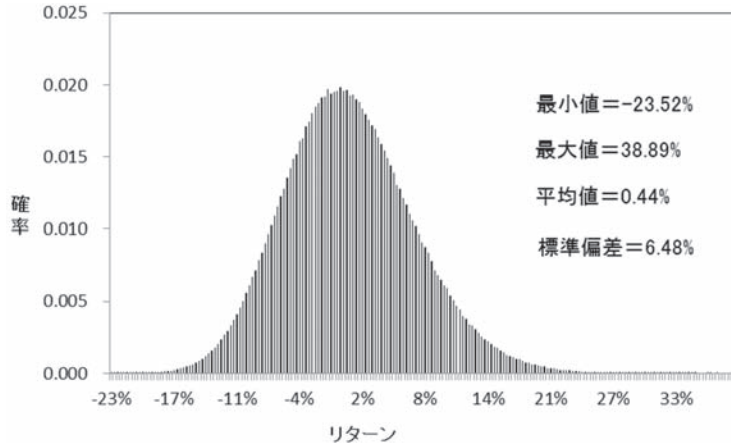


図2 25年後の四半期リターン分布

## 2) 異なる評価期間での最大損失残高分布

大きな不確実性を伴う世界において、GPIFの25年という想定運用期間が、安全に期待値を実現するための十分な長さといえるかどうかには議論の余地があるが、すくなくとも25年間は短期ではなく、四半期ごとの評価に一喜一憂すべきでないというのは、至極妥当な話である。そこで、四半期よりも長い期間で、最悪の場合にどのような運用成績が期待されるのか、下方リスクの観点から考察した。ここで、「最悪の場合」とは、運用パフォーマンス分布の何を指すのかが問題になる。文字通り分布の最小値が最悪の場合という考え方もできようが、推定値の安定性という観点から、この分析では5%タイル値を期間内における最大損失残高の推定値とみなした。具体的には、100万回の各サンプル・パスで、評価する期間（ウィンドウ期間）を1年、2年と変えながらパフォーマンスの5%タイル値を測定し、サンプル全体の分布を観察した。評価ウィンドウを四半期ごとに動かすので、たとえばウィンドウ期間が1年の場合、1つのパスで、 $t$ 四半期～ $t+4$ 四半期、 $t+1$ 四半期～ $t+5$ 四半期というようにずれていく。発生確率的には5%というわずかなものではあるが、最悪の場合にどのような状況に陥るのか、そのプロファイルを事前に考察しておくことは、リスクを取る意思決定をする上で、意味のあるものといえるだろう。

図3は1年ウィンドウにおける最大損失残高（5%タイル値）の分布である。中央値は-18.08%で、75%タイルも-15.94%と、運用パフォーマンスの分布はマイナスの領域に位置している。実際、観察された最大値でさえ-3.18%とマイナスの値であることから、1年間で最悪の状況から脱出できる可能性は皆無に等しいことがわかる。

図4は、1年ウィンドウから7年ウィンドウまでの最大損失残高分布をグラフにしたものである。最悪の場合のパフォーマンス分布は、ウィンドウ期間が長くなるにつれ、左右に裾野を広げながら、中心はマイナスの方向に移動している。5年を超えたあたりから右側テールのプラス領域がようやく厚くなり始め、年数と共に当初の元本を取り戻せる可能性が増えていくことを示しているが、確率的にはわずかなものである。7年ウィンドウ分布でも、0%を超える割合は5.03%しかない。

一方で、ウィンドウ期間が長くなるにつれて平均値は下がり、標準偏差も大きくなっていく傾向が明確に見てとれる。一度最悪ともいえる損失を経験したら、期待値としては、たとえ期間が長くなっても当初の元本を取り戻すのはより困難になり、不確実性も増すということである。

