和算における第二余弦定理
A Second Cosine Theorem in the 'Wasan'

杉本敏夫
Sugimoto Toshio

概要

In the history of mathematics in the Edo period in Japan, the Pythagorean theorem was described in the *Jugairoku* written by Imamura Tomoaki for the first time. It also contained some relations of sides that hold in the case of a general triangle. This sort of problem was considered by Murase Yoshimasa, Isomura Yoshinori, and Seki Takakazu. This article studies textual errors found in these works. In particular, we investigate Problem 27 of the *Sanpou Ketsugishou* written by lsomura and the answer for it proposed by Seki.

序

「勾股弦の定理」を最初に明示したのは今村知商の『竪亥録』とされるが，同書には一般の三角形の三辺の関係を示す「双弦弧」(図形では「山形之図」) も言及されている．この種の問題はその後，村瀬義益の『算法勿憚改』，磯村吉徳の『算法闕疑抄』を経て，関孝和に至るまで研究された．本論文はそれらの問題や答術における誤りに関する研究である．特に『算法闕疑抄』第 27 問の欠陥と関の答術について，詳細に検討する．

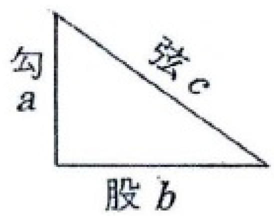
本論文の構成は以下の通りである．まず第 1 節から第 4 節に山形平に関する基礎事項をまとめた．第 5 節と第 6 節は村瀬義益による証明と面積の導入についての考察である．第 7 節と第 8 節は磯村吉徳『算法闕疑抄』第 27 問の欠陥について，その由来を考察した．第 9 節から第 12 節は関孝和による数値を訂正して答術を検討する．最後に第 13 節と第 14 節では関の答術の改訂を試みた．付録として，山形平の一覧表を掲げた．

1　勾股弦

藤原，第一巻 [1., 222-3 頁] によれば，「勾股弦の定理」(三平方の定理) を 法則として明示した のは，今村知商『竪亥録』[2., 109 頁及び 3., 50 頁] が最初である．勾股弦とは直角三角形を指すが，和算では次図のように置き，勾は直角を挟む縦線，股は横線，弦は斜

めの線を指す．このように図形を特別の配置に置き，夫々特別の名で呼ぶのは，中算以来の伝統である．その後，村瀬義益『算法勿憚改』[7.] を経て，磁村吉徳『算法闕疑抄』[4., 5., 79-82 頁] に「小頭形（おくびがた)』として取り上げられた．「勾股弦の定理」を洋算で表せば，勾 a，股 b，弦 c として，周知の 三平方の定理 の関係式を満たす．

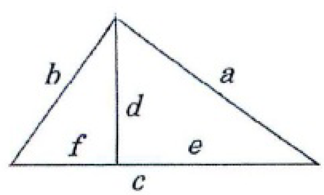
$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$



2　勾股弦の証明

西洋数学史，例えばボイヤー「数学の歴史」[8., (1), 46-9 頁] によれば，「三平方の定理」の記述は古バビロニア時代（B.C. 1900-1600 頃）に遡る．そこでは，二整数 g，h から $a = g^2 - h^2$，$b = 2gh$，$c = g^2 + h^2$ なる三整数を作ると，それら三整数が式 (1) の関係式を満たす事実を述べた．中算については省略する．

村瀬『算法勿憚改』[7.] の証明なるものは，部分図形の複雑な《切り貼り》によるものであり，ここへの再録は略す．私は，比例関係 のみを用いる証明を採る（次図)．頂角（a，



b の交）が直角なる三角形において，頂点から下辺 c に垂線 d を降し，下辺を e と f に分ける．Δcba と Δade は相似だから $a : c = e : a$，よって $a^2 = ce$．また，Δcba と Δbfd は相似だから，$b : c = f : b$，$b^2 = cf$．そこで平方の和を作れば，

