

# 不公平回避的な個人による 3 人協力ゲームのコア<sup>1)</sup>

高 梨 誠 之\*

## I 序論

人間には社会性があり，自身の効用が自分の取り分だけでなく他の人々の取り分にも影響されることがある。Fehr and Schmidt [1999] はこの点を追求し，新しい，他者の配分に影響される効用関数（以下，F-S 型効用関数と呼ぶ）を提唱した。彼らは不公平回避性を導入し，これまでの自己中心的な自分の取り分に関する項だけでなく，他人と自分との取り分の差額の大きさにも依存する効用関数を考えた。そして，その差額の大きさに比例する形で効用が自己中心的な項から減少する形を提示したが，そのとき，二つのパターンを分けて分析した。一つは自分よりも大きい取り分を持つ人との差額に対してであり，ある種の嫉妬心を表すと考えられる。もう一つは自分より少ない人たちとの差額に対してであり，同情心のようなものを表す。そして，Fehr and Schmidt [1999] は多くの具体的なゲームを分析し，自らの効用関数の有用性を実証した。

あるいは，Bolton and Ockenfels [2000] も他者の配分に影響される選好を分析した。彼らの提唱したモデル<sup>2)</sup>は自分の取り分を所与としたとき，その取り分が全体の平均と同じであるときに効用が最大となるようなモデルであり，このモデルが実験結果と整合的であると述べた<sup>3)</sup>。しかし，何れの論文においても協力ゲームは分析されなかった。

そこで，この論文では社会的選好の下での協力ゲームの分析を行った。特にこの論文では，協力ゲームにおいて最も一般的な解概念であるコア概念を用いて分析を行った。コアは，どんな人数での提携も全体での提携から逸脱しない持続可能な配分の集合を指す。社会的選好の下でのコアを分析することで，人々の選好がより現実に近い状態での持続可能な配分について分析することが出来た。

ここで，なぜ社会的選好の下での協力ゲームを分析する必要があるかについて述べたい。まず，文化人類学や地域研究では，人々が社会的選好を持っているかのような互酬性に基づく行動が，先進国でも発展途上国でも指摘されている。実際，Hyden [1983] はアフリカにおいて，互酬性に基づく富の再分配システムが存在することを指摘し，それを「情の経済」と名付けた。また，互酬性に基づく経済システムとしては「モラル・エコノミー」も分析されてきた。Scott [1976] はその例として，東南アジアの農民の行動を挙げた。東南アジアの農民は自分の家族のために市場価格よ

\* 日本学術振興会特別研究員 DC・京都大学大学院経済学研究科博士後期課程

1) 本論文の作成に当たっては，関口格教授より多くの有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。

2) このモデルは，ERC モデルと呼ばれる。

3) Fehr and Schmidt [1999] の効用関数はプレイヤーが二人のときには ERC モデルの特殊ケースとなっている。

りも高い価格で農地を購入することがある、と Scott [1976] は指摘している。さらに、Hyden, Tsuruta and Kuroda [2007] は、こういった互酬性に基づく行動が世界的なものであることを指摘した。

これらの論文では人々の互酬性に基づく行動をとる傾向が示されているが、こういった世界的傾向を一つの非協力ゲームのモデルで理解することは難しい。非協力ゲームでは一定の条件の下での人々の取りうる行動を分析することはできるが、互酬性に基づく行動が世界的に見られる以上、それらすべてを包含できるような過度に一般的な条件の下での分析は難しいと考えられるからである。そこで、むしろこの世界的な傾向は人々の規範的な行動の結果として理解すべきであろう。それが、我々が社会的選好の下での協力ゲームを分析する理由である。

また、我々は社会的選好の下での協力ゲームを分析する際の重要な論点を指摘しておきたい。それは、社会的選好の下でも経済合理性は達成できるか、という問題である。Hyden [1983] では、「情の経済」は経済合理的ではなく、経済発展を遅らせると考えられた。しかし、Ogawa [2006] では時に「情の経済」は柔軟で、経済合理性とも矛盾しないと述べられている。Hyden, Tsuruta and Kuroda [2007] では、互酬性に基づくシステムはその地域の文化次第で経済発展を助長しも、遅らせもすることが指摘された。そこで、我々は効率的でありうる全員の提携でのコアの存在を、経済合理性と対応付けて分析する。具体的には、不公平回避的な効用関数の下で、効率的な配分が実現する条件は何かということ、3人ゲームの場合についてすべて求める。

我々の得た結果は以下の通りである。まず、F-S コアを効用関数のみが通常のコアと異なり F-S 型効用関数であるとしたコアとして定義し、また、特徴づけた。具体的なゲームについて、F-S コアを図示した。さらに、F-S コアの存在条件を提示した。また、人々がより嫉妬深くなるときは、その条件がより厳しくなり、効率的な配分を達成しづらくなることを示した。

この研究と関係のある論文は以下に挙げられる。Dutta and Ray [1989] は平等主義的配分を提唱した。平等主義的配分では、配分間の序列を規定する支配関係についてより平等主義的なものを用いている。そして、少なくとも一つの配分が平等主義的配分であることを示し、それがコアに含まれることを示した。F-S 型効用関数を平等主義的であると考えれば、この論文は我々のものと近い。異なる点は、支配関係と選好である。Dutta and Ray [1989] では支配関係はより平等主義的なものを用いているが、我々は支配関係についてはより古典的に、ある提携に属する全員の効用の改善を支配の定義とした。一方で、我々は選好についてはこれまでの一般的な分析と異なり社会的選好を用いたが、Dutta and Ray [1989] では古典的な自分の取り分のみを気にする選好を用いている。

平等主義的協力ゲームによる分析は、多くの人々によって行われている。Arin and Inarra [2001], Arin, Kuipers and Vermeulen [2008], van den Brink, Funaki and Ju [2011], Bhattacharya [2002] などである。これらの論文では、平等主義とコア、あるいはシャープレイ値について様々な視点から分析が行われた。しかしこれらの論文でも、選好は古典的な自分の取り分のみを気にするものであり、社会的選好が分析されることはなかった。

この論文は以下のように構成されている。第2章でモデルを与え、第3章で我々の解概念である F-S コアを定義し、また特徴づけた。第4章で F-S コアを具体的に求め図示し、第5章で F-S コアの存在条件を与え、第6章を結論とする。

## II モデル

ここでは、この論文で扱う協力ゲームのモデルについて述べる。協力ゲームは全体集合  $N$  の任意の部分集合（提携  $S$ ）にある値を特定することによって得られるが、特性関数は、ある提携  $S$  に  $S$  のプレイヤーが獲得できる最良の報酬を対応付ける。

$N = \{1, 2, \dots, n\}$  を  $n$  人のプレイヤーの集合とし、 $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  を特性関数とする。

定義 1. 任意の  $S \subset N$  に対し、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{|S|}) \in \mathbb{R}^{|S|}$  が  $S$  の配分であるとは、