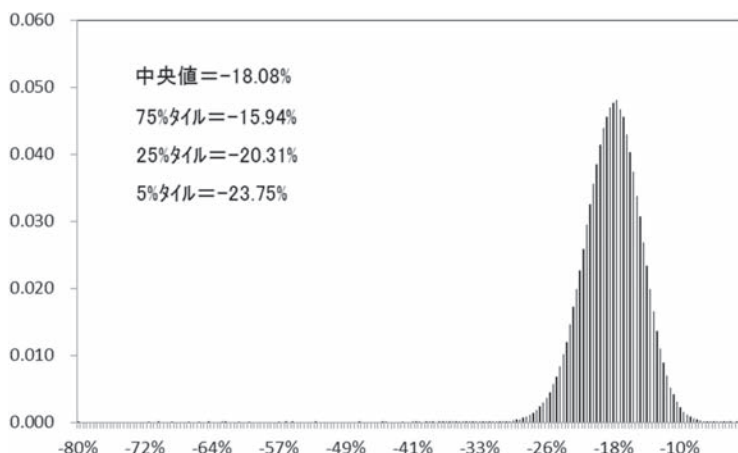


図3 1年ウィンドウ最大損失残高分布

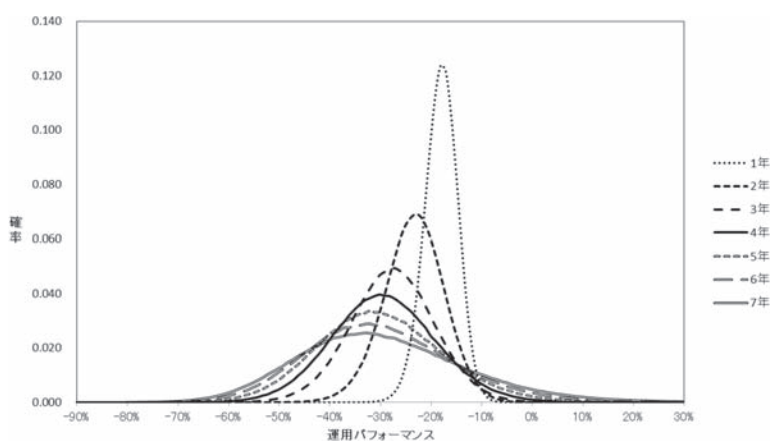


図4 1～7年ウィンドウ最大損失残高分布

表2 1～7年ウィンドウ最大損失残高分布観察結果

年数	1	2	3	4	5	6	7
平均値	-18.18%	-23.54%	-27.79%	-29.37%	-30.05%	-30.06%	-29.54%
標準偏差	3.31%	5.99%	8.35%	10.41%	12.45%	14.53%	16.71%
中央値	-18.08%	-23.40%	-27.75%	-29.45%	-30.59%	-31.00%	-30.96%
75%タイル	-15.94%	-19.52%	-22.25%	-22.61%	-22.14%	-21.05%	-19.44%
25%タイル	-20.31%	-27.39%	-33.28%	-36.36%	-38.53%	-40.09%	-41.19%
元本回復確率	0.00%	0.01%	0.07%	0.43%	1.32%	2.89%	5.03%

表2は1年ウィンドウから7年ウィンドウまでのシミュレーション結果で、図5は表2をグラフにしたものである。

折れ線グラフは左側の軸に対応して運用成績(%)と確率を、棒グラフは右側の軸に対応して標準偏差を表している。平均値及び中央値の下げ幅はウィンドウ期間が延びるに従って縮小し、5～7

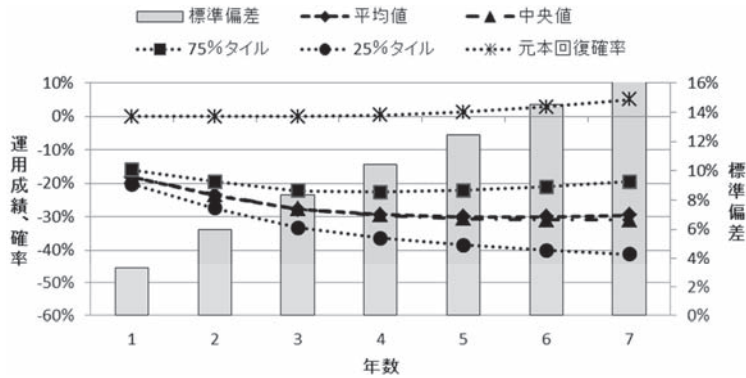


図5 1～7年ウィンドウ最大損失残高分布 観察結果

年間ではほぼ横ばいになっている。また、当初の元本を回復する確率も、わずかではあるが期間が長くなるにつれて増加していくので、一見すると大きな損失も年数と共に回復できるような印象を受ける。しかしながら、75%タイルは上昇に転じるものの、25%タイルは小さくなっていくことから、損失回復力よりも不確実性の増加速度の方が速いことを結果は示している。これは標準偏差の増加からも見てとれ、一時的に大きな損失を被っても、やがて時間と共に当初の期待通りに回復していくと、楽観的な見通しを持つことは危険であるという示唆といえよう。もちろん、より長い年数をかければ異なるリスク・プロファイルが浮かび上がってくるかもしれないが、想定運用期間が25年では、途中で顕在化した大きな下方リスクに対して、リカバーする期間はそれほど残されていない。

### 3) 大きな損失とリカバリー期間

2) では最悪の場合に焦点を当てたが、次に角度を変えて、ある程度大きな損失が発生した場合に、それをリカバーするのにどれくらい時間がかかるのかを考察する。具体的には、運用残高が100兆円に減った場合に、当初元本の130兆円を回復するまでにどれくらいの年数が必要になるかを観察した。GPIFの想定運用期間は25年であるが、このシミュレーションでは回復期間として最長50年間にわたるパフォーマンス・プロファイルを確認した。また、純粋にポートフォリオの回復力を考察するために、ここではキャッシュアウトは想定していない。

表3は、本稿の基本ポートフォリオ・シミュレーションにおける、運用残高が100兆円以下になる確率を5年ごとに示したものである。表3から明らかなように、残高が100兆円以下になる可能性はどの節目でも20%以上あり、現実的に十分起こり得るものであるといえる。

表4は、スタート時の残高が100兆円のポートフォリオが、50年間にわたってどのように成長していくのか、5年ごとにまとめたものである。

「元本回復確率」は、運用残高が当初元本の130兆円以上になる確率を指し、5年後には22.38%が元本を回復している。この時、残高分布の中央値は103.79兆円で、75%タイルは126.74兆円、25%タイルは85.90兆円、5%タイルは66.39兆円だった。図6は、表4をグラフに描いたものである。折れ線グラフは左側の軸に対応して運用残高(兆円)を表し、棒グラフは右側の軸に対応して、運用残高が元本(130兆円)以上になる確率を示している。



表3 運用残高が100兆円以下の確率

5年後	10年後	15年後	20年後	25年後
20.65%	28.67%	27.29%	27.22%	26.96%

表4 運用期間による損失リカバリー

運用期間	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
元本回復確率	22.38%	33.21%	39.66%	44.21%	47.61%	50.42%	52.91%	54.96%	56.84%	58.42%
中央値残高	103.79	108.82	113.99	119.48	125.11	130.97	137.41	143.84	150.69	157.75
75%タイル残高	126.74	143.69	160.15	176.73	193.83	211.64	230.01	249.81	270.37	292.83
25%タイル残高	85.90	83.09	81.85	81.34	81.32	81.85	82.46	83.47	84.71	85.83
5%タイル残高	66.39	57.14	51.53	47.53	44.53	42.19	40.25	38.66	37.37	36.33