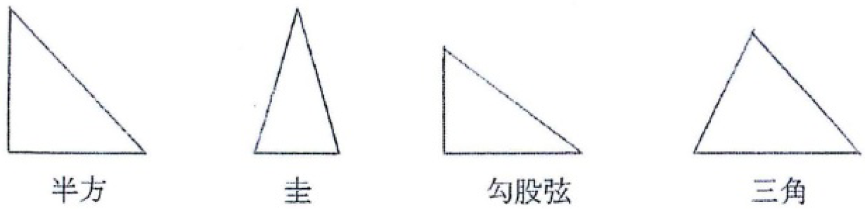
$$a^2 + b^2 = ce + cf = c(e + f) = c^2 \tag{2}$$

を得る．以上．

3　和算の図形の名称

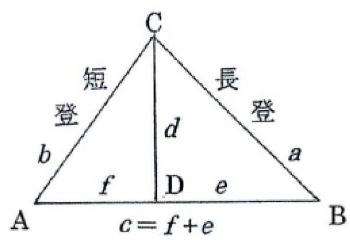
和算では，均整度の高い図形には 特別な名称 を与える．二等辺直角三角形は「方」（正方形）の半分で「半方」，二等辺三角形は宝石の形をした「圭」，直角を挟む二辺が異なる

三角形は半方（二等辺）とは異なる図形と考えて「勾股弦」，そして，各辺の長さがそれぞれ異なる（勿論，三つの角度が異なる）一般の三角形は「三角」と呼ばれる．拙著 [9.] 643-635 頁を参照.



4　山形平

勾股弦が直角三角形の三辺の関係を表す《基本定理》であるのに対して，一般三角形の三辺の関係「双弦弧」を表すのが,「山形之図」と称する図形である．和算は洋算と違い，

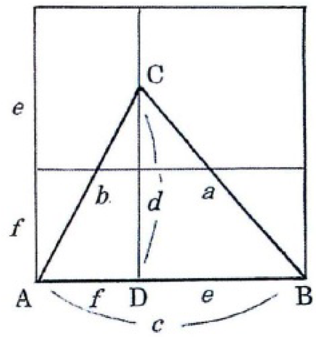


勾股弦（直角三角形）が基本図形であるから，一般三角形は《二つの勾股弦を背中合わせに繋いだ図形》として扱われた．初出は今村知商『竪亥録』[2., 116-117 頁及び 3., 55 頁] である.「山形」として [1.] 藤原 222-223 頁に紹介された．村瀬義益『算法勿憚改』巻之三 [7., 99 頁] に名前は伏せて問題があり，巻之三 [7., 140 頁] に「双弦弧」「山形欠」の名がある．磯村吉徳『算法闕疑抄』[4., 84 頁] は,「山形平」「山形之図」を提出した．さらに磯村は，遺題（宿題もしくは挑戦問題）として,「山形登」[4., 173 頁] を提出した．この勾股弦の問題に対する関孝和による解答は，[6.] 平山諦・他編：関孝和全集に再録された．第九節で詳細に検討する.「何々平」の「平」とは山間の平らかな地域を指す.「八幡平」（はちまんたい）など．当面の山形平の問題は，図形を横から見たときの登山の図に見立てて，斜辺を短登及び長登と呼んだ.

5　和算における証明

本稿の主題である「山形平」は，下図のよう短登と長登の描かれた一般三角形において，第三の与件として，(1) 下辺の右側が与えられる場合と，(2) 高さ（鈎）が与えられる場合がある．後述のように，洋算の三角法における「第二余弦定理」(後述の式 (3) に相当)

を証明することが目標となる．これを変形した「山形平」の公式 (3) の村瀬による証明を，藤原 [1., 367-8 頁] の解説によって紹介しよう．与件は長登 CB $= a$，短登 CA $= b$， 股 AB $= c$ である．正方形や矩形など図形相互の差し引きに還元する．頂点 C から股 AB への垂線 CD $= d$ の足 D によって，股 AB を AD $= f$ と DB $= e$ の二つに分け，左右の三角形にそれぞれ「勾股弦の定理」を適用する．