1.  $\sum_{i=1}^{|S|} x_i = v(S)$
2. 任意の  $i \in S$  に対し、 $x_i \geq 0$

を満たす時である。なお、 $S$  は提携で、 $x$  はある提携をするプレイヤーへの報酬の配分を表すベクトルである。また、 $X_S$  で  $S$  の配分全体を表す。

定義 2. プレイヤー  $i \in S$  の F-S 効用関数  $u_i^F: X_S \times 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  は、以下で与えられる。

$$u_i^F(x, S) = x_i - \frac{\alpha}{n-1} \sum_{j \in S/(i)} \max[x_j - x_i, 0] - \frac{\beta}{n-1} \sum_{j \in S/(i)} \max[x_i - x_j, 0]$$

なお、 $\alpha \geq \beta \geq 0$  かつ、 $1 > \beta$  である。また、 $\alpha$  は嫉妬心が効用を左右する度合いを表し、 $\beta$  は同情心が効用を左右する度合いを表す。

定義 3. 配分  $x \in X_N$  が、 $S$  を通して、 $y \in X_S$  に支配されるとは、

1.  $\sum_{i=1}^{|S|} y_i \leq v(S)$
2. 任意の  $i \in S$  に対し、 $u_i^F(y, S) > u_i^F(x, N)$

を満たす時である。

すなわち、配分  $x \in X_N$  が、 $S$  を通して、 $y \in X_S$  に支配されるとは、 $S$  に属するすべてのプレイヤーが、 $S$  を通して全体提携から逸脱することで自分の効用を上げることができることを意味する。

定義 4.  $C_{\alpha, \beta} \subset X_N$  が F-S コアであるというのは、 $C_{\alpha, \beta}$  の中のいかなる配分も、任意の  $S$  に対し、 $S$  を通して  $X_S$  の中の任意の配分に支配されないことである。

定義 2 では、効用関数が自分が入っている提携にも依存する形をとっている。これは、人は自分の所属している集団にいる人々のことを最もよく意識しているという考えに基づくものである。もちろん、それ以外の人々に対しても一定の不公平回避性を持つ人はいるだろうが、ここでは簡単のため自分の入っている提携にのみ不公平回避的であるとした。

定義 2 の効用関数は、Fehr and Schmidt [1999] によって提唱されたものである。この効用関数を持つ個人は、自分より多い取り分を持つ人に関しては不当だと考え、その差額に合わせて効用が減少し、また、少ない人に対しては同情し、やはりその差額に合わせて効用が減少する。つまり、この関数は不公平回避的な効用関数であると言えるだろう。なお、 $\alpha \geq \beta \geq 0$  という条件は、取り分

の多い人に対する不公平感より、少ない人に対する不公平感の方が大きいことと、それぞれの人に対して、不公平であることで効用が増加することが無いことを表している。特に、 $\alpha \geq \beta$  という条件について、Fehr and Schmidt [1999] は Loewenstein, Thompson and Bazerman [1989] によって嫉妬心の方が同情心よりも大きいと指摘されたことに基づいて、この外生条件を設定した。また、この条件は Tversky and Kahneman [1991] の提唱した損失回避に対応していることを彼らは指摘している。また、 $1 \leq \beta$  とすると、人々はより取り分の少ない人との差額を減らすために自分の取り分を捨てても効用が減少しないことになる。そのため、 $1 > \beta$  という条件が必要となる。なお、これらの外生変数に対する条件のうち  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, 1 > \beta$  についてはこの論文のすべての定理の証明に不可欠であったが、 $\alpha \geq \beta$  に関しては、すべての定理について証明に必ずしも必要ない。

また、この効用関数は取り分に対して線型でないので、譲渡可能効用ではない。しかし、この効用関数を用いた協力ゲーム分析における用語法は、各プレイヤーの効用が譲渡可能な協力ゲームである TU ゲームに基づく。

### III 線型不等式による F-S コアの表現

この章では、3人のケースでいかなる配分が F-S コアに含まれるのかを見ていく。

次の定理によって、F-S コアが完全に特徴づけられる。

定理 1.  $\beta > \frac{2}{3}$  とする。任意の  $x \in X_N$  について、 $\frac{v(N)}{3} \geq \frac{v(S)}{|S|}$  が任意の  $S \subset N$  について成り立つとき、F-S コアは平等配分  $\left(\frac{v(N)}{3}, \frac{v(N)}{3}, \frac{v(N)}{3}\right)$  のみを含み、それ以外のときは F-S コアは空となる。また、 $\beta \leq \frac{2}{3}$  とする。このとき、 $x = (x_1, x_2, x_3) \in X_N$  について、 $x$  が F-S コアに含まれることの必要十分条件は

$$\begin{cases} (1+\alpha)u_i^f(x, N) + (1-\beta)u_j^f(x, N) \geq \left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)v(\{i, j\}) \text{ for any } i, j \in N \text{ such that } i \neq j \text{ and } x_i \geq x_j \\ u_i^f(x, N) \geq v(\{i\}) \text{ for any } i \in N \end{cases}$$

となる。

証明：付録 A を見よ。(証明終)

定理 1 から、F-S コアは、 $\beta$  の大きさの程度によって、すなわち、同情の大きさによって二つのケースに分けられることがわかる。一つは、 $\beta > \frac{2}{3}$  のときである。このとき、最も多くの取り分を持つプレイヤーはより少ない取り分を持つプレイヤーに対し、自分の取り分を分け与えることによって全員のプレイヤーの効用を改善することができる。よって、任意の不平等な  $N$  の配分は平等な  $N$  の配分  $\left(\frac{v(N)}{3}, \frac{v(N)}{3}, \frac{v(N)}{3}\right)$  に支配される。それは、任意の平等配分でない配分  $y \in X_N$  に対し、 $\frac{v(N)}{3} > u_i(y, N)$  が任意の  $i=1, 2, 3$  について成り立つことによる。このケースは、全体提携を通しての逸脱が  $\beta$  が十分大きいときに起こりうることを示しているが、これは各プレイヤーの効用

が譲渡可能な協力ゲームである TU ゲームでは起きえないことであった。以上のことから、 $\beta > \frac{2}{3}$  のとき、平等配分以外の配分は F-S コアに含まれないことがわかる。

また、 $\frac{v(N)}{3} \geq \frac{v(S)}{|S|}$  が任意の  $S \subset N$  について成り立つとき、ある  $i=1,2,3$  が存在して、

$$\frac{v(N)}{3} \geq \frac{v(S)}{|S|} \geq y_i \geq u_i^f(y, S)$$

が成立するため、このときに平等配分は F-S コアに含まれることがわかる。一方で、ある  $S$  について  $\frac{v(S)}{|S|} > \frac{v(N)}{3}$  が成立するならば、明らかに  $S$  の平等配分が  $N$  の平等配分を支配する。以上から、 $\beta > \frac{2}{3}$  のケースで定理 1 が証明できることがわかる。