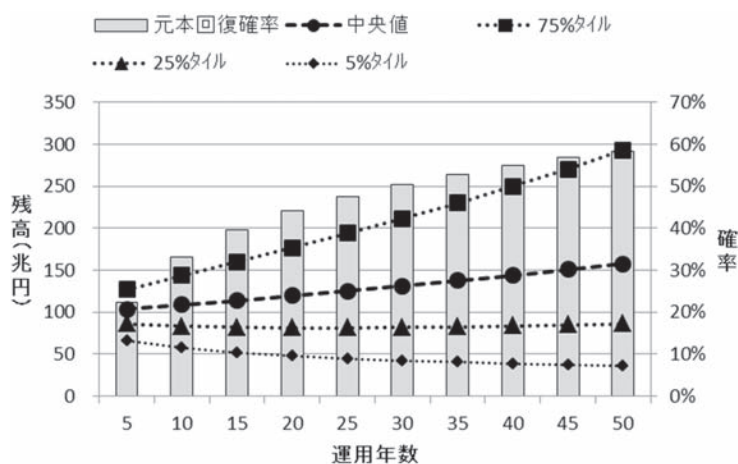


図6 運用期間による損失リカバリー

運用期間が長くなるにつれ、元本回復確率、中央値、75%タイルは順調に増加していく。しかしながら、25%タイルはあまり変化せず、逆に5%タイルは減少している。これは運用の不確実性が年数と共に大きくなっていくことを意味する。確かに、時間と共に損失をリカバーする可能性は高くなるが、50年経っても元本を回復できない確率が41.58%もあり、回復どころかさらに損失が膨らんでいる可能性も無視できないほどあるのである。一般に、「ギャンブルで作った借金はギャンブルで返すしかない」というのは、ギャンブル依存症の泥沼にはまる道であるが、「運用の損は運用で取り戻す」というのは、それと本質的に変わらない議論といえるのではないだろうか。

### Ⅲ 下方ジャンプによるグローバル・リスク・イベントのシミュレーション

#### 1 ジャンプがある場合の資産価格モデル

前節では、各資産のリターン分布に正規性を仮定して、GPIFの基本ポートフォリオ運用に関する

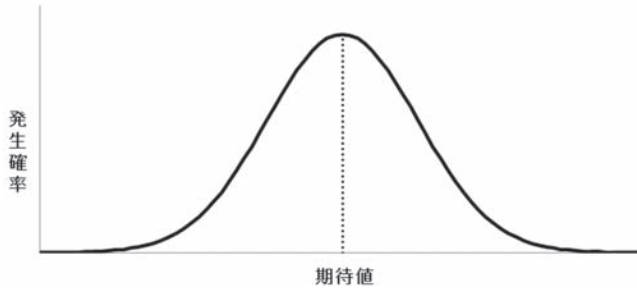


図7 ジャンプ・サイズの不確実性の例

るリスクを考察したが、実際の金融市場ではリターン分布の非正規性が広く観察されている。特に株式市場における下方リスクは、リーマン・ショックが一般的な金融工学モデルによるリスク管理の限界を明確に示したように、正規性を仮定した拡散プロセスでは捉えきれない可能性が高い<sup>9)</sup>。そこで本節のシミュレーションでは、大きなネガティブ・ショックの影響を考察するために、資産価格推移の確率過程モデルとしてマーソンのジャンプ拡散過程<sup>10)</sup>を想定する。これは、基本的な幾何ブラウン運動による拡散過程に、複合ポアソン過程を加えたものである。

非常にまれで突発的な巨大リスク・イベントの影響を考察する場合、一般的なシナリオ分析などではイベントによる極端な価格推移（ジャンプ）のサイズが一定であると仮定されることが多い。しかし、天災のようなリスク・イベントは、いつ起こるかはもちろん、どれだけの被害を及ぼすのかも、予め正確に予測することはできない。

マーソンのジャンプ拡散過程では、ジャンプのサイズは一定ではなく、正規分布に従う確率変数であると仮定され、ジャンプのインパクトに図7のような不確実性が想定される。

破線で示された期待値は最も発生確率が高いが、それより大きなジャンプも小さなジャンプも、正規確率的に発生する可能性がある。将来は過去の機械的な繰り返しではないので、モンテカルロ・シミュレーションで将来のまれに起きるジャンプ・イベントによるリスクを考察する場合、確率的表現の方がより現実的で説得力があるモデル化といえよう。

マーソンのジャンプ拡散過程モデルでは、微少な時間  $dt$  にジャンプが発生した時、資産価格  $S_t$  はジャンプにより  $y_t S_t$  に変化する。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \frac{y_t S_t - S_t}{S_t} = y_t - 1$$

ジャンプのサイズ  $y_t$  は、対数正規分布から抽出された正の値しか取り得ないランダム変数であると仮定され、 $\ln(y_t)$  は独立した同一の正規分布に従う確率変数である<sup>11)</sup>。

$$\ln(y_t) \sim i.i.d. Normal(\nu, \xi)$$

言い換えれば、 $\ln(y_t)$  は平均が  $\nu$ 、標準偏差が  $\xi$  の母集団から、ランダムにサンプルされるということである。したがって、 $y_t$  の平均と分散の期待値は次のようになる。

