

ジョージ・ピーコック『代数学』序文について

On the “Preface” of George Peacock’s *A Treatise on Algebra*

野村恒彦

Tsunehiko Nomura

神戸大学大学院国際文化学研究科 異文化研究交流センター

Intercultural Research Center

Kobe University Graduate School of Intercultural Studies

Abstract

George Peacock was an English mathematician in the Victorian era. In his student days at Cambridge University, he joined the Analytical Society which his friends Charles Babbage and J. F. W. Herschel organized. The purpose of this Society was to introduce the continental mathematical signs to England.

The most important work of Peacock is *A Treatise on Algebra* published in 1830 and 1842-45. In this work, he divided algebra into two, “Arithmetical Algebra” and “Symbolical Algebra”. The “Preface” of *A Treatise on Algebra* was very important, because Peacock claimed there were differences between Arithmetical Algebra and Symbolical Algebra.

J. M. Dubbey discussed both Peacock’s “Preface” and Babbage’s unpublished manuscript “Essays on the Philosophy of Analysis”. His discussion is mostly correct, however he failed to point out their differences. Dubbey’s discussion doesn’t point out Peacock’s method of thinking about the development from Arithmetical Algebra to Symbolical Algebra.

はじめに

ジョージ・ピーコック (George Peacock) は、ケンブリッジ大学在学中にバベッジ (Charles Babbage)、ハーシェル (J. F. W. Herschell) らとともに設立した解析協会 (Analytical Society) の、主要なメンバーの一人である。しかし 1813 年に公刊された『解析協会論文集』 (*Memoirs of the Analytical Society*) は、バベッジとハーシェルの 2 人が執筆しているだけで、ピーコックは貢献していない。

ピーコックが 1830 年に発表した『代数学』 (*A Treatise of Algebra*) は大きな影響を与えたものとして知られているが、その影響の大きさに比してピーコックの人となりやその他の業績についてはあまり知られていないが実情である。

またバベッジの未定稿である“Essays on the Philosophy of Analysis”のうち“General Notions Respecting Analysis”の記述と、ピーコックが1830年に刊行した『代数学』序文の記述に類似している点があるとダビーによる指摘があり、代数学の発展にピーコックのみならずバベッジも関与していたものと考えられることができる。

ここでは『代数学』序文をもとにして、ピーコックの『代数学』の同時代における位置付けについて考えてみたい。

1 ピーコックについて

ジョージ・ピーコック (George Peacock) は1791年4月9日にデントンで生まれ、1809年にケンブリッジ大学のトリニティ・カレッジに入学した。前述したとおり、ケンブリッジ大学在学中にチャールズ・バベッジ、ジョン・ハーシェルらとともに解析協会を設立し、大陸で発展していた解析学を英国に導入しようとした。その活動は『解析協会論文集』の他ラクロアによる微積分学の教科書を英訳したことにより知られている。

ピーコックは、1812年に Second Wrangler、Second Smith's prize を獲得した。ちなみに同年の Senior wrangler はジョン・ハーシェルが獲得している。その後、ピーコックは1819年にトリニティ・カレッジのフェローとなった。

1818年には王立協会のフェローになったピーコックは、1837年にケンブリッジ大学における天文学のロウンディーン教授 (Lowndean Professor of Astronomy) に選出されている。

1817年にはケンブリッジ大学のトライポスの Examiner、Moderator となり、それまでニュートンが用いていた記号に代わり、トライポスにライプニッツによる記号を初めて導入した。

そしてピーコックは、イーリーの主席司祭 (Dean of Ely) に1839年に就任し、1858年11月8日に死去するまでその地位にあった。

2 ピーコックの業績について

ピーコックの業績は、バベッジやハーシェルとラクロアによる *Sur le Calcul Différentiel et Intégral* の訳を1816年に刊行したことから始まるが、続いて同じメンバーにより *Collection of Examples of the Application of the Differential and Integral Calculus* を1820年に刊行している。