次に、 $\beta \leq \frac{2}{3}$  のケースを考える。このケースでは、 $\beta > \frac{2}{3}$  のときとは異なり、全体提携による逸脱が起きない。それは、人々があまり同情的ではないため、どのプレイヤーも自分の取り分を相手に分け与えることで効用が増加しないためである。よって、 $|S| \leq 2$  のときのみを考えれば十分である。 $|S|=1$  のときは、明らかに

$$u_i^f(x, N) \geq v(\{i\})$$

が任意の  $S=\{i\}$  によって逸脱されない必要十分条件となる。そこで、 $|S|=2$  のときを考える。 $S=\{i, j\}$  とする。このとき、ある  $S$  の配分  $y$  が存在して、

$$\begin{cases} u_i^f(y, S) > u_i^f(x, N) \\ u_j^f(y, S) > u_j^f(x, N) \end{cases}$$

となるとき  $x$  は  $y$  に支配される。そこで、このような  $y$  が存在しない条件を求めると

$$(1+\alpha)u^f(x, N) + (1-\beta)u^f(x, N) \geq \left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)v(\{i, j\})$$

となる。但し、一般性を失わずに  $x_i \geq x_j$  とする。

この不等式は  $\alpha = \beta = 0$  のとき、 $x_i + x_j \geq v(\{i, j\})$  となる。すなわち、既存の効用関数における提携  $\{i, j\}$  を通して  $x$  が支配されるか否かの不等式を我々は一般化したといえる。

#### IV F-S コアの導出の実例

$v(N)=25, v(\{2,3\})=14, v(\{1,3\})=v(\{1,2\})=v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$  のときを考える。この時、通常のコア ( $\alpha = \beta = 0$ ) は

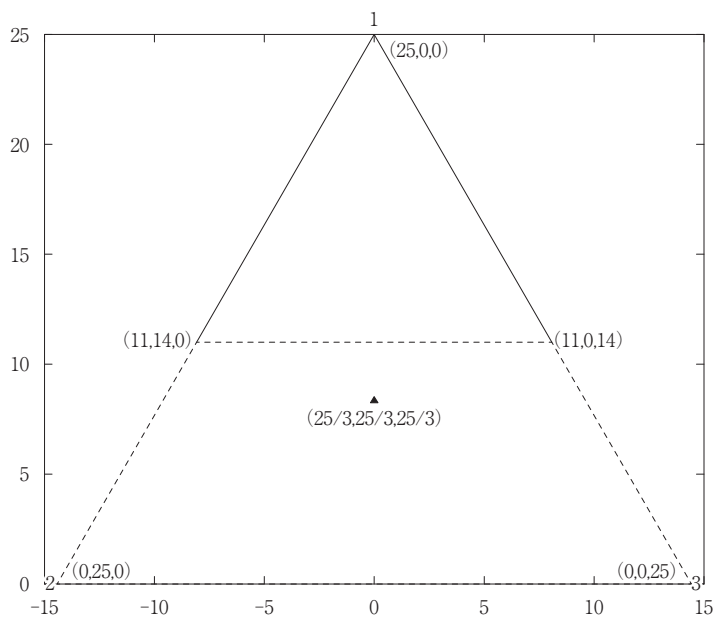


図 1  $\alpha=\beta=0$

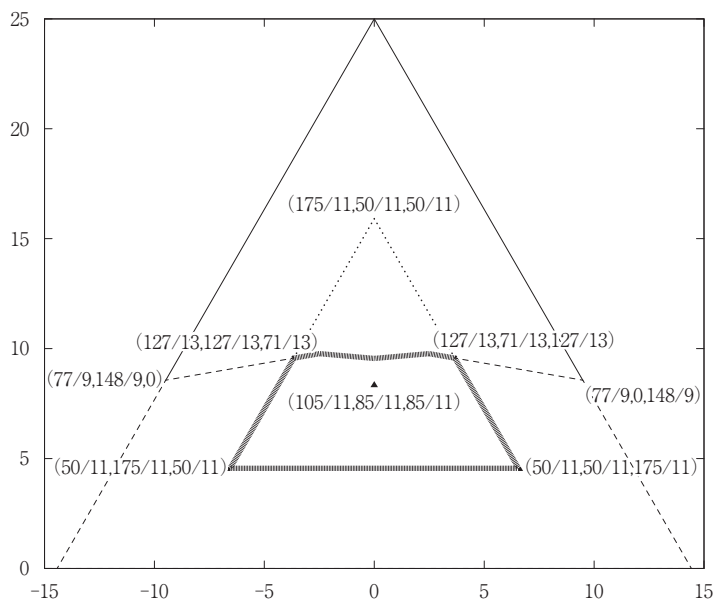


図 2  $\alpha=0.8, \beta=0$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 25 \\ x_2 + x_3 &\geq 14 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