9) 市場リターンの非正規性と確率過程モデルに関しては、Bakshi, et al. [1997] や Bates [2000] がオプション・プライシングとの関係から詳しく論じている。

10) Merton [1976] が株式オプションのプライシング・モデルに用いた確率過程である。

11) “i.i.d.” は Independent and Identically-Distributed の略。

$$E[y_t] = e^{\nu + \frac{1}{2}\xi^2}$$

$$E[(y_t - E[y_t])^2] = e^{2\nu + \xi^2} (e^{\xi^2} - 1)$$

基本的な幾何ブラウン運動による拡散過程に、複合ポアソン過程を加えたジャンプ拡散過程は、以下で表される。

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dz_t + (y_t - 1)dN_t$$

$$\kappa = E[y_t - 1] = e^{\nu + \frac{1}{2}\xi^2} - 1$$

ここで  $\alpha$  と  $\sigma$  は、ジャンプが発生しない場合の瞬間的な資産の期待リターンとボラティリティ、 $\lambda$  は 1 年間に発生するジャンプの期待回数、 $\kappa$  はジャンプの期待%サイズであり、右辺第 1 項と第 2 項は基本的な拡散過程を表している。

第 3 項はジャンプ・プロセスを表す複合ポアソン過程であり、 $y_t$  と  $N_t$  という二つの確率変数で構成される。 $N_t$  は、 $dt$  においてジャンプが発生したかどうかを表すポアソン過程であり、 $dN_t$  は以下で定義される。

$$dN_t = \begin{cases} 0 & \text{確率 } 1 - \lambda dt \\ 1 & \text{確率 } \lambda dt \end{cases}$$

$y_t$  はジャンプが発生した場合に、その大きさを表す確率変数で、前述のように、 $\ln(y_t)$  は独立した同一の正規分布に従う。

コンピュータにプログラムするために、 $Y_t = \ln(y_t)$  として離散化をすると、以下のようになる。

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[\left(\mu - \lambda\kappa - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} + \sum_{i=1}^{N(\Delta t)} Y_i\right]$$

このプロセスでは、ジャンプとドリフトが独立しているので、価格評価のタイムステップが、ジャンプが発生したかどうかを調べる適切なタイムステップと同じであるとは限らない。しかしながら、本稿のシミュレーションのタイムステップである四半期内でジャンプが 1 回しか起こらないという保証はないものの<sup>12)</sup>、10 年に一度という非常にまれなジャンプ・イベントをシミュレーションするので、タイムステップ内でジャンプが複数回起こる可能性は極めて少ない。年間発生確率が 0.1 のジャンプの場合、四半期内に 1 回発生する確率は約 2.44% であるが、続けて同じ期間内で 2 回目のジャンプが発生する確率は 0.03% と微少なものになる<sup>13)</sup>。そこでジャンプの有無を確認するタイムステップは、資産価格評価と同じ四半期とした。

## 2 ジャンプ・イベントのシミュレーション・パラメーター

表 5 は、ジャンプ・イベントのパラメーターである。期待年間発生回数 ( $\lambda$ ) は 0.1 で、これは 10 年に一度のイベントということになる。リーマン・ショックはよく「100 年に一度」の金融危機といわれるが、本当に 100 年に一度の発生確率なのか、筆者の知る限りその根拠は曖昧である。おそらく正規分布を仮定するとそれくらいまれなイベントということになるのだろうが、実際の市場リ

12) 巨大地震やグローバル金融ショックなどは、立て続けに余震が発生する。

13)  $t$  時間にジャンプが  $n$  回起こる確率は、以下で求められる。

$$P[N_t = n] = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

表5 ジャンプ・イベントのパラメーター

年間発生回数 ( $\lambda$ )	0.1
株式平均ジャンプ・サイズ ( $\nu$ )	-20%
債券平均ジャンプ・サイズ ( $\nu$ )	0%
ジャンプ標準偏差 ( $\xi$ )	5%

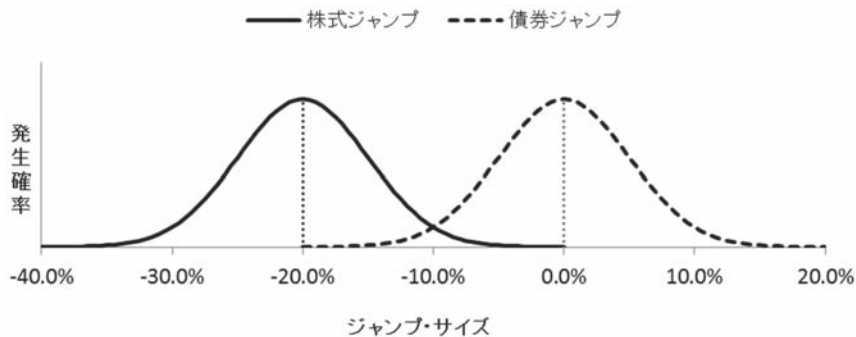


図8 株式と債券のジャンプの期待値と不確実性

表6 ジャンプの不確実性の相関係数

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
国内債券	1.00	-0.50	0.90	-0.50
国内株式	-0.50	1.00	-0.50	0.90
外国債券	0.90	-0.50	1.00	-0.50
外国株式	-0.50	0.90	-0.50	1.00

ターン分布は下方テールが正規分布よりも厚く、この場合大きなリスク・イベントは正規分布を前提にした発生確率より、もっと頻繁に起こることになる。したがって、シミュレーションで将来の下方リスクを考察する場合、10年に一度程度のリスク・イベントを想定することは妥当なものといえよう。