1830年にはピーコックの主著となる『代数学』 (*A Treatise of Algebra*) を刊行したが、その後増補改訂した2巻本の『代数学』を1842年から1845年にかけて発表した。

1831年には British Association for the Advancement of Science (BAAS) の創立メンバーとなり、1833年にケンブリッジで開催された BAAS の会議で議論された解析学の発展については、ピーコックが翌年報告を執筆した^{*1}。これは副会長であるヒューエルが最初ハミルトン (W. R. Hamilton) に最初依頼していたが、ハミルトンが断ったので、ピーコックが行うこととなったもの

^{*1} G. Peacock, “A Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis”, *Report of the third meetin of the British Association for the Advancement of Sicence* (London: 1834).

である

ピーコックの業績で最大のものは、1830年に刊行された『代数学』(*A Treatise of Algebra*)である。彼は本書で代数を「算術的代数」(Arithmetical Algebra)と「記号的代数」(Symbolical Algebra)に分類しているが、それらの特徴等については次節以下で述べることにする。

ピーコックの数学解析の分野における主要な業績は、本書により代数を堅固な論理的基礎の上に位置付けたことにある。本書については、前述のとおり1842年から45年の間に改訂増補され、*A Treatise of Algebra Vol.I, Arithmetical Algebra*と*A Treatise of Algebra Vol.II, On Symbolical Algebra, and Its Applications to the Geometry of Position*との2巻本として刊行されている。

1845年には*Encyclopaedia Metropolitana*に“Arithmetic”を執筆している。これは1847年に*The Encyclopaedia of Pure Mathematics*として刊行された*2。

この論考も非常に長いものであるが、ピーコックの代表的著作と言えるものは、やはり『代数学』であろう。

ここで、それらのページ数を比較すると、次の表のようになる。

1830年刊(1巻本)	685ページ
1843年刊(2巻本)のうち第1巻 Arithmetical Algebra	399ページ
1843年刊(2巻本)のうち第2巻 Symbolical Algebra	455ページ

表1 『代数学』各版の比較

この表を見ればすぐわかるように、2巻本は前著の改訂増補という著作にふさわしいものとなっている。

『代数学』でピーコックが主張しているのは、前述したように代数学を「算術的代数」と「記号的代数」に分類したことである。それまでの代数学は負の数や無理数を扱うことにはなっていなかった。当時の代数学教科書の執筆者であるウィリアム・フレンド等は負の数や複素数の使用を扱うことなく代数学の教科書を書いていた*3。その証拠にピーコック『代数学』序文に次のような記述がある*4。

$$\begin{aligned} &7a + 5b - a - 3b - 3a + 2b - 3a - 7b \\ &= 7a - a - 3a - 3a + 5b - 3b + 2b - 7b \\ &= 7b - 9b \end{aligned}$$

最後の演算の結果について、規則を適用することになれば、不可能(impossible)となる。

*2 G. Peacock, “Arithmetic”, *The Encyclopaedia of Pure Mathematics* (London: J. Joseph Griffin & Co., 1847), pp.369-523.

*3 ヴィクター・J・カッツ, 『数学の歴史』, 上野健爾・三浦伸夫監訳, 共立出版, 2005, p.767.

*4 G. Peacock, “Preface”, *Treatise on Algebra* Vol. 1 (Cambridge: J. & J. J. Deighton, 1842-45), vi.