で特徴づけられる。よって、コアの範囲は図 1 の ----- の内側の領域となる。なお、三角形の各頂

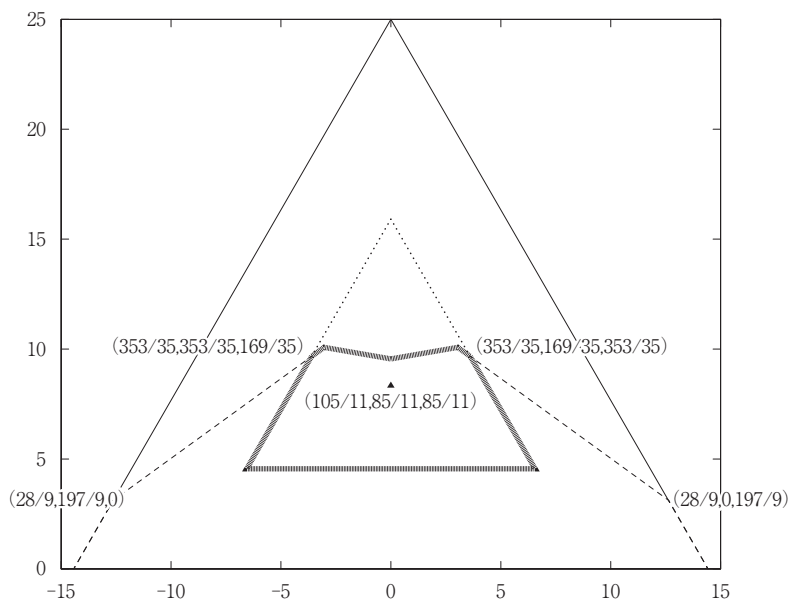


図3  $\alpha=0.8, \beta=0.5$

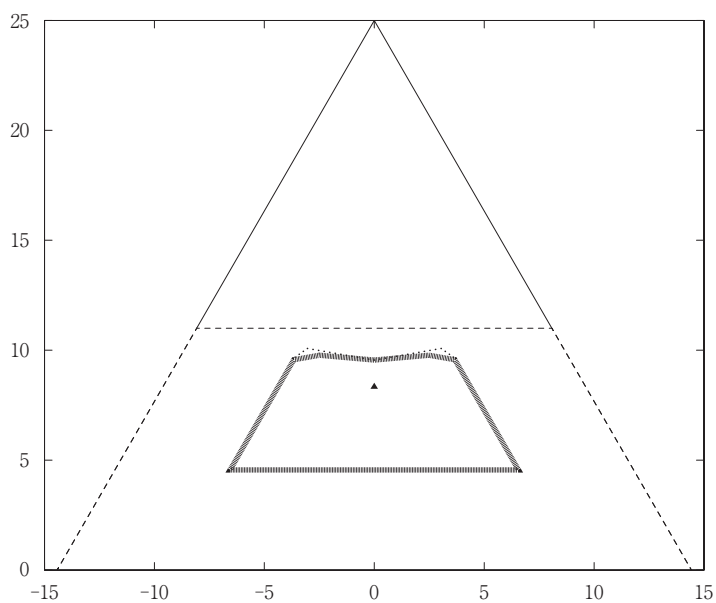





図4




点のラベル  $i$  の対辺からの高さがプレイヤー  $i$  の取り分を表している。

次に、 $\alpha=0.8, \beta=0$  のときを考える。ある  $x$  について、一人提携  $\{i\}$  によって逸脱しない必要十分条件は、 $u_i^F(x, N) \geq 0$  となる。提携  $\{1, 2\}$  で逸脱しない必要十分条件は  $u_1^F(x, N) \geq 0$  かつ  $u_2^F(x, N) \geq 0$  となるので、任意の一人提携で逸脱しないときは提携  $\{1, 2\}$  でも逸脱せず、同様に、提携  $\{1, 3\}$  でも逸脱しないことがいえる。提携  $\{2, 3\}$  で逸脱しない条件は、定理 2 より、



$$(1+\alpha)u_2^F(x,N)+(1-\beta)u_3^F(x,N)\geq 14\left(1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\text{if } x_2\geq x_3$$

$$(1+\alpha)u_3^F(x,N)+(1-\beta)u_2^F(x,N)\geq 14\left(1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\text{if } x_3\geq x_2$$

となる。以上から、コアとなる範囲は図 2 の  の内側の領域となる。なお、 の内側が一人提携によって逸脱されない配分の集合であり、 の内側が提携 {2,3} で逸脱しない配分の集合である。

さらに、 $\alpha=0.8, \beta=0.5$  のときを考える。この時、前の例と同じように計算すると、コアとなる範囲は図 3 の  の内側の領域となる。なお、図 2 と同様に  の内側が一人提携によって逸脱されない配分の集合であり、 の内側が提携 {2,3} で逸脱しない配分の集合である。

なお、 $\beta > 2/3$  のときは、定理 1 より、コアは一点集合  $\{(25/3, 25/3, 25/3)\}$  のみ (図 1, 2, 3, 4 の三角の点) となる。

図 4 は、それぞれのケースにおける F-S コアのみを図示している。 の内側が  $\alpha=0.8, \beta=0$  のケースでのコアであり、 の内側が  $\alpha=0.8, \beta=0.5$  でのコアであるから、 $\beta$  の増加によってコアが大きくなっている。一方、 $\beta > \frac{2}{3}$  のときは、コアが三角の点のみとなり、ここでは  $\beta$  の増加によってコアは小さくなっている。

さらに、図 2、図 3 から分かるように、F-S コアは常に凸集合であるとは限らない。これは、Fehr-Schmidt 型の効用関数が譲渡可能な効用でない事によると考えられる。

### V F-S コアの非空性

Ⅲ節では、F-S コアを特徴づけることができたが、所与の  $\alpha, \beta$  の下で F-S コアが非空でない条件は明示されなかった。この節では、この点を追及していく。コアが非空であれば、人々は効率的な配分を実現できると考えられる。

次の定理によって、F-S コアが非空か否かを判定することができる。

定理 2.  $\beta > \frac{2}{3}$  とする。このとき、任意の  $S \subset N$  について、 $\frac{v(N)}{3} \geq \frac{v(S)}{|S|}$  が成立するとき、そしてその時のみ、F-S コアは非空となる。また、 $\beta \leq \frac{2}{3}$  とする。

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & -\alpha & \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta & -\alpha/2 & -\alpha/2 \\ \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta/2 & 1-\beta/2 & -\alpha \\ 2-\beta & 1+(\alpha-\beta)/2 & 1+(\alpha-\beta)/2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\{1,2\} \\ y\{2,3\} \\ y\{1,3\} \\ y\{1\} \\ y\{2\} \\ y\{3\} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たす任意の非負の実数の集合  $\{y_S\}_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}}$  について、

$(v(\{1,2\}), v(\{2,3\}), v(\{1,3\}), v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{3\})) \cdot (y_{\{1,2\}}, y_{\{2,3\}}, y_{\{1,3\}}, y_{\{1\}}, y_{\{2\}}, y_{\{3\}}) \leq v(N)$  のとき、そしてその時のみ



$x_1 \geq x_2 \geq x_3$  を満たすある配分  $x = (x_1, x_2, x_3) \in X_N$  が存在して、F-S コアに含まれる。

証明：付録Bを見よ。(証明終)

なお、 $x_1, x_2, x_3$  の順序が任意の場合も、定理2は適切な行と列の交換により同じ主張が成立する。以上から、非空性の条件は尽くされた。

ここで、定理2の証明の概要を述べる。まず、 $\beta > \frac{2}{3}$  のときを考える。このときは、定理1は事実上F-S コアの非空性の判定条件を与えていた。すなわち、 $\frac{v(N)}{3} \geq \frac{v(S)}{|S|}$  が任意の  $S \subset N$  について成立するとき、平等配分が含まれるのでF-S コアは非空だが、それ以外のときは平等配分もそれ以外の配分もF-S コアには含まれないことがわかる。

$\beta \leq \frac{2}{3}$  のときについては、証明はやや複雑である。その方法は、以下のようにになっている。定理1で得た不等式を制約条件とし、3次元ユークリッド空間の要素の総和を最小化する線形計画問題を考える。この線形計画問題の解が全体提携の特性関数値を超えないとき、F-S コアが非空であることを示すことができる。それは、その線形計画問題の解のそれぞれの要素を適切に大きくすることによって、F-S コアに含まれる配分となるからである。

さらに、その線形計画問題の双対問題を考えることによって、所与の  $\alpha, \beta$  の下でF-S コアが非空でない条件を与えることができる。

この定理から次の定理が得られる。それは、人々がより嫉妬深くなると、非空性の条件は厳しくなることを示している。

**定理3.** 任意の  $\alpha$  について、 $(\alpha, \beta)$  でのF-S コアが空であるとき、任意の  $\alpha' > \alpha$  について、 $(\alpha', \beta)$  でのF-S コアは空である。

