「算学玄訓」における関孝和の行列式

The Determinant of SEKI Takakazu in the "Sangaku-genkunn"

お茶の水女子大学　真島　秀行
MAJIMA, Hideyuki,　Ochanomizu University

Abstract

SEKI Takakazu s a Japanese mathematician in an early period of the Edo era, known as the first person to study the so-called "resultant" and "determinant" in the world. These works are found in the "Kai-hukudai-no-hou" and the "Taisei-sankei". Recently, we found different versions of the "Kai-hukudai-no-ho", called the "Sangaku-genkun". From those documents, we can follow the process of his discovery of "determinant".

０．関孝和の行列式についての研究のねらい

未知数が二つ以上の問題を解く際に，いくつかの方程式から未知数をできるだけ消去して一つの未知数の方程式に帰着させる．その扱いは，今日，**終結式，行列式の理論**として知られる．

関孝和は澤口一之著『古今算法記』の遺題 15 問に解答するため，数式筆算記号法（傍書法）を導入し，解法の式を紙に記述できるにし，各問毎に未知数をどうおいてどのような式が得られるか，どうやって未知数を消去して解を得るか，解法を得た．しかし，解答を略述した刊本『発微算法』（跋は延宝二歳在甲寅十二月幾望（14 日），延宝２年は大体西暦 1674 年だが，1675 年 1 月 9 日に相当する）では，各問に対して，どのような方程式を作り，どのように消去するか，普通の文章でしか記述していない．関の方法の解説として，『発微算法演段諺解』（建部賢弘著）があり，一般的な消去法の理論が「解伏題之法」（天和３年重訂）と「大成算経巻之十七」中の「全題解」の中の「伏題篇」にある．2012 年 5 月 27 日にあった日本科学史学会年会（於三重大学）において佐藤賢一氏は，江戸時代の「書肆，天王寺屋市郎兵衛の出版広告に関孝和の著作として『算学玄訓』が挙げられているが，これまでその実体は不明であった．京大所蔵本『算学袖中鈔』下，名古屋の北川孟虎本所蔵本の両書に『算学玄訓』と称する『解伏題之法』の異本があることが判明．そこで『解伏題之法』に関しては，江戸→中根／江戸→名古屋→北川といった，複数の伝承経路が予測される．」（佐藤賢一氏の当日配付発表資料より引用）と発表し，「算学玄訓」にも「解伏題之法」と同じような解説があることがわかっている．

関孝和が消去の結果として，今日「行列式」に相当する式を導いているが，その計算過程は，それらの文献によって違いがあり，それを比較検討する．その結果として，次のような疑問に答えることできると考えている．

（１）附録に記すように成立年代からすると「解伏題之法」（重訂）は「大成算経」巻十七の全題解の伏題篇の原稿段階とも思われる．「解伏題之法」（重訂）に書かれている方法と「大成算経」に書かれている方法を比較して,「行列式」に相当する式を導く計算の纏め方がどう変遷したのか.

（２）「解伏題之法」（初稿）がどうであったか.

この小論ではその鍵となる計算などを紹介するに留め，詳細は他の論文に書くことにする．

１．伏題にある終結式・行列式について

「大成算経」巻十七の全題解の伏題篇にある行列式は「解伏題之法」（重訂）とは異なる表現を与えているが，本質的に同じ式の違う表現である．「大成算経」巻十七の「（現在の記号法では）第一行に関する展開式」が採用されているが，「解伏題之法」（重訂）では，「逐式交乗」と「交式斜乗」の方法で書かれている．

内容を見ると，「解伏題之法」（重訂）は次の六節からなる．

- **真虚第一**（真の未知数の方程式を立てるため補助未知数を導入し方程式を作る方法例示）
- **両式第二**（前式と後式を作る方法の例示）
- **定乗第三**（消去後の式の次数の決定の方法例示）
- **換式第四**（前式，後式から補助未知数を消す前段階の連立方程式を導出する方法の例示）
- **生尅第五**（導出した連立方程式から補助未知数を消去した方程式を導くため，今日の用語でいえば，行列式に相当する式を導入する方法の一般論）
- **寄消第六**（正符号の項を左辺に負符号の項を右辺として最終的な方程式を得る方法例示）