また、ジャンプは各資産に独立に発生するのではなく、グローバルなリスク・イベントとして全資産に同時に影響を及ぼすと仮定した。国内株式及び外国株式の期待ジャンプ・サイズは-20%、標準偏差は5%と想定し、国内債券及び海外債券の期待ジャンプ・サイズは0%で、標準偏差は株式と同じ5%とした。これをグラフで表すと図8のようになる。

債券ジャンプは期待値が0%であることから、独立事象であればプラスのジャンプもマイナスのジャンプも同様にあり得るが、より現実的な分析が行えるように、各資産のジャンプの不確実性は独立ではなく、表6の相関関係があると仮定した。

グローバルなリスク・イベントのシミュレーションなので、国内株式と外国株式間、及び国内債券と外国債券間のジャンプの不確実性には0.90という強い相関係数 ( $\rho$ ) を想定している。

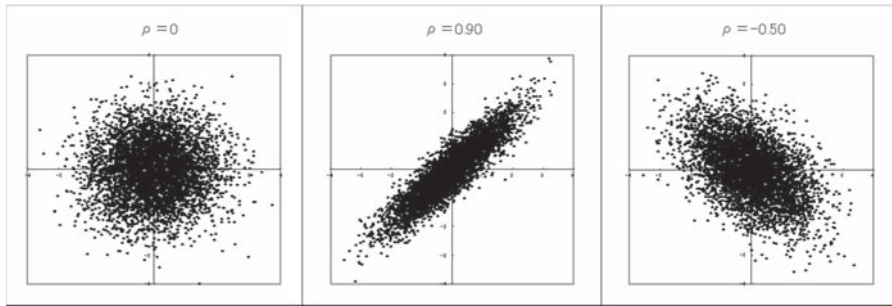


図9 相関正規乱数の例

一方で、株式と債券間のジャンプの相関係数には $-0.50$ を用いた。実証研究によると、株式リターンと債券リターンの相関関係は時間と共に大きく変動しており、長期的にはインフレ率などのマクロ要因によりプラスの傾向があるものの、大きなリスク・イベントが発生した場合には、質への逃避からマイナスの傾向がみられる<sup>14)</sup>。とはいえ、質への投資はデフォルトの恐れがない国債などに限られており、質が劣る社債や債務担保証券、仕組債などは、リーマン・ショック時のように株式と共に下落する場合もある。そこで $-0.50$ という比較的弱い相関係数を用いた。図9は、相関係数が $0.9$ の場合と、 $-0.5$ の場合の、二つの相関正規乱数がどのようにばらつくのかを表した例である。参考のために相関係数が $0$ の場合も載せてある。

### 3 ジャンプがある場合のシミュレーション結果

#### 1) ジャンプがある場合の25年後の運用残高

図10は、ジャンプがある場合の、25年後の推定運用残高分布である。平均値は147.83兆円で、ジャンプがない基本シミュレーションと比べて39兆円減少し、運用停止回数は29回から121回へと増加した。中央値は117.33兆円、75%タイルは185.10兆円、25%タイルは74.44兆円、5%タイルは38.68兆円だった。基本シミュレーションと比較すると、中央値は31.98兆円減、75%タイルは48.19兆円減、25%タイルは21.65兆円減、5%タイルは12.31兆円減となっている。また、25年後に元本の130兆円を下回る確率は41.61%から55.99%に増加し、5%タイル値以下の発生確率加重損失額(CVaR)は90.23兆円から100.20兆円に増加した。

#### 2) ジャンプがある場合の異なる評価期間での最大損失残高分布

図11、表7、図12は、ジャンプがある場合の、1年ウィンドウから7年ウィンドウまでの最大損失残高分布シミュレーションの結果である。

ジャンプがない場合(図4、表2、図5)と比べて、不確実性にあまり変化はないものの、全体的に期待値としての運用パフォーマンスは数パーセント低下している。また、元本回復確率は、ジャンプがない場合に比べて約半分に減少している。ポートフォリオとしては期待値がマイナスのジャンプなので予想された傾向ではあるが、株式ジャンプの期待値が $-20\%$ という大きなものであるこ

14) 株式と債券の相関に関しては、Shiller and Beltratti [1992], Campbell and Ammer [1993], Gulko [2002], Ilmanen [2003], Jones and Wilson [2004], Connolly, et al. [2005]等を参照されたい。