証明：付録Cを見よ。(証明終)

この定理によって、人々がより嫉妬深くなるとコアが存在しなくなり、より効率的な配分を実現することができなくなるといえる。このことは、以下のように説明できる。まず、一人提携による逸脱を考えると、 $\alpha$  の増加に対して、逸脱後の配分の効用は何ら影響を受けないが、逸脱前の配分の効用は小さくなり得る。よって、一人提携による逸脱は起こりやすくなる。二人提携に関しては、逸脱前の配分と逸脱後の配分の両方の効用に対し、 $\alpha$  は作用し効用を減少させる。しかし、逸脱前の効用に対する  $\alpha$  の増加の効果と逸脱後の配分の効用に対する効果とでは前者の方が大きく、なお逸脱後の配分は逸脱前の配分を支配する。三人提携による逸脱に関しては、 $\alpha$  に依存しないことが、定理1の証明より分かる。この三つのケースを合わせて考えることで、定理3の結果が説明できる。

一方で、 $\beta$  の増加に合わせて、F-S コアの非空性の条件が厳しくなるか緩くなるかは確定されなかった。実際、III節での具体例からも、 $\beta$  の増加に伴うコアの挙動は単純ではないことがわかる。この  $\alpha$  と  $\beta$  の非対称性はどこから来るものであろうか？ 我々の答えは、 $\alpha$  と  $\beta$  は非対称に見えてそうではない、ということである。つまり、 $\beta$  の単調性は  $\alpha \in [-1, 0]$  のときには示されるのである。すなわち、外生変数に対する制約条件によって、見かけ上非対称に見える、ということである。

#### IV 結論

この論文では、Fehr-Schmidt 型効用関数を用いた 3 人協力ゲームを用いて、不公平回避性を持つ人々が効率性を達成する条件についての分析を行った。Fehr-Schmidt 型効用関数では、不公平回避性が表現されており、F-S コアはプレイヤーが不公平回避的であるときの実行可能配分と解釈できる。この論文の一つの貢献は、この 3 人のケースにおいて F-S コアを特徴づけたことである。このことによって、ある配分がコアに含まれているか否かについて判定することができるようになった。そして、その判定法を用いて具体例をいくつか与えた。

さらに、この論文では別の貢献もあった。その貢献は、F-S コアの非空性の条件を記述したことである。この非空性の条件は、特性関数と不公平回避性の程度を表す二つのパラメータによってのみ記述されており、与えられたゲームに対しある不公平回避度を持つ集団が効率性を実現できるか否かの判定法を得たことになった。

また、この判定法を用いることで、人々がより嫉妬深くなると、F-S コアは空となって効率性を実現することが難しくなることが分かった。

#### 謝辞

指導教員 関口教授. Institute of Economic Research Kyoto University, Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japan; E-mail : sekiguchi@kier.kyoto-u.ac.jp

#### 参考文献

- Arin, J., Kuipers, J., Vermeulen, D., 2008. An axiomatic approach to egalitarianism in TU-games. *Int. J. Game Theory* 37, 565-580.
- Arin J, Inarra E. 2001. Egalitarian solutions in the core. *Int. J. Game Theory* 30 (2): 187-193.
- Bhattacharya, A. 2004. On the equal division core, *Social Choice Welfare* 22 (1): 391-399.
- Bolton, Gary E., and Axel Ockenfels. 2000. ERC: A Theory of Equity, Reciprocity, and Competition, *American Economic Review* 100, 166-193.
- van den Brink, R., Funaki, Y., Ju, Y., 2013. Reconciling marginalism with egalitarianism: Consistency, monotonicity, and implementation of egalitarian Shapley values. *Social Choice and Welfare* 40, 693-714.
- Dutta, B., Ray, D., 1989. A concept of egalitarianism under participation constraints. *Econometrica*, 57, 615-635.
- Fehr, Ernst, and Klaus M. Schmidt. 1999. A Theory of Fairness, Competition, and Cooperation. *Quarterly Journal of Economics* 114 (3): 817-68.
- Hyden, G. 1983. No shortcuts to Progress: African Development Management in Perspective. London: Heineman.
- Hyden, G., Tsuruta, T., Kuroda, M. 2007. The Economy of Affection and the Moral Economy in Comparative Perspective. *Journal of African Studies* 70, 35-50.
- Loewenstein, George, Max Bazerman and Leigh Thompson. 1989 Social Utility and Decision Making in Interpersonal Contexts. *Journal of Personality and Social Psychology*, 57, 426-441.
- Ogawa, S. 2006. Earning among Friends: Business Practices and Creeds among Petty Traders in Tanzania. *African Studies Quarterly* 9-1 & 2.
- Scott, J. C. 1976. *The Moral Economy of the Peasant: Rebellion and Subsistence in Southeast Asia*. New Haven, Yale University Press.
- Tversky, A., and D. Kahneman 1991. Loss Aversion in Riskless Choice: A Reference-Dependent Model. *Quarterly Journal of Economics*, CVI, 1039-1062.

## 付録 A

ここでは、三つの補題を用いて、定理1を証明する。

**補題1.**  $\beta > \frac{2}{3}$  とする。任意の  $x \in X_N$  について、 $\frac{v(N)}{3} \geq \frac{v(S)}{|S|}$  が任意の  $S \subset N$  について成り立つとき、F-S コアは平等配分  $\left(\frac{v(N)}{3}, \frac{v(N)}{3}, \frac{v(N)}{3}\right)$  のみ含み、それ以外ときはF-S コアは空となる。

証明：まず、F-S コアは平等配分以外の配分を含まないことを示す。一般性を失わずに  $x_1 \geq x_2 \geq x_3$  とし、ある  $i \in N$  が存在して、 $x_i \neq \frac{v(N)}{3}$  とする。このとき、ある  $k \in \{1, 2\}$  が存在して、 $x_1 = x_k > x_{k+1} \geq x_3$  を満たす。1 から  $k$  までのプレイヤーの効用は

$$x_k - \frac{\beta}{n-1} \sum_{i=k+1}^3 (x_k - x_i) = \left(1 - \frac{3-k}{2}\beta\right)x_k + \frac{\beta}{2} \sum_{i=k+1}^3 x_i$$

となる。 $y = (y_1, y_2, y_3)$  を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} y_i &= x_i - \epsilon \text{ for all } i \in \{1, k\} \\ y_i &= x_i + \frac{k}{3-k}\epsilon \text{ for all } i \in N \setminus \{1, k\}, \end{aligned}$$