一方，「大成算経」巻十七　全題解の伏題篇も六節からなるが，「大成算経」では目次題目としては，虚術第一，交乗第五，他は同じとなっており，「解伏題之法」（重訂）と本質的に異なるのは第五節のみである．

両者の大きな違いである**第五節で，「行列式」に相当する式を導いている．**

- 「解伏題之法」（重訂）では，「逐式交乗」の表と，「交式と斜乗」の図がある．
- **「大成算経巻之十七」では，交乗第五で，帰納的に項を導き出す方法を述べて正符号の項と負符号の項を分けてすべてを書き出している．**

しかし，両者共通の換式第四で見せている高次項から消去する方法から推察すると，「大成算経巻之十七」の交乗第五で，帰納的に項を導き出す方法を「解伏題之法」を書いた段階でも知っていたと考えられる．

例えば２つの３次式から３つの２次式を得る方法は次々に元の式から３次，２次，１次項を消去した式を次々に用いている．

$d_0 + d_1 y + d_2 y^2 + d_3 y^3 = 0 \cdots$前式

$e_0 + e_1 y + e_2 y^2 + e_3 y^3 = 0 \cdots$後式

の二式から3次項を消去した3つの2次式を得るのに次のようにする．

前式$\times e_3 -$後式$\times d_3$を考えると3次項が消去され次の第一式を得る:

$(d_0 e_3 - e_0 d_3) + (d_1 e_3 - e_1 d_3) y + (d_2 e_3 - e_2 d_3) y^2 = 0 \cdots$①

前式$\times e_2 -$後式$\times d_2 +$①$\times y$を考えると3次項が消去され次の第二式を得る:

$(d_0 e_2 - e_0 d_2) + \{(d_1 e_2 - e_1 d_2) + (d_0 e_3 - e_0 d_3)\} y + (d_1 e_3 - e_1 d_3) y^2 = 0 \cdots$②

前式$\times e_1 -$後式$\times d_1 +$②$\times y$を考えると3次項が消去され次の第三式を得る:

$(d_0 e_1 - e_0 d_1) + (d_0 e_2 - e_0 d_2) y + (d_0 e_3 - e_0 d_3) y^2 = 0 \cdots$③

（なお，この連立方程式①②③の係数行列は３次対称行列であることに注意せよ．）

この消去法を知っていたことからすると，３つの２次式から２次項，１次項を消去するのに，

以下に解説する，**<u>“自然で上手な消去法”に関孝和は気付いていた，あるいは，知っていた</u>**<u>と考えられる．</u>**<u>関孝和はその過程を書いてはいないが換式第四における組織的で次に現れる係数がうまく相殺するような計算方法はそれを示唆していると考えられる</u>．**

$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 = 0 \cdots ①$

$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 = 0 \cdots ②$

$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 = 0 \cdots ③$

まず②を前式，③を後式とみて2次項，1次項を消去した式を得る：

$② \times c_2 - ③ \times b_2 : (b_0 c_2 - c_0 b_2) + (b_1 c_2 - c_1 b_2) y = 0 \cdots ④$

$② \times c_1 - ③ \times b_1 : (b_0 c_1 - c_0 b_1) + (b_2 c_1 - c_2 b_1) y^2 = 0 \cdots ⑤$

このとき2次項の係数と1次項の係数が符号が逆で絶対値が同じであることに注意して，$① \times (b_1 c_2 - c_1 b_2) - a_1 \times ④ + a_2 \times ⑤$より

$a_0 (b_1 c_2 - c_1 b_2) - a_1 (b_0 c_2 - c_0 b_2) + a_2 (b_0 c_1 - c_0 b_1) = 0$