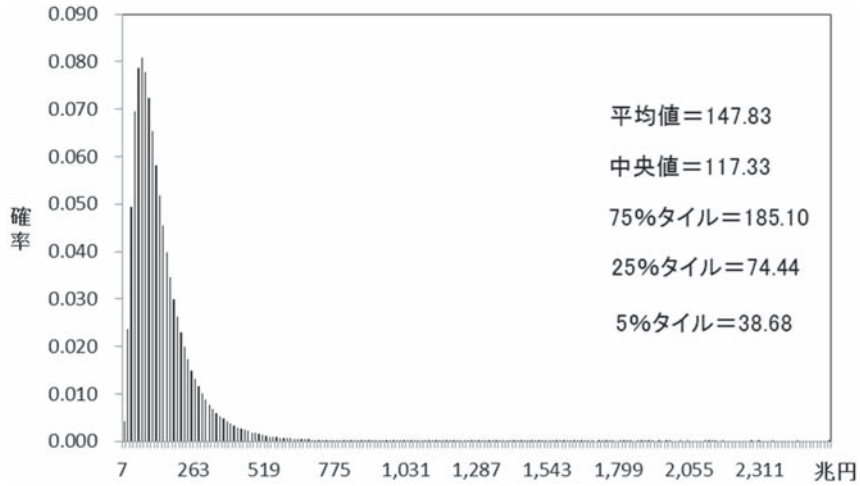


図10 ジャンプがある場合の25年後の推定運用残高分布

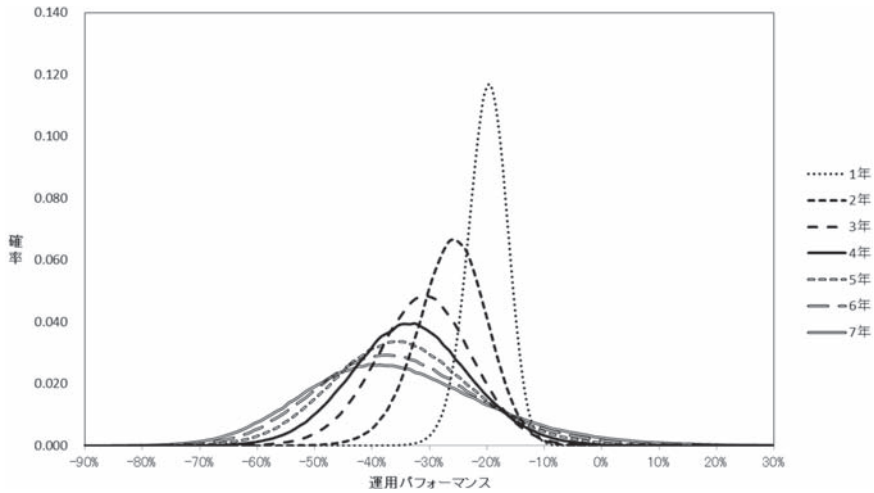


図11 ジャンプがある場合の1~7年ウィンドウ最大損失残高分布

表7 ジャンプがある場合の1~7年ウィンドウ最大損失残高分布 観察結果

年数	1	2	3	4	5	6	7
平均値	-19.50%	-25.65%	-30.55%	-32.73%	-34.02%	-34.65%	-34.78%
標準偏差	3.52%	6.21%	8.48%	10.41%	12.27%	14.14%	16.08%
中央値	-19.36%	-25.45%	-30.45%	-32.74%	-34.47%	-35.49%	-36.07%
75%タイル	-17.11%	-21.47%	-24.90%	-25.95%	-26.20%	-25.85%	-25.01%
25%タイル	-21.73%	-29.59%	-36.07%	-39.66%	-42.36%	-44.40%	-45.96%
元本回復確率	0.00%	0.00%	0.02%	0.17%	0.59%	1.40%	2.60%

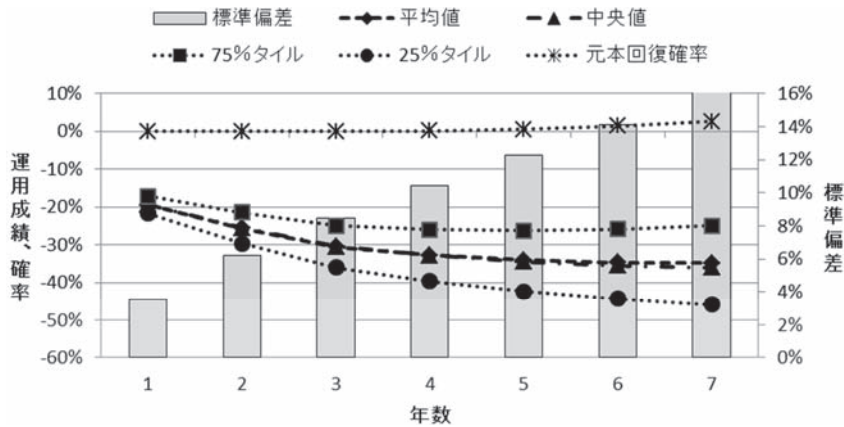


図 12 ジャンプがある場合の1～7年ウィンドウ最大損失残高分布 観察結果

表 8 ジャンプがある場合の、運用残高が100兆円以下の確率

5年後	10年後	15年後	20年後	25年後
26.25%	37.60%	37.98%	39.56%	40.65%

とを考えると、意外に影響が少ないという印象を受ける。これは、債券ジャンプの期待値が0で、株式と債券の相関が-0.50と弱いことから、債券にプラスのジャンプがあり得ることに一因があるだろうが、一方で、ジャンプがあってもなくても、そもそも基本ポートフォリオ自体が持つリスクが大きいことから、最悪の場合はさほど変わらないという意味にも取れよう。つまり、ジャンプがなくても同じように最悪の状況に陥る可能性があるということである。

### 3) ジャンプがある場合の大きな損失とリカバリー期間

表8は、ジャンプがある場合の、運用残高が100兆円以下になる確率である。

ここでは、前節のシミュレーション結果とは異なり、ジャンプが非常に大きな影響を及ぼしている。たとえば、25年後に運用残高が100兆円以下になる確率は、26.96%から40.65%と大幅に増加した。

金融市場の大きな突発的リスク・イベントは、歴史的に振り返ってみれば10年に一度程度は発生している。今後、グローバル化の進展でますます世界中の市場が密接に絡み合っていくと予想されることから、将来的にGPIFポートフォリオが表8に示された程度の確率で100兆円以下になる状況は、現実的に十分起こり得るといえよう。

表9と図13は、当初の残高が100兆円であるポートフォリオの、50年間にわたる運用シミュレーション結果をまとめたものである。

元本回復確率と運用パフォーマンスは、ジャンプがない場合と比較して、格段に悪くなっている。中央値はもはや運用期間と共に増加せず、25%タイルや5%タイルはどんどん悪化していく。50年経っても元本の回復はおろか、損失が膨らんでいる可能性が高いのである。仮にジャンプを想定したシミュレーションの方がより現実の世界を反映しているとすれば、GPIFの基本ポートフォリオは、さながら底なし沼に陥るリスクを無視できないほど内包したものであるといえよう。