ピーコックはそれらをも扱う代数学を提唱したのである。そしてこのピーコックの考え方は多くの数学史書において指摘されるように、グレゴリー (Duncan Farquharson Gregory)、ド・モルガン (Augustus De Morgan)、ブール (George Boole) と続く抽象代数学の系譜の先駆となるものであった。

3 『代数学』 (A Treatise of Algebra) 序文について

(1) 内容

前述したように『代数学』には2つの版が存在している。すなわち1830年に刊行された1巻本と、1843-45年に刊行された2巻本である。これらにはそれぞれ「序文」(Preface)が付けられており、その内容は全く異なったものとなっている。これら「序文」の長さだけを単純に比較すると、次に掲げる表のように1830年刊の1巻本に付された序文が最も長いものとなっている。

1830年刊(1巻本)	31ページ
1842-5年刊(2巻本)のうち第1巻 Arithmetical Algebra	10ページ
1842-5年刊(2巻本)のうち第2巻 Symbolical Algebra	3ページ

表2 『代数学』序文の比較

ピーコックが主張する「算術的代数 (Arithmetic Algebra)」と「記号的代数 (Symbolic Algebra)」との比較が明確に表されているのは、これら『代数学』の序文である。

ピーコックは1845年に刊行された第2巻の序文に、「以前に刊行した著作では、記号的代数 (Symbolic Algebra) について、算術的代数 (Arithmetic Algebra) が基礎となっていることについては十分に論じることができなかった。^{*5}」と説明しているが、その基本的な考え方については1830年版に付された序文が最も顕著に表しているものと考えることができる。従ってここでは、1830年版の序文を基本として考えていきたい。1842-45年版の序文については、それを補強する材料として用いていくことにする。

ダビーはその著書 *The Mathematical Works of Charles Babbage* の中で、ピーコックの1830年版の『代数学』序文における主張を以下のようにまとめている^{*6}。

1. 代数は、それまでは単に算術を修正したものと考えられていた。
2. 代数はあらゆる個別な解釈とは独立した方法による記号の操作からなっている。
3. 算術は代数の特別な事例に過ぎない—ピーコックは「提示の科学」と名付けた。
4. 等号(=)は「代数的に等しい」という意味で用いられる。
5. 等しい形式の不変性の原理

1の意味するところは、従来の考え方のおり、文字は数字の代用としての役割を果たしている

^{*5} G. Peacock, "Preface", *Treatise on Algebra* Vol. 2 (Cambridge: J. & J. J. Deighton, 1842-45), iii.

^{*6} J. M. Dubbey, *The Mathematical Works of Charles Babbage* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978),(Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004), p.103.

ということである。そして、このことはピーコックの主張の2項目のものへと繋がり、文字が数字の代用に限定されることだけではないと主張する。

それまでの代数学は負の数や虚数を扱うことはなかったが、これらをも扱うことが可能であるというのがピーコックの主張である。そのためには、どのような方法が考えられるかをピーコックは『代数学』で提示しているのである。

まず、3の「提示の科学」は次のように説明できる。

算術もしくは算術的代数における四則演算はそのまま記号的代数に適用できるのだが、ここで問題となるのはその結果である。すなわち算術では $5 - 3 = 2$ は意味をなすのだが、 $3 - 5$ では意味をなさないとしている。これをそのまま代数にあてはめると、 $a - b = c$ において、 $a \geq b$ であれば意味をなし、 $a < b$ であれば意味をなさないということである。ピーコックはこれらの演算を結果としてとらえるのではなく、その操作自身だけが意味をなすこととし、それらを記号的代数の四則演算として位置付けた。すなわち算術もしくは算術的代数における四則演算は、記号的代数における四則演算を提示するとしたのである*7。

5の「等しい形式の不変性の原理」(the principle of the permanence of Equivalent form)について、ピーコックはまず次のような説明を加える。

m と n を整数とすれば、次のような式が成り立つ。

$$ma + na = (m + n)a$$

一方同様に、次のような式も成立する。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ここで m と n をどのような符号でも対応できる一般的な記号としても、上の2つの式は成立する。それは負の数や分数であってもかまわない。

このピーコックの説明で、最初の m と n を整数とする場合が算術的代数であり、次の m と n を一般的記号に拡張した場合が記号的代数にあたるものである。すなわち同じ形式を持つもので算術的代数で成立するものは、記号的代数でも成立するというのがピーコックが主張していることであり、これを簡潔な言葉で述べたものが、「等しい形式の不変性の原理」(the principle of the permanence of Equivalent form)ということになる*8。