を得る．これは$① \times (b_1 c_2 - c_1 b_2) - a_1 (② \times c_2 - ③ \times b_2) + a_2 (② \times c_1 - ③ \times b_1)$だから

$① \times (b_1 c_2 - b_2 c_1) - ② \times (a_1 c_2 - a_2 c_1) + ③ \times (a_1 b_2 - a_2 b_1)$

と同じで

$a_0 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_0 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_0 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$

すなわち，例えば**2次式①，②，③の3式から一つの変数を消去した式を導出するには，②と③から2次項を消した式と1次項を消した式を得て，そのとき④の1次項と⑤の2次項の係数が符号が逆で絶対値が同じなので，①に適切な符号にしてその係数をかけた式から引き去るという方法を知っていて3次の行列式に相当する式に現れる項を逐式交乗の表に書いた**と考えられる．『明治前　日本数学史　第二巻』206頁などに**<u>結論の式の計算の説明をしたものはあるが途中の過程を説明したものは今まではなかった</u>**と筆者は考えている．

一方，よく使われる説明として，

$① \times b_2 - ② \times a_2 : (a_0 b_2 - b_0 a_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2) y = 0 \cdots ⑥$

$① \times c_2 - ③ \times a_2 : (a_0 c_2 - c_0 a_2) + (a_1 c_2 - c_1 a_2) y = 0 \cdots ⑦$

これらから，$⑥ \times (a_1 c_2 - c_1 a_2) - ⑦ \times (a_1 b_2 - b_1 a_2)$として1次項を消去し

$(a_0 b_2 - b_0 a_2)(a_1 c_2 - c_1 a_2) - (a_0 c_2 - c_0 a_2)(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0$

を得る．これを展開すると8項あるが，$a_0 b_2 a_1 c_2 - a_0 c_2 a_1 b_2 = 0$で6項が残り

$a_2 \left\{ a_0 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_0 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_0 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \right\} = 0$

となる．

すなわち，①と②，及び①と③から2次項を消した1次式を2式導き，それらから1次項をさらに消した式を得る，という方法では，**余計な係数がかかり定乗（消去した後の式の次数）の評価が本来のものより大きくなり甘くなる**ので，その方法を関孝和は**採用しなかった**と考えられる．

井関らは上のような下手な計算式で説明をしているので“自然で上手な方法”は知らなかったと考えられる．（文献(4)では”自然で上手な方法”の紹介はしたが下手な方法は書かなかった.）

四次式の消去は三次式の消去法を仮定すれば，同様に行える（文献(5)参照）．すなわち，4 つの 3 次式①②③④から 3 次項，2 次項，1 次項を消去するには，4 つのうちの 3 つの式②③④について 3 次の場合と同様の計算法により，3 次項と 2 次項を消去し 1 次項を残した式⑤，2 次項と 1 次項を消去し 3 次項を残した式⑥，1 次項と 3 次項を消去し 2 次項を残した式⑦，を計算でき，それらに残る 3 次項，2 次項，1 次項，の係数は符合を除き絶対値は一致するので，①を使って 3 次項，2 次項，1 次項を消去できる．行列式の記号を作らず，計算の根拠となる式と結果が分かるような書き方として「解伏題之法」（重訂）の「逐式交乗」の表を書いたと考えられる．さらに，その表を眺めて，適切に組み合わせてやると 3 つの交式と 2 方向の斜乗の図により計算を示すことができることを見つけ，五次以上の場合も交式と斜乗の図で計算を示せると早合点して間違ってしまった，ということになる（文献(1)，(2) , (3)など参照のこと）．

2．「算学玄訓」について

佐藤賢一氏の発表を受けて筆者が京大所蔵の稿本「算法袖中鈔」下の後半に収録されている「関流算法解伏題玄訓」，目次を書いた後には「関自由亭先生算学玄訓　解伏題之法」と書いてある書物を京大に行って調査した（http://edb.math.kyoto-u.ac.jp/wasan/018 に公開されている）．この「算学玄訓」の**生尅第五**には**特別な 3 次対称行列の行列式が二方向の斜乗の差として表される**，というところまで書いてあり，そこまでしか書いていないことを確認した．