私たちは結果を知っているから，各長さを恰も既知であるかのように考える（上図はその立場に立つ）．しかし，厳密には，既知な長さは三辺の長さ a，b，c のみであり，他の長さは 未知 である．これら未知の長さの追求が核心である．垂足 D が求まれば，下辺 c は f と e に分けられ，股の右側 DB $= e$ も求まり，一件落着する．（西洋流の方法で，コンパスのみを用いた垂足 D の作図は可能だが，課題は，計算的に その位置を求める事を要求している．）しばらく，垂線の高さ CD $= d$ を補助変数 y とし，右股 DB $= e$ を未知数 x としよう．

$$a^2 - b^2 = (a^2 - y^2) - (b^2 - y^2) = x^2 - (c - x)^2 = 2cx - c^2,$$
$$2cx = a^2 - b^2 + c^2 \tag{3}$$

この式 (3) は，三角法では周知の「第二余弦定理」である．和算家も，西洋の三角法の問題を，ここまで追い詰めたのである．しかしながら和算家には，重要な「定理」である，という認識はなく，単なる例題の一つに過ぎなかった．

式 (3) の両辺を $2c$ で割ることによって，目標の「山形平」の公式

$$x = e = (a^2 - b^2 + c^2)/(2c) \tag{4}$$

が得られた．垂線の高さ CD $= y = d$ は，a と e から，または b と f から，

$$y^2 = a^2 - e^2 = b^2 - f^2 \tag{5}$$

を開平すればよい．

6　面積の主役登場

「三辺 a，b，c を与えて，右股 e を求める」のが「山形平」本来の設問である．しかし，これだけでは設問の多様性（variety）が不足するので，「三角形の面積」S が主役に抜擢された．村瀬 [7.] は，山形平の山 CAB の形（第 4 節）を横から見たときの 面積S を問題とした．S は下辺 c と高さ d から，

$$S = c \cdot d/2 \tag{6}$$

と，直ちに求まる．新たな設問は，式 (6) を逆にして，

「面積 S を与件とし，底辺 c から高さ $d = 2S/c$ を求めよ」

となった．和算家の 美意識 からすれば，中途半端な位置にある右股 e を考えるよりも，面積 S を考えるほうが，問題設定としては「奇麗」だった．

7　欠陥をもっ設問

磯村の『算法闕疑抄』[4., 173 頁] 第 27 問は，整数解が得られない 欠陥問題 である．私が「山形平」への興味をもったのは，この磯村の問題に取り組んだことから始まる．与件は，短登 $a = 4$，長登 $b = 5$，面積 $S = 9$ であった．便宜のため，与件の図形全体を 10 倍し，短登 $a = 40$，長登 $b = 50$，面積 $S = 900$ と仮定する．これに近い図形を探せば，付録の一覧表，図番号 26 の図は，短登 $a = 41$，長登 $b = 50$，面積 $S = 780$ で 実在する から，磯村の図形が荒唐無稽とは言えない．誤算により，与件の図のような，短登 $a = 40$，長登 $b = 50$，面積 $S = 900$ が成立すると考えたのであろう．

いま仮りに，「股の値が $c = 45$ 及び $c = 50$ を両端とする，中間の或る値であった」と仮定して，逐次計算する．先ず

c	h	u	v	$u+v$	S
45	40	0	30	30	900
50	36	17.435	34.698	15.134	900

を求める．c の両端を狭めれば，

c	h	u	v	$u+v$	S
48	37.5	13.919	33.072	46.991	900
49	36.734	15.829	33.920	49.749	899.98

さらに c の両端を狭めれば，

c	h	u	v	$u+v$	S
48.5	37.113	14.196	33.505	48.425	899.99
48.6	37.037	15.108	33.895	48.698	900

さらに続きとして

c	h	u	v	$u+v$	S
48.54	37.083	14.995	33.539	48.534	900
48.55	37.075	15.014	33.547	48.562	900

を得る．これを続けても近似解しか得られず，和算家が好む 整数解 からは程遠い．恐らく出題者に，何らかの 錯誤 があったのだろう．

8　錯誤の由来

前問は $b/a = 50/40 = 1.25$ の場合である．磯村 [4.] の 錯誤 はどこから来たのか？巻末の付表 の中から，これに近い長登と短登を持つ例題を探そう．

No.1 は，$a = 15$，$b = 20$，面積 $S = 150$ である．数値を 2.5 倍して，短登 $a = 37.5$，長登 $b = 50$，面積 $S = 937.5$ を考える．磯村は検算を怠り，観念的に，設問の短登 $a = 40$，長登 $b = 50$，面積 $S = 900$ と考えたか．または，No.11 の $a = 25$，$b = 30$，面積 $S = 300$ の全体を 1.6 倍すれば，短登 $a = 40$，長登 $b = 48$，面積 $S = 768$ となる．いずれにせよ磯村の問題は，十分な吟味を略した 観念的な出題 であり，検算をしたとは，到底思われない．第 11 節を参照.