但し、 $\epsilon \in \left(0, \frac{3-k}{3}(x_k - x_{k+1})\right)$  とする。この時  $y$  と  $\epsilon$  の定義から明らかに、 $y \in X_N$  であり、 $y_1 = y_k > y_{k+1} \geq y_3$  を満たす。 $y$  における1 から  $k$  までのプレイヤーの効用は

$$\begin{aligned} y_k - \frac{\beta}{2} \sum_{i=k+1}^3 (y_k - y_i) &= \left(1 - \frac{3-k}{2}\beta\right)y_k + \frac{\beta}{2} \sum_{i=k+1}^3 y_i \\ &= \left(1 - \frac{3-k}{2}\beta\right)(x_k - \epsilon) + \frac{\beta}{2} \sum_{i=k+1}^3 \left(x_i + \frac{k}{3-k}\epsilon\right) \\ &= u_{i_k}^F(x, N) + \left(\frac{3}{2}\beta - 1\right)\epsilon > u_{i_k}^F(x, N). \end{aligned}$$

最後の不等式は  $\beta > \frac{2}{3}$  からきている。

$y$  の下での  $k+1$  から  $3$  までのプレイヤーの効用は明らかに  $x$  の効用よりも大きいので、 $y$  は  $x$  を  $N$  を通して支配する。

次に、 $\frac{v(N)}{3} \geq \frac{v(S)}{|S|}$  のとき、F-S コアが平等配分を含むことを示す。F-S 効用関数の定義から、任意の  $S \subset N$  と任意の  $y \in X_S$  について、ある  $i \in S$  が存在して、

$$\frac{v(N)}{3} \geq \frac{v(S)}{|S|} \geq y_i \geq u_i^F(y, S)$$

となる。これは、 $\sum_{i \in S} y_i = v(S)$  であることによる。よって、F-S コアは平等配分を含む。一方で、 $\frac{v(N)}{3} < \frac{v(S)}{|S|}$  であるとき、 $S$  の平等配分が明らかに  $x$  を支配するので、F-S コアは空となる。(証明終)

**補題2.**  $\beta \leq \frac{2}{3}$  とする。任意の  $x \in X_N$  について、 $x$  を支配する  $y \in X_N$  は存在しない。

証明： $x$  を支配する  $y \in X_N$  が存在するとすると、任意の  $i \in S$  について  $u_i^F(y, N) > u_i^F(x, N)$  を満たす。一般性を失うことなく、 $x_1 \geq x_2 \geq x_3$  とする。このとき、ある  $i, j \in N (i < j)$  について  $y_i < y_j$  とすると、

$$u_i^F(y, S) > u_i^F(y, S) > u_i^F(x, N) \geq u_i^F(x, N)$$

となるので,  $y_i \geq y_j$  としても一般性を失わない。よって, 一般性を失わずに,  $y_1 \geq y_2 \geq y_3$  とできる。  
 $i=1$  のとき,

$$\begin{aligned} u^f(y, N) &> u^f(x, N) \\ \Leftrightarrow y_1 - \frac{\beta}{2} \left( 2y_1 - \sum_{i=2}^3 y_i \right) &> x_1 - \frac{\beta}{2} \left( 2x_1 - \sum_{i=2}^3 x_i \right) \\ \Leftrightarrow \left( 1 - \frac{3\beta}{2} \right) y_1 + \frac{\beta}{2} v(N) &> \left( 1 - \frac{3\beta}{2} \right) x_1 + \frac{\beta}{2} v(N). \end{aligned}$$

よって, もし  $\beta = \frac{2}{3}$  ならば,  $y$  は  $x$  を支配しない。もし,  $\beta < \frac{2}{3}$  ならば,  $y_1 > x_1$  となる。このとき,  $u_2(y, N) > u_2(x, N)$  から,

$$\begin{aligned} u_2^f(y, N) &> u_2^f(x, N) \\ \Leftrightarrow y_2 - \frac{\alpha}{2} (y_1 - y_2) - \frac{\beta}{2} (y_2 - y_3) &> x_2 - \frac{\alpha}{2} (x_1 - x_2) - \frac{\beta}{2} (x_2 - x_3) \\ \Leftrightarrow \left( 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) y_2 - \frac{\alpha}{2} y_1 + \frac{\beta}{2} y_3 &> \left( 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) x_2 - \frac{\alpha}{2} x_1 + \frac{\beta}{2} x_3 \\ \Leftrightarrow \left( 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) y_2 - \frac{\alpha}{2} y_1 + \frac{\beta}{2} (v(N) - y_1 - y_2) &> \left( 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) x_2 - \frac{\alpha}{2} x_1 + \frac{\beta}{2} (v(N) - x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow \left( 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) y_2 - \frac{\alpha + \beta}{2} y_1 &> \left( 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) x_2 - \frac{\alpha + \beta}{2} x_1 \end{aligned}$$

となる。よって,  $y_2 > x_2$  となり, 同様にして  $y_3 > x_3$  が示される。以上から,  $\sum_{i=1}^3 y_i > \sum_{i=1}^3 x_i$  となり, 示された。(証明終)

この補題を用いて, 以下の補題が示される。

**補題 3.**  $\beta \leq \frac{2}{3}$  とする。  $x = (x_1, x_2, x_3) \in X_N$  について,  $x$  が F-S コアに含まれることの必要十分条件は

$$\begin{cases} (1 + \alpha)u^f(x, N) + (1 - \beta)u_j^f(x, N) \geq \left( 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) v(\{i, j\}) \text{ for any } i, j \in N \text{ such that } i \neq j \text{ and } x_i \geq x_j \\ u_i^f(x, N) \geq v(\{i\}) \text{ for any } i \in N \end{cases}$$

となる。

証明: 補題 2 より, 3 人提携による逸脱は起きない。 $x \in X_N$  が一人提携  $\{i\}$  によって逸脱されない必要十分条件は

$$u^f(x, N) \geq v(\{i\})$$

となる。

任意の一人提携で逸脱されないとしたとき, 二人提携  $S = \{i, j\} \subset N$  が逸脱する必要十分条件は

$$(1 + \alpha)u^f(x, N) + (1 - \beta)u_j^f(x, N) < \left( 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) v(S)$$

となる。但し, 一般性を失わずに  $x_i \geq x_j$  とする。これを示す。 $x$  が, 二人提携  $S = \{i, j\} \subset N$  を通して, ある  $y = (y_i, y_j) \in X_S$  に支配されるとする。 $y_i < y_j$  とすると, 明らかに

$$u^f(y, S) > u^f(y, S) > u^f(x, N) \geq u^f(x, N)$$

となるので、 $y_i \geq y_j$ としても一般性を失わない。この条件の下で、ある  $y \in X_S$  が  $x$  を支配するとき、

$$\begin{cases} u_i^f(y, S) > u_i^f(x, N) \\ u_j^f(y, S) > u_j^f(x, N) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)y_i + \frac{\beta}{2}y_j > u_i^f(x, N) \\ -\frac{\alpha}{2}y_i + \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)y_j > u_j^f(x, N) \end{cases}$$