一方，東北大所蔵本「解伏題目（関自由亭先生算学玄訓解伏題之法」（B068-10　林文庫　2188）があり内容は「解伏題之法」（重訂）と同じでいくつか訂正・注意が付いていた．

また，東大所蔵本の「算学玄訓」，内題「自由亭関先生算学玄訓解伏題之法」（T20 /810）は「解伏題之法」（重訂）の第四までであった．

今回調査した，3 冊の「算学玄訓」に「解伏題之法」（重訂）の内容に近いことが書かれているがすべてことなり書肆天王寺屋市郎兵衛の出版広告に出版予定とされた「算学玄訓」は原稿が定まらなかったのが，出版されなかった理由の一つであろうと推察される．

3．結論

「解伏題之法」（重訂）があるからには初めの「解伏題之法」があるはずだが，その稿本の存在は確認されていなかった．2 つの未知数をもつ前式と後式という 2 式から消去法により，1 つの未知数を消去しもう 1 つの未知数に関する式，すなわち，終結式を得る問題では，「解伏題之法」（重訂）の換式第四を見ればわかるように「係数となっている対称行列の行列式」の計算さえできればよい．ところが，「解伏題之法」（重訂）では一般化した「行列式」の計算に相当することが書いている．京大所蔵の「算学玄訓」の**生尅第五では 3 次対称行列の行列式までしか書いて**いないことから推察すると，本来の目標は「対称行列の行列式」の計算で十分なのであり，この稿本が「解伏題之法」の初稿であると考えられる．

従って，「行列式」の表し方として，交式斜乗で表す考え方も初めからあったと考えられるが，換式第四の記述からすれば，上に述べたように自然で上手な方法に気が付いたとも考えられる．

関孝和は，「行列式」に相当する式を，上に説明したような**自然な方法で導いて，第一行に関す**

る展開式を得ていたが，まとめ方を工夫をし，交式と斜乗という図表で表現できるものを**グッド・アイデアとして得た**と考え，現存する「解伏題之法」（天和三年重訂）のようにまとめた，と推察する．すなわち，初稿段階では３次対称行列式までしか書けなかったが，４次行列式までは，一般的に**逐式交乗の計算表のように書けることが示せ，さらにこの表**から，正負を適切に与えれば**交式斜乗**ですべての項が一回ずつ出てくることを確認し，「**逐式交乗をを交式斜乗で代えられる**」**と述べた**と考えられる．残念ながら，５次行列式については，関孝和の「解伏題之法」（天和三年重訂）に記録された斜乗に正負の符号を付けて加えるという方法は，正しくない．このことに気付いたため，後に書かれた「大成算経巻十七」では**初めの自然な導き方で導いた結果を冗長であるがそのままに第一行に関する展開式（相当のもの）として書いた**と推測される．

附録.『大成算経』について

天和３年夏（1683 年）に，**関孝和，建部賢弘，建部賢明**の３人が相談して，それぞれの新しい結果を持ち寄って算術書**『算法大成』**を作成することにし，そのプロジェクトが始まり，元禄年間中頃に,『算法大成十二巻』としてまとまった．その後，さらに，建部賢明が一人で『**大成算経二十巻**』 とした．　建部賢明の『建部氏伝記』にはいかのように書かれている．

> **「三士相議シテ天和三年ノ夏ヨリ，賢弘其首領ト成テ，各新ニ考ヘ得ル所ノ妙旨悉ク著シ，就テ古今ノ遺法ヲ尽テ，元禄ノ中年ニ至テ編集ス．総十二巻，算法大成ト号シテ粗是ヲ書写セシニ，事務ノ繁キ吏ト成サレ，自ラ其微ヲ窮ル事得ズ．孝和モ又老年ノ上，爾歳病患ニ逼ラレテ考検熟思スル□能ハズ，是ニ於テ同十四年ノ冬ヨリ，賢明官吏ノ暇ニ躬ヲ其思ヲ精スル事一十年，広ク考ヘ詳ニ註シテ二十巻ト作シ，更ニ大成算経ト号テ，手親ラ草書シ畢レリ」**