9　関の「答術」の誤植

具体的な設問は，磯村吉徳が 1659 年に [4.]，[5.]『算法闕疑抄』に遺題として提出し，関孝和が『闕疑抄答術』に回答を与えた．しかし，[6.]『関孝和全集』の編者が設問・解答の十分な吟味をしなかったため，小林龍彦氏が論文 [10.] で詳細な検討を行った．筆者は小林氏の検討に敬意を払うとともに，多少の異見をもつので，私自身の考察を述べる．

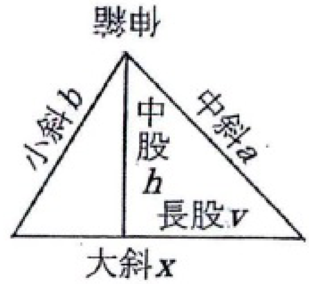
関孝和による『闕疑抄答術』[6., 20 頁] の「第廿七問」は，村瀬の問題の数値を変更し，答えの求まる出題 に仕立てた．現行の『関孝和全集』の原文は，術文に誤りがあるとの小林氏より御教示により，$\cdots$ 列積，自之 □□就分，以一十六 $\cdots$ から，□□就分を削除する．更に 小林氏の御指摘の他 にも脱文がある，と考える．前後の関係から，術文 4 行目の「自之，※得内減寄左」の※に「乗一十六，寄左．自因大斜八箇中斜」を挿入すべきである．(次節に，読み下し文を示す.)

なお，次節に引用する図の上方の逆向きの「伸縮」の文字は，両斜辺について，「中斜が長く，小斜が短い」ことを表わす．いま，全体を読み下し文に改め，各数値（寸単位）

を洋数字に直す．原漢文は現行の [6.]『全集』を参照のこと．

10　関の解法

第廿七 今三斜 [伸短] 有り．積 [$hx/2$] 84，只云ふ．中斜 [a]17，小斜 [b]10，大斜 [x] と中股 [h] 各々幾ばくか．



答に日く．大斜 [x]21，中股 [h]8.

術に日く．天元の一を立てて大斜と為す．（大斜を未知数と見做して x と置く．）これを自し（x^2 とし），中斜冪（$17^2 = 289$）を加入し，共に得る [$x^2 + 289$] 内より小斜冪（$10^2 = 100$）を減ずる [$x^2 + 289 - 100$] 余り [$x^2 + 189$] を，大斜に因る二箇の長股 [$2xv$] と為す [$x^2 + 189 = 2xv$]．これを自し [$x^4 + 2 \cdot 189x^2 + 189^2 = 4x^2v^2$]，一十六を乗じ [$64x^2v^2$]，左に寄す．大斜 [$x$] に因る八箇の中斜 [$8xa$] を自し [$64x^2a^2$]，得たるより左に寄せたる [$64x^2v^2$] を減ずる余り [$64x^2a^2 - 64x^2v^2 = 64x^2h^2$] を，一十六段の三斜積冪 [$16S^2$] とし，再び寄す．積 [$S$] を列し，之を自し [$S^2$]，十六を以て，之に乗じ [$16S^2$]，再び寄せたると相消す．開方算式 [$x^4 - 978x^2 + 42777 = 0$] を得て，三乗方に之を開き，大斜 [$x = 21$] を得る．之 [$x = 21$] を以て，倍する積 [$2S$] を除けば [$28S \div x = 168 \div 21 = 8$]，即ち [得られた 8 は] 中弧 [$h$] にて，問ひに合ふ．[以上]