となる。配分の定義より、 $y_i + y_j = v(S)$  であるので、

$$\frac{u_j^f(x, N) + \frac{\alpha}{2}v(S)}{1 + \alpha} < y_j < \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)v(S) - u_i^f(x, N)}{1 - \beta}$$

なる  $y_j \in \left[0, \frac{v(S)}{2}\right]$  が存在することが必要十分条件となる。よって、求める条件は

$$\begin{cases} 0 < \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)v(S) - u_i^f(x, N)}{1 - \beta} \\ \frac{u_j^f(x, N) + \frac{\alpha}{2}v(S)}{1 + \alpha} < \frac{v(S)}{2} \\ \frac{u_j^f(x, N) + \frac{\alpha}{2}v(S)}{1 + \alpha} < \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)v(S) - u_i^f(x, N)}{1 - \beta} \end{cases}$$

ここで、3番目の式が満たされるとき、一人提携による逸脱はないので、 $0 \leq v(\{j\}) \leq u_j^f(x, N)$  が満たされる。よって、

$$0 \leq \frac{u_j^f(x, N) + \frac{\alpha}{2}v(S)}{1 + \alpha} < \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)v(S) - u_i^f(x, N)}{1 - \beta}$$

であるので、1番目の不等式は成立する。また、

$$\frac{u_j^f(x, N) + \frac{\alpha}{2}v(S)}{1 + \alpha} < \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)v(S) - u_i^f(x, N)}{1 - \beta} \leq \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)v(S) - u_j^f(x, N)}{1 - \beta}$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{u_j^f(x, N) + \frac{\alpha}{2}v(S)}{1 + \alpha} &< \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)v(S) - u_j^f(x, N)}{1 - \beta} \\ \Leftrightarrow u_j^f(x, N) &< \frac{v(S)}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{u_j^f(x, N) + \frac{\alpha}{2}v(S)}{1 + \alpha} &< \frac{v(S)}{2} \end{aligned}$$

となり, 2 番目の不等式も成立する。3 番目の不等式を変形することで,

$$(1+\alpha)u^f(x,N)+(1-\beta)u^f(x,N)<\left(1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)v(S)$$

を得る。以上から, 示された。(証明終)

以上三つの補題から, 定理 1 が証明できた。

## 付録 B

ここでは、三つの補題を用いて、定理2を証明する。

補題4.  $\beta > \frac{2}{3}$  とする。このとき、任意の  $S \subset N$  について、 $\frac{v(N)}{3} \geq \frac{v(S)}{|S|}$  が成立するとき、そしてその時のみ、

F-S コアは非空となる。

証明：定理1から明らか。(証明終)

補題5.  $\beta \leq \frac{2}{3}$  とする。以下の最適化問題を考える。

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^3 x_i \\ \text{subject to} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1+\alpha/2)-\beta(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \beta \\ -\alpha & \frac{(1-\beta/2)+(1+\alpha/2)\alpha}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1+\alpha)(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} \\ \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{\alpha\beta-(\alpha-\beta)/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1+\alpha)(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} \\ 1-\beta & \beta/2 & \beta/2 \\ -\alpha/2 & 1+(\alpha-\beta)/2 & \beta/2 \\ -\alpha/2 & -\alpha/2 & 1+\alpha \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} v(\{1,2\}) \\ v(\{2,3\}) \\ v(\{1,3\}) \\ v(\{1\}) \\ v(\{2\}) \\ v(\{3\}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この問題の最適値  $x^*$  が  $\sum_{i=1}^3 x_i^* \leq v(N)$  を満たすとき、そしてその時のみ  $x_1 \geq x_2 \geq x_3$  を満たすある配分  $x = (x_1, x_2, x_3) \in X_N$  が存在して、 $x$  はF-S コアに含まれる。

証明：まず、

$$\begin{pmatrix} \frac{(1+\alpha)u_1^F(x,N)+(1-\beta)u_2^F(x,N)}{1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}} \\ \frac{(1+\alpha)u_2^F(x,N)+(1-\beta)u_3^F(x,N)}{1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}} \\ \frac{(1+\alpha)u_1^F(x,N)+(1-\beta)u_3^F(x,N)}{1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}} \\ u_1^F(x,N) \\ u_2^F(x,N) \\ u_3^F(x,N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1+\alpha/2)-\beta(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \beta \\ -\alpha & \frac{(1-\beta/2)+(1+\alpha/2)\alpha}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1+\alpha)(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} \\ \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{\alpha\beta-(\alpha-\beta)/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1+\alpha)(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} \\ 1-\beta & \beta/2 & \beta/2 \\ -\alpha/2 & 1+(\alpha-\beta)/2 & \beta/2 \\ -\alpha/2 & -\alpha/2 & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

であることに注意する。

(⇒) 定理1より、 $\sum_{i=1}^3 x_i^* < v(N)$  の時のみ、示せば十分。このとき、 $\epsilon = v(N) - \sum_{i=1}^3 x_i^*$  とし、 $x = (x_1, x_2, x_3)$  をそれぞれの  $i=1,2,3$  について、 $x_i = x_i^* + \epsilon/3$  によって定義すると、 $x \in X_N$  となるので十分。

(⇐) F-S コアに含まれる  $x$  が制約条件を満たし、 $\sum_{i=1}^3 x_i = v(N)$  となるので、 $\sum_{i=1}^3 x_i^* \leq \sum_{i=1}^3 x_i = v(N)$  となって示された。(証明終)

この補題を用いて、以下の補題が導かれる。

補題6.  $\beta \leq \frac{2}{3}$  とする。

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & -\alpha & \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta & -\alpha/2 & -\alpha/2 \\ \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta/2 & 1-\beta/2 & -\alpha \\ 2-\beta & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\{1,2\} \\ y\{2,3\} \\ y\{1,3\} \\ y\{1\} \\ y\{2\} \\ y\{3\} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たす任意の非負の実数の集合  $\{y_s\}_{s \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}}$  について、

$(v(\{1,2\}), v(\{2,3\}), v(\{1,3\}), v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{3\})) \cdot (y_{\{1,2\}}, y_{\{2,3\}}, y_{\{1,3\}}, y_{\{1\}}, y_{\{2\}}, y_{\{3\}}) \leq v(N)$  のとき、そしてその時のみ  $x_1 \geq x_2 \geq x_3$  を満たすある配分  $x = (x_1, x_2, x_3) \in X_N$  が存在して、F-S コアに含まれる。