『大成算経』の構成は，目次は以下のようである．

- **首巻**：総括
- **前集３巻**：　巻之一　五技，巻之二　雑技，巻之三　変技
- **中集１２巻**：巻之四　三要，巻之五　象法，巻之六　象法，巻之七　象法，巻之八　日用術，巻之九　日用術，巻之十　形法，巻之十一　形法，巻之十二　形率，巻之十三　求積，巻之十四　形巧，巻之十五　形巧
- **後集５巻**：巻之十六　題術辯，巻之十七　全題解，巻之十八　病題議，巻之十九　演段例，巻之二十　潜題

『大成算経』に関わった３人の経歴等の比較対照表を書いておこう（文献(6)も参照）．

関孝和が天和３年春までに挙げた多くの業績の原稿を書き，それを元にその年の夏から『算法大成』の編纂が始まった．**関孝和は当時から中間管理職で忙しく．賢弘も次第に忙しくなってきたが，元禄年間中頃の元禄９？年くらいには一旦まとめ『算法大成１２巻』とした．その修正，改訂を試みたと思われるが，関孝和が甲府藩勘定頭差添筋に就いた元禄 14 年冬からは賢明一人**

が編集に当った．宝永 5 年には関孝和も逝去し，三回忌に当る宝永 7 年には「大成算経」二十巻として一応の完成を見た．と考えている．

	関　孝和	建部賢弘	建部賢明
生誕年	1640～1645	寛文 4 年 6 月（1664）	万治 4 年 1 月 26 日（4 月寛文に改元）（ 1661）
死亡年	宝永 5 年 10 月 24 日＝1708 年 12 月 5 日	元文 4 年 7 月 20 日（1739）	正徳 6 年 2 月 20 日（6 月享保に改元）（ 1716）
死亡年齢	満 63～68 歳	満 75 歳	満 56 歳
経歴	寛文 5 年 1665 遺跡継　小十人組御番 延宝 8 年 1680 同組頭 **元禄 5 年** 1692 賄頭 **元禄 14 年** 1701 勘定頭差添筋 宝永元年 1704(幕府西の丸)納戸組頭	延宝 4 年 1676 関に入門 元禄 3 年 1690 養家へ **元禄 5 年** 1692 小十人組御番 **元禄 15 年** 1702 御納戸 (元禄 16 年 1703 養家を離れても引き続き登用) 宝永元年 1704(幕府西の丸)御広敷添番	延宝 4 年 1676 関に入門 元禄元年 1688 遺跡継 **元禄 6 年**　1693(幕府)御納戸

参考文献

(1) 後藤武史，小松彦三郎，「17 世紀日本と 18-19 世紀西洋の行列式，終結式及び判別式」，京都大学数理解析研究所講究録 1392，小松彦三郎編集，(2004)，pp117-129.

(2)小松彦三郎，「解伏題之法」山路主住本の復元と「関孝和全集」との比較」，京都大学数理解析研究所講究録 1392，小松彦三郎編集，(2004)，pp225-245.

(3)平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編:関孝和全集，大阪教育図書(1974).

(4)真島秀行，「高木貞治の書籍に関するいくつかの注意（「関孝和の行列式」含む)」，京都大学数理解析研究所講究録 1739，高瀬正仁編集，(2011)，pp21-36.

(5)真島秀行：『解伏題之法』の行列式と『大成算経』の行列式について，京都大学数理解析研究所講究録，1831，森本光生編集，(2013)，pp31-52.

(6)MAJIMA, Hideyuki：Seki Takakazu, his life and bibliography, “Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan” A Commemoration on Tercentenary, Ser. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol.39, Knonloch E., Komatsu H., Liu D.(Eds), 2013, pp 3-20.