「左に寄す」,「再び寄す」は，中間の数置の一時的保存を言う．「三乗方に之を開く」とは，四次方程式 $x^4 - 978x^2 + 42777 = 0$ を解くこと．奇数次の x^3 と x を含まぬから，$x^2 = y$ と置いた二次方程式 $y^2 - 978y + 42777 = 0$ を解き，$y = 441$ を得て，y を開平して $x = 21$ を得る．上記『大斜 21』が問題の答え．中股を h とすれば，$hx = 168$．これを $x = 21$ で割り $h = 8$ を得る．長股 v の平方 $v^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$，よって $v = 15$．小股 u は $u = 21 - 15 = 6$．さらに小斜 b は $b^2 = u^2 + h^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$，よって小斜 $b = 10$．等々．

関が述べていない大斜以外の値を補った．関の解き方は，上記のような二段階の解き方ではなく，四次方程式の逐次近似による数値解法であったと思われる．

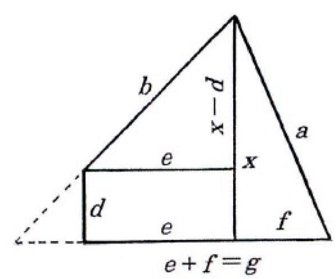
11　設問の成功と失敗

付録の一覧表を見れば，関の設問 は No.6 そのものであり，中股 $h=8$ を同じ値に揃えるため，A 全体を二倍した 6，8，10 の三角形と，C 即ち 8，15，17 の三角形を組み合わせた．関は正しく計算して，図形の存在を確かめた．

一方，磯村の『闕疑抄』は，No.11 の図 $a=25$，$b=30$，$S=300$ を全体として 1.6 倍すれば，$a=40$，$b=48$，$S=768$ となる．また，No.16 の図 $a=29$，$b=35$，$S=504$ を全体として 1.379 倍すれば，$a=40$，$b=48.28$，$S=958.86$ となる．また，No.26 の図 $a=41$，$b=50$，$S=780$ を全体として 0.9756 倍すれば，$a=40$，$b=48.78$，$S=742.42$ となる．さらに，No.27 の図 $a=41$，$b=58$，$S=1020$ を全体として 0.9756 倍すれば，$a=40$，$b=56.59$ 及び $S=970.85$ となる．等々．磯村は，恐らくこれらの中間に，設問の図形 $a=40$，$b=50$，$S=900$ が 存在すると勘違いした，と私は推定する．事実は，中間にそのような整数値の図形は存在しない．

12　闕鉤を持つ双股弦

関の『闕疑抄答術』(6., 1659）の第廿九問は「闕鉤を持つ山形平 (双弧弦)」である．次図のように，左側の勾股弦（直角三角形）が一部（図では点線で示す）欠けた四角形とな



る．与件は a，b，d，$g(=e+f)$ の四つの数値であって，右側三角形の高さ x を求めることが課題である．方程式は，二つの根号を含む

$$\sqrt{b^2-(x-d)^2}+\sqrt{a^2-x^2}=g \tag{7}$$

の形を取る．式の変形の便宜のため，平方根の中を文字に置き換え，g を r として

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}=r \tag{8}$$

を解いてみる．まず，式 (8) の両辺に自乗を施せば，

$$r^2-p-q=2\sqrt{pq} \tag{9}$$

を得て，さらに両辺に自乗を施せば，r についての四次方程式

$$r^4 + p^2 + q^2 - 2r^2p - 2r^2q - 2pq = 0 \tag{10}$$

にまで変形できる．この p，q，r に，上図の各辺の長さ

$$p = b^2 - (x-d)^2,\ q = a^2 - x^2,\ r = g \tag{11}$$

を代入すればよい．

関の『闕疑抄答術』(6.) の問題は磯村の『算法闕疑抄』(4.,5.) そのままではない．問題の本質は変えず，関自身で検算して，常に「答えの求まる問題」に置き換えている．ここでは具体的な 例題 と考えて，上図の各辺に，数値

$$a = 13,\ b = 15,\ d = 3,\ g = f + e = 17 \tag{12}$$

を与える．式 (10) の r の代わりに x を用いれば，x に関する四次方程式

$$x^4 - 6x^3 - 385x^2 + 1014x + 32904 = 0 \tag{13}$$

を解くことに該当する．この四次方程式 (13) の左辺を，いま仮りに $\varphi(x)$ と置いて，関が常用した解法，すなわち 逐次近似法 によって数値的に解けば，

$$\varphi(10) = 8544, \quad \varphi(11) = 4128, \quad \varphi(12) = 0, \quad \varphi(13) = -3600, \quad \varphi(14) = -6408 \tag{14}$$