表9 ジャンプがある場合の運用期間による損失リカバリー

運用期間	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
元本回復確率	10.74%	18.61%	23.15%	26.20%	28.40%	30.12%	31.49%	32.53%	33.49%	34.35%
中央値残高	89.24	89.35	89.34	89.41	89.36	89.31	89.44	89.39	89.33	89.40
75%タイル残高	109.16	118.51	126.05	132.89	139.27	145.36	151.08	156.59	161.89	167.46
25%タイル残高	73.64	67.85	63.71	60.48	57.69	55.33	53.31	51.34	49.70	48.09
5%タイル残高	56.47	46.25	39.72	34.92	31.18	28.12	25.57	23.41	21.59	19.97

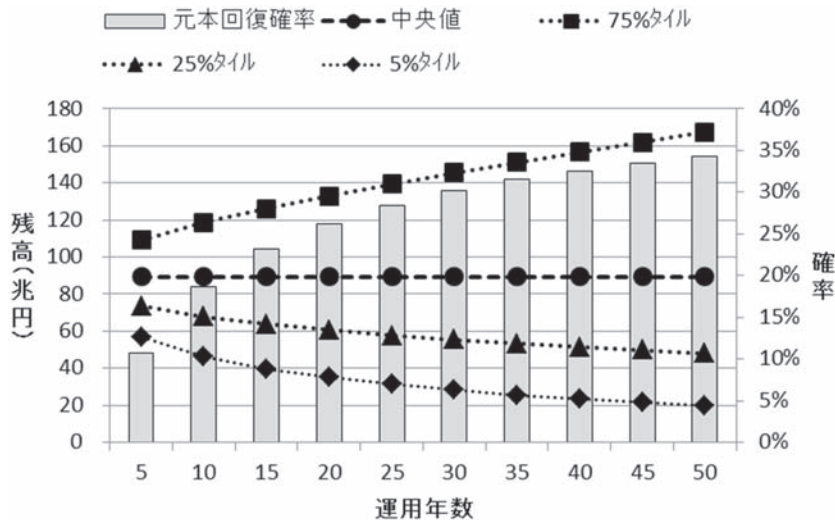


図13 ジャンプがある場合の運用期間による損失リカバリー

#### IV おわりに

本稿は、GPIFの基本ポートフォリオを想定して、ネガティブ・ジャンプがない場合とある場合に分けてモンテカルロ・シミュレーションを行い、運用パフォーマンスを下方リスクの観点から考察した。シミュレーションの結果は、たとえジャンプがない場合でも、GPIF基本ポートフォリオは年金財政を破綻させかねない取り返しのつかないリスクを多大に内包し、ジャンプを加えた、より現実的な場合には、さらにそのリスクが悪化するというものだった。

もちろん、本稿のシミュレーションでは、GPIFの「市場環境の適切な見通しを踏まえた機動的な運用」や「複線的なリスク管理」によるアロケーションの変更は反映されていない。とはいえ、アクティブな運用で長期的に超過収益を上げ続けることが可能かどうかについてはこれまで数多くの実証研究が幅広く行われており、結果はおおむね否定的である<sup>15)</sup>。したがって、機動的な運用はさらに不確実性を加える可能性が高い。

15) 投資信託が超過収益を上げられるかどうかについては、Pastor and Stambaugh [2002], Carhart [1997], Chen, et al. [2010], Daniel, et al. [1997], Elton, et al. [1995, 1996, 2003, 2011], Fama and French [2010]等を参照されたい。

加えて、インプット値の妥当性はもとより、本稿のシミュレーション・モデルが、現実の市場の動きを正確に捉えているという保証はない。特に債券リターンは、GPIFが国内債券のリスク計算において将来のデュレーションの長期化を考慮しているとはいえ、期待リターンと標準偏差をベースにした株式と同じ確率過程モデルでは、その特性を十分に捉えきれていない可能性が高い。金利は平均回帰性を伴うので、金利の期間構造モデルを用いて債券リターンを導出する方が望ましいだろう。しかしながら、GPIFの運用はオルタナティブ資産を含み、さらに保有債券資産のデュレーションを将来的な見通しによって「機動的に」変えていくと予想されることから、より精緻な債券リターンのモデル化はあまり意味がないかもしれない。

また、「破綻」とか「取り返しのつかないリスク」の定義は何かという反論もあろう。しかしながら、運用残高が100兆円を下回る確率が、ジャンプを想定しない場合でも、運用期間の25年間にわたって25%程度存在し、その損失を取り返すために同じ運用を50年間続けたとしても、元本を回復できない確率が40%以上あるというのは、健全な年金財政を維持する上で取り返しのつかないリスクが潜んでいるといえるのではないだろうか。すくなくとも、そのような状況に陥った場合、損失が巨額過ぎて誰も管理運用の責任を取りようがなく、年金システムを支えるために国民が大きな負担を強いられるのは間違いない。このような年金システムで、130兆円もの資金を大きな市場リスクにさらすということが、果たして国民福祉のために合理的な行動といえるのか、強い懸念を抱かざるを得ない。