証明：補題 5 の最適化問題の双対問題の制約条件は、

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & -\alpha & \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta & -\alpha/2 & -\alpha/2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(1+\alpha/2)-\beta(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1-\beta/2)+(1+\alpha/2)\alpha}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{\alpha\beta-(\alpha-\beta)/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \beta/2 & 1+(\alpha-\beta)/2 & -\alpha/2 & -1 & 1 & 0 \\ \beta & \frac{(1+\alpha)(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1+\alpha)(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \beta/2 & \beta/2 & 1+\alpha & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\{1,2\} \\ y\{2,3\} \\ y\{1,3\} \\ y\{1\} \\ y\{2\} \\ y\{3\} \\ y_1 \geq 2 \\ y_2 \geq 3 \\ y_3 \geq 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。但し、 $y_{\{1,2\}}, y_{\{2,3\}}, y_{\{1,3\}}, y_{\{1\}}, y_{\{2\}}, y_{\{3\}}, y_1 \geq 2, y_2 \geq 3, y_3 \geq 0$  はすべて非負である。また、目的関数は  $(v(\{1,2\}), v(\{2,3\}), v(\{1,3\}), v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{3\})) \cdot (y_{\{1,2\}}, y_{\{2,3\}}, y_{\{1,3\}}, y_{\{1\}}, y_{\{2\}}, y_{\{3\}})$  であるので、 $y_1 \geq 2, y_2 \geq 3, y_3 \geq 0$  には依存しない。ここで、

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & -\alpha & \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta & -\alpha/2 & -\alpha/2 \\ \frac{(1+\alpha/2)-\beta(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1-\beta/2)+(1+\alpha/2)\alpha}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{\alpha\beta-(\alpha-\beta)/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \beta/2 & 1+(\alpha-\beta)/2 & -\alpha/2 \\ \beta & \frac{(1+\alpha)(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{(1+\alpha)(1-\beta/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & \beta/2 & \beta/2 & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\{1,2\} \\ y\{2,3\} \\ y\{1,3\} \\ y\{1\} \\ y\{2\} \\ y\{3\} \end{pmatrix}$$

とすると、制約条件は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \geq 2 \\ y_2 \geq 3 \\ y_3 \geq 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z_1 \\ 1-z_2 \\ 1-z_3 \end{pmatrix}$$

と書け、さらに、 $y_1 \geq 2, y_2 \geq 3, y_3 \geq 0$  がすべて非負であるから、



$$\begin{pmatrix} y_{1 \geq 2} \\ y_{2 \geq 3} \\ y_{3 \geq 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - z_1 \\ 1 - z_2 \\ 1 - z_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 + z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & -\alpha & \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta & -\alpha/2 & -\alpha/2 \\ 2-\beta & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta/2 & 1-\beta/2 & -\alpha \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\{1,2\}} \\ y_{\{2,3\}} \\ y_{\{1,3\}} \\ y_{\{1\}} \\ y_{\{2\}} \\ y_{\{3\}} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、補題5と双対定理より示された。(証明終)

最後に、 $x_1, x_2, x_3$  の順序が任意の場合を考える。この時、補題5、補題6は適切な行と列の交換により同じ主張が成立する。例えば、 $x_2 \geq x_1 \geq x_3$  のとき、補題5の行列の1列目と2列目、2行目と3行目、4行目と5行目を交換することで成立する。この時、補題6も行列を2列目と3列目、4列目と5列目を交換することで成立することを同じように証明できる。なお、 $x_1 \geq x_2 \geq x_3$  のケースと集合  $\{y_s\}_{s \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}}$  は一致する。それは、補題5の行列が列の交換に対しては  $y_s$  の適切な交換によって式が成立するためである。

## 付録 C

ここでは、定理 3 を証明する。

$(\alpha, \beta)$  での F-S コアが空であるので、 $x_1 \geq x_2 \geq x_3$  を満たす  $(x_1, x_2, x_3) \in X_N$  は F-S コアに含まれない。よって、定理 2 より、

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & -\alpha & \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta & -\alpha/2 & -\alpha/2 \\ 2-\beta & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} & 1-\beta/2 & 1-\beta/2 & -\alpha \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\{1,2\} \\ y\{2,3\} \\ y\{1,3\} \\ y\{1\} \\ y\{2\} \\ y\{3\} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすある  $(y_{\{1,2\}}, y_{\{2,3\}}, y_{\{1,3\}}, y_{\{1\}}, y_{\{2\}}, y_{\{3\}}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^6$  が存在して、

$(v(\{1,2\}), v(\{2,3\}), v(\{1,3\}), v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{3\})) \cdot t(y_{\{1,2\}}, y_{\{2,3\}}, y_{\{1,3\}}, y_{\{1\}}, y_{\{2\}}, y_{\{3\}}) > v(N)$  となる。よって、

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha'/2)}{1+(\alpha'-\beta)/2} & -\alpha' & \frac{(1-\beta)(1+\alpha'/2)}{1+(\alpha'-\beta)/2} & 1-\beta & -\alpha'/2 & -\alpha'/2 \\ 2-\beta & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha'-\beta)/2} & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha'-\beta)/2} & 1-\beta/2 & 1-\beta/2 & -\alpha' \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\{1,2\} \\ y\{2,3\} \\ y\{1,3\} \\ y\{1\} \\ y\{2\} \\ y\{3\} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を示せば十分である。ここで、行列の第 (1,1), (1,3) 要素、 $\frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2}$  は  $\alpha$  に対する非増加関数である。実際、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{(1-\beta)(1+\alpha/2)}{1+(\alpha-\beta)/2} &= \frac{(1+(\alpha-\beta)/2)(1-\beta)/2 - (1-\beta)(1+\alpha/2)/2}{(1+(\alpha-\beta)/2)^2} \\ &= \frac{-\beta(1-\beta)/4}{(1+(\alpha-\beta)/2)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

となる。同様に、第 (2,2), (2,3) 要素、 $\frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2}$  も  $\alpha$  に対する非増加関数である。実際、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha-\beta)/2} &= \frac{\beta(1+(\alpha-\beta)/2) - (1-\beta/2+\alpha\beta/2)}{(1+(\alpha-\beta)/2)^2} \\ &= \frac{-(1-\beta)(2-\beta)/4}{(1+(\alpha-\beta)/2)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

となる。なお、 $\beta \in [0,1]$  を用いている。それ以外の行列の要素は明らかにすべて  $\alpha$  に対する非増加関数なので、

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\beta)(1+\alpha'/2)}{1+(\alpha'-\beta)/2} & -\alpha' & \frac{(1-\beta)(1+\alpha'/2)}{1+(\alpha'-\beta)/2} & 1-\beta & -\alpha'/2 & -\alpha'/2 \\ 2-\beta & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha'-\beta)/2} & \frac{1-\beta/2+\alpha\beta/2}{1+(\alpha'-\beta)/2} & 1-\beta/2 & 1-\beta/2 & -\alpha' \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\{1,2\} \\ y\{2,3\} \\ y\{1,3\} \\ y\{1\} \\ y\{2\} \\ y\{3\} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる。 $x_1, x_2, x_3$  の順序が  $x_1 \geq x_2 \geq x_3$  でない場合でも, 定理 2 は行列の列を適当に交換することで成り立つので, 示された。