等々を得て，根 (高さ) として

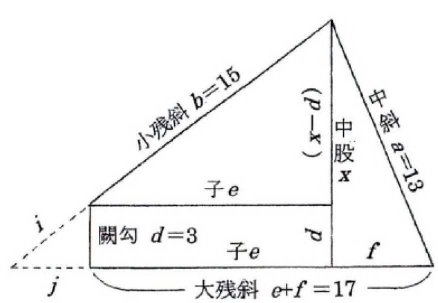
$$x = 12 \tag{15}$$

が求まる．上図について確かめれば，この根が数値として叶っている．

[6.]『関全集』の各辺の数値，特に根の数値などは 誤り であって，訂正を要する．

13　闕鉤を持つ双股弦 (続)

前節では，現代的な立場から，四次方程式 (13) を導いた．以下『闕疑抄答術』(6.) 第廿九問の本文に戻り，関自身の解法 を辿ることにしよう．但し，『答術』の本文には重大な錯誤がある．そこで，私は関の意図は尊重しつつも，論理的に解ける方程式の再生 を目指し，その後，原漢文を改めた．



図は，仮りに大，中，小と名付ける，三つの相似な勾股弦を含む：

$$大\quad j+e,\ x,\ i+b;\quad 中\quad e,\ c=x-d,\ b;\quad 小\quad j,\ d,\ i.$$

与件は大残斜 $e+f=17$，中斜 $a=13$，小残斜 $b=15$，闕勾 $d=3$．答えは中股 $x=12$．[付表の No.3 の図形が基礎になっている．]

術に日く．天元の一 (x) を立てて中股と為し，内，闕勾 d を減じたる余り $(x-d)$，之を自し，得る数 $(x-d)^2$ を以て小残斜冪 b^2 より減じたる余り $b^2-(x-d)^2$ を子冪 e^2 と為し，$b^2-(x-d)^2=e^2$，左に寄す．

$$[e^2=15^2-(x-3)^2=225-x^2+6x-9=216+6x-x^2.]$$

大残斜冪 $(e+f)^2=17^2=289$，中股冪 x^2 及び左に寄せたる $e^2=216+6x-x^2$ を併せ，$289+x^2+216+6x-x^2=505+6x$． 共に得る内より中斜冪 $(a^2=13^2=169)$ を減ずる余り $505+6x-169=336+6x$ を大残斜 $(e+f=17)$ に因る二箇の子 $(17\cdot 2e=34e)$ と為し，之を自し $\{(336+6x)^2=112846+4032x+36x^2=34^2\cdot e^2=1156e^2\}$，大残斜冪 $(e+f)^2=17^2=289$ に因る四段の子冪 $(336+6x)^2=112846+4032x+36x^2=4\cdot 289e^2=1156\cdot e^2$ とし，再び寄す．

$$[1156\cdot e^2=112846+4032x+36x^2.]$$

大残斜 $(e+f=17)$ を列し，之を自し $(e+f)^2=17^2=289$，以て左に寄せたる $e^2=216+6x-x^2$ を相乗じ

$$289e^2=289\cdot(216+6x-x^2)=62424+1734x-289x^2.$$

就いては之を四し $4\cdot(62424+1734x-289x^2)=249696+6936x-1156x^2$，再び寄せたる $1156\cdot e^2=112846+4032x+36x^2$ と相消して，

$$(112846+4032x+36x^2)-(249696+6936x-1156x^2)=0$$

即ち，<u>開方式</u>

$$1192x^2-2904x-136800=0 \tag{16}$$

を得る．今，仮にこの式の左辺を

$$\varphi(x)=1192x^2-2904x-136800$$

と置いて，関の常用した近似解法に倣って，種々の値を代入すれば，

$$\varphi(10)=-5560,\quad \varphi(11)=-2767,\quad \varphi(12)=0,\quad \varphi(13)=3713,$$
$$\varphi(14)=7400,\quad \varphi(15)=11385$$