そもそもGPIFの基本ポートフォリオは、少子高齢化が加速する中で、年金システムを破綻させないためには、市場運用でいくら稼ぐ必要があるかという期待リターンの観点が先にあり、年金積立金の安全運用にはどれだけのリスクを取ってもよいかという本来のあるべき視点がないがしろにされているという印象を受ける。将来の不確実性の中に大きなリスクを埋没させることは、借金をギャンブルで稼いで返す返済計画と似たようなもので、単に問題を先送りしながら、さらにリスクを取り返しがつかないものになっているということにはならないだろうか。公的年金システムの健全な維持に支障を来すような状況は、単なる金融資産の変動リスクではなく、国家にとっての危機であると認識する必要があるだろう。

## 参考文献

- Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen [1997] "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, 53, pp. 499-547.
- Bates, D. S. [2000] "Post-'87 Crash Fears in the S&P 500 Futures Option Market," *Journal of Econometrics*, 94, pp. 181-238.
- Campbell, J. and J. Ammer [1993] "What Moves the Stock and Bond Markets? A Variance Decomposition for Long-term Asset Returns," *Journal of Finance*, 48, pp. 3-37.
- Carhart, M. M. [1997] "On Persistence in Mutual Fund Performance," *Journal of Finance*, 52, pp. 57-82.
- Chen, Y., W. Ferson, and H. Peters [2010] "Measuring the Timing Ability and Performance of Bond Mutual Funds," *Journal of Financial Economics*, 98, pp. 72-89.
- Connolly, R., C. Stivers, and L. Sun [2005] "Stock Market Uncertainty and the Stock-bond Return Relation," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 40, pp. 161-194.
- Daniel, K., M. Grinblatt, S. Titman, and R. Wermers [1997] "Measuring Mutual Fund Performance with Characteristic-based Benchmarks," *Journal of Finance*, 52, pp. 1035-1058.

- Elton, E. J., M. J. Gruber, and C. R. Blake [1995] "Fundamental Variables, APT, and Bond Fund Performance," *Journal of Finance*, 50, pp. 1229-1256.
- Elton, E. J., M. J. Gruber, and C. R. Blake [1996] "Survivorship Bias and Mutual Fund Performance," *Review of Financial Studies*, 9, pp. 1097-1120.
- Elton, E. J., M. J. Gruber, and C. R. Blake [2003] "Incentive Fees and Mutual Funds," *Journal of Finance*, 58, pp. 779-804.
- Elton, E. J., M. J. Gruber, and C. R. Blake [2011] "Holdings Data, Security Returns, and the Selection of Superior Mutual Funds," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 46, pp. 351-367.
- Fama, E. F. and K. R. French [2002] "The Equity Premium", *Journal of Finance*, pp. 637-659.
- Fama, E. F. and K. R. French [2010] "Luck Versus Skill in the Cross-section of Mutual Fund Return," *Journal of Finance*, 65, pp. 1915-1947.
- Gulko, L. [2002] "Decoupling," *Journal of Portfolio Management*, 28, pp. 59-67.
- Ibbotson, R. G. and P. Chen [2003] "Long-Run Stock Returns: Participating in the Real Economy," *Financial Analysts Journal*, pp. 88-98.
- Ilmanen, A. [2003] "Stock-bond Correlations," *Journal of Fixed Income*, 13, pp. 55-66.
- Jones, C. and J. Wilson [2004] "The Changing Nature of Stock and Bond Volatility," *Financial Analysts Journal*, 60, pp. 100-113.
- L'Ecuyer, P. [1999] "Good Parameters and Implementations for Combined Multiple Recursive Random Number Generators," *Operations Research*, pp. 159-164.
- Martin, L., S. C. Ludvigson, and J. A. Wachter [2008] "The Declining Equity Premium: What Role Does Macroeconomic Risk Play?," *Review of Financial Studies*, 21, pp. 1653-1687.
- Mehra, R. and E. C. Prescott [1985] "The Equity Premium: A Puzzle," *Journal of Monetary Economics*, 15, pp. 145-61.
- Merton, R. [1976] "Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, pp. 125-144.
- Moro, B. [1995] "The Full Monte," *Risk*, 8(2), pp. 57-58.
- Pastor, L. and R. Stambaugh [2002] "Mutual Fund Performance and Seemingly Unrelated Assets," *Journal of Financial Economics*, 63, pp. 315-349.
- Siegel, J. J. [2014] *Stocks for the Long Run: The Definitive Guide to Financial Market Returns and Long-Term Investment Strategies (5th ed.)*, New York: McGraw-Hill.
- Shiller, R. and A. Beltratti [1992] "Stock Prices and Bond Yields," *Journal of Monetary Economics*, 30, pp. 25-26.
- 大野薫 [2015] 「覆水盆に返らず：年金資金株式市場運用の期待値予測に潜む取り返しのつかないリスク」『CGSAフォーラム』第13号, 1-15ページ。
- 北村智紀 [2008] 「新人口推計下における公的年金財政の持続可能性について」『リスクと保険』第4号, 41-61ページ。
- 北村智紀・中嶋邦夫・白杵政治 [2006] 「マクロ経済スライド下における積立金運用でのリスク」『経済分析』第178号, 23-52ページ。
- 厚生労働省 [2014] 『国民年金及び厚生年金に係る財政の現況及び見通し—平成26年財政検証結果—』。『日本経済新聞』2015年10月1日付, 朝刊。
- 年金積立金管理運用独立行政法人 2014年10月31日付 Press Release 『年金積立金管理運用独立行政法人 中期計画の変更について』。
- 年金積立金管理運用独立行政法人 [2015] 『平成26年度業務概況書』。
- 米澤康博 [2010] 「金融資本市場の変化が公的年金積立金運用政策の在り方に及ぼす影響」『季刊社会保障研究』第46巻第1号, 4-11ページ。