となる．この結果，根 12 が得られた．なお，関が求めたのは，上記の式 (16) であった．しかし，私は更に「係数は 8 で約せる」と考えた．

$$149x^2 - 363x - 17100 = 0 \tag{17}$$

こうして，係数がかなり簡略化された．その根は言うまでもなく，式 (16) と同じく $x = 12$ であって，上掲の図の凡ての寸法と調和する．

[補足．更に，強いて式 (17) の第二根を求めれば，

$$x = -1425/149 = -9.5637583892\cdots$$

を得る．この根を方程式 (17) に代入すれば，$= 0$ となり，第二根である．しかし，負の根は 理論的な根 であり，関にとっては 思いもよらぬ根 である．しかも，普通の幾何学では，負根 を図形に当てはめることが出来ない．]

14　闕鈎を持つ双股弦（続々）

以上の検討に基づいて，新たに読み下し文を作ってみよう．

> 第廿九　今三斜闕有り．只云ふ，大残斜一尺七寸，中斜一尺三寸，小残斜一尺五寸，闕勾三寸．問ふ，中股は幾何か．
>
> 答へに曰く，中股一尺二寸．
>
> 術に曰く．天元の一を立てて中股と為し，内，闕勾を減じたる余り，之を自し，得る数を以て小残斜冪より減じたる余り，子冪と為し，左に寄す．大残斜冪と中股冪及び左に寄せたるを併せて列し，共に得る内より，中股冪を減じ，余りを大残斜二箇の子と為し，之を自し，大残斜冪に因る四段の子冪と為し，再び寄す．大残斜を列し，之を自し，左に寄せたるを以って相乗し，就いては之を四し，再び寄せたると相消し，開方式を得て，平方翻法に開きて，中股を得る．問ひに合ふ．

関は，私が第十一節で述べたような，式 (13) の知き四次方程式を作らなかった．代わりに，代入と置換を巧妙に組み合わせる ことによって，凡てを二次式の置換の範囲に還元して，最後に二次方程式 (16) を導いた．

私の採用した数値を用いれば，修正された原漢文は次のようになる．

> 第廿九　今有三斜闕．只云大残斜一尺七寸，中斜一尺三寸，小残斜一尺五寸，闕鈎三寸，問中股幾何．
>
> 答曰，中股一尺二寸．
>
> 術曰，立天元一為中股，内減闕鈎，余自之，得数以減小残斜冪，余為子冪，寄左．列併大残斜冪与中股冪及寄左，共得内減中股冪，余為因大残斜二箇子，自之，為因

大残斜冪四段子冪，再寄．列大残斜，自之，以寄左相乗，就四之，与再寄相消，得開方式．平方翻法開之，得中股．合問．

管見の範囲では，現在のところこのような本を見ていないが，仮にそのようなものが発見されれば，信頼のおけるテクストということになろう．

文献

[1] 藤原松三郎 (日本学士院編) ：明治前日本数学史，全 5 巻，岩波書店．引用は第 1 巻，1954 年.

[2] 今村知章：竪亥録仮名抄 (佐藤健一著)，研成社，1988 年.

[3] 今村知章：竪亥録 (竹之内脩・校注)，江戸初期和算選書，研成社，第 10 巻，分冊，2010 年.

[4] 磯村吉徳：算法闕疑抄 (西田知己・校注)， 江戸初期和算選書，研成社，第 10 巻，分冊，2010 年.

[5] 磯村吉徳：算法闕疑抄，近世文学資料類従，参考文献編 12，勉誠社，1978 年.

[6] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編：関孝和全集，大阪教育図書，1974 年.

[7] 村瀬義益：算法勿憚改 (西田知己・校注)，江戸初期和算選書，研成社，第 3 巻，分冊，1993 年.

[8] Carl B. Boyer: A histoly of mathematics, J. Wiley and Sons, 1968. ボイヤー (加藤美鉄雄・浦野由有訳) ：数学の歴史 1，朝倉書店，46-51 頁，1983 年.

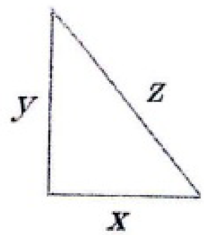
[9] 杉本敏夫：解読関孝和 (論文集)，海鳴社，2008 年.

[10] 小林龍彦：「闕疑抄答術」にあらわれる開方式の根について，数学史研究，通巻 161，1999 年.

付録

<u>基礎の整数直角三角形</u>

斜辺 z を右上に置き，底辺 x，高さ y を定める．



この基礎直角三角形は，周知の三平方の定理 (勾弧弦)

$$z^2 = x^2 + y^2$$

を満たす．整数直角三角形の量産のためには，助変数 g，h (整数) を用いて，

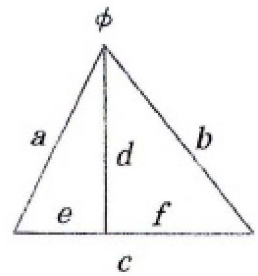
$$x = g^2 - h^2, \quad y = 2gh, \quad z = g^2 + h^2$$

と置く．整数直角三角形を作るには，g は 6 まで，h は 5 までの整数を用いた．引用の便宜のため，型番号 A，B，C を付す．E は約分した．

型	g	h	x	y	z	型	g	h	x	y	z
A	2	1	3	4	5	F	5	2	21	20	29
B	3	2	5	12	13	G	5	3	8	15	17
C	4	1	15	8	17	H	5	4	9	40	41
D	4	3	7	24	25	I	6	1	35	12	37
E	5	1	12	5	13	J	6	5	11	60	61

<u>山形平</u>

上の二つの直角三角形を組み合わせ，x または y を通分した値を縦軸 d と見做して左右に繋げば，図の山形平を得る．最初の組み合わせ $[A\ A]$ は，頂角 φ が直角になるので (すなわち元の直角三角形と相似形が作られるので)，除外できる．二番目から後が，新たに作



られた「山形平」である．左側に，縦長の直角一角形が来るように作図した．面積 $S = c \cdot d/2$．なお，図番号 1 以外は頂角 φ が非直角である．

図番号	型	a	b	c	d	e	f	S	φ(度)
1	AA	15	20	25	12	9	16	150	90.00
2	BA	13	15	14	12	5	9	84	59.49
3	BA	13	20	21	12	5	16	126	104.25
4	AG	15	37	44	12	9	35	264	107.95
5	AG	20	37	51	12	16	35	306	124.21
6	AC	10	17	21	8	6	15	84	98.80
7	CA	17	25	28	15	8	20	210	81.2
8	CB	17	39	44	8	8	36	330	95.45
9	CB	26	51	55	10	24	45	660	84.55
10	DB	25	24	17	24	10	7	204	38.88
11	DA	25	30	25	24	7	18	300	53.13
12	DA	25	40	39	24	7	32	468	69.39
13	DC	25	51	52	24	7	45	624	78.19
14	AE	25	29	36	20	15	21	360	83.27
15	AE	25	74	77	24	7	70	924	87.34
16	EA	29	35	48	21	20	28	504	96.73
17	EF	29	52	69	20	21	48	690	113.78
18	FF	41	104	105	40	9	96	210	80.06
19	HG	61	68	43	60	11	32	1290	38.46
20	JF	61	156	155	60	11	144	4650	77.77
21	CG	51	74	115	24	45	70	1380	133.00
22	AB	25	39	56	15	20	36	420	120.51
23	HG	41	85	84	40	9	75	1680	74.61
24	HG	15	41	52	9	12	40	234	130.45

図番号	型	a	b	c	d	e	f	S	φ(度)
25	HB	41	104	105	40	9	96	2100	80.06
26	HA	41	50	30	40	9	30	780	49.55
27	HF	41	58	51	40	9	42	1020	59.08
28	DI	25	74	77	24	7	70	924	87.34
29	AI	15	37	44	12	9	35	264	107.95
30	AI	20	37	51	12	16	35	306	124.21
31	BI	13	37	40	12	5	35	240	93.70
32	JA	61	75	56	60	11	45	1680	47.26
33	JA	61	100	91	60	11	80	2730	63.52
34	JE	61	156	155	60	11	155	4650	77.77
35	JF	61	87	74	60	11	63	2220	56.79
36	JI	61	185	186	60	11	175	5580	81.46
37	JH	122	120	49	120	22	27	2940	23.07
38	JD	122	125	57	120	22	35	3420	26.65