4についても同様にピーコックは、「=」で表される意味は「代数的結果」もしくは「代数的に等しい」と置き換えることができると説明している*9。これは等号の意味が結果として与えられる値が等しいことを意味するのではなく、その式の持つ意味が等しいことを主張しているのである。これも前述したように、前者が算術的代数を表すのに対し、後者は記号的代数を表している。

*7 G. Peacock, "Preface", *Treatise on Algebra* (Cambridge: J. & J. J. Deighton, 1830), xi-xii.

*8 *op. cit.*, xvi-xvii.

*9 *op. cit.*, xi.

(2) バベッジによる“Essays on the Philosophy of Analysis”との比較

ダビーはその著書 *The Mathematical Works of Charles Babbage* で、1830 年刊『代数学』の序文と、バベッジによる未発表草稿である“Essays on the Philosophy of Analysis”のうち“General Notions Respecting Analysis”にある記述に共通点があるということから議論を展開している。

バベッジによる主張での表現は、次のようになっている*10。

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

すべての整数で真となるこの等式は、指数が分数の時には必ずしも成り立つとは限らない。そして指数が分数というのも当初の仮定からは起こることではない。

ましてや a や b が虚数の時にも、この等式は必ずしも成り立つとは限らないのである。

そのような表現に意味を与えるために、私たちは新しい定義や曖昧さを避けることを行わなければならない。新しい表現は古い表現を特殊な場合として含むべきであることは極めて利便性のあることである。そしてこれは、量 x への [虚数を含む] 指数をあてはめることによって示される演算の定義として、等式 $x^a \times x^b = x^{a+b}$ を仮定することによって達成されたのである。

ここでのバベッジの議論において最も重要な関連があると考えられるのは、ピーコックによる「等しい形式による不変性の原理」の項目であるが、バベッジによる指数が分数や虚数の場合における主張は、先述したピーコックの主張の表現方法を変えたものに他ならない。

バベッジは、等式に意味を与える新しい表現として、「新しい表現は古い表現を特殊な場合として含むべきであることは極めて利便性のあることである」という主張をしているが、この新しい表現というのは、ピーコックが主張する「記号的代数」であり、古い表現というのは「算術的代数」のことであると考えられることができる。

すなわち、ピーコックは等式が成立する場合には、その形式が一致することにより負の数等にも拡張できることを示したのであり、バベッジはこれらの拡張については新しい形式が必要であるとの提案を行ったものである。

従って、以上のことからダビーの主張は正しいものと言える。ただしバベッジの主張は指数を捉えたのに対し、ピーコックの主張は四則演算を捉えた議論であり、より一般的なものとなっている。さらにピーコックは算術的代数から、記号的代数という体系を定義を行っていることは、明らかにバベッジの主張とは一線を画すものとなっている。

3 まとめ

以上述べてきたように、ピーコックによる『代数学』序文は、それまでの代数学とは異なった提示を明確に行っているものである。これについてバベッジの主張との類似性については、確かにダ

*10 Ch. Babbage, “Essays on the Philosophy of Analysis”, British Museum Additional Manuscript 37202, ff. 43r-44r.

ビーの議論は正しいものと考えることができる。しかし前節で述べたように、バベッジとピーコックの主張の間には明らかな差異が見受けられる。それはピーコックが算術的代数から記号的代数を提示した「提示の科学」や「等しい形式の不変性の原理」という具体的な方法があるのに対し、バベッジの“Essays on the Philosophy of Analysis”には具体的な方法が見受けられないことである。これらにより、ピーコックはバベッジが発酵させた議論を新しい提示にまで至らせたと考えることができる。

ピーコックによる「算術的代数」と「記号的代数」に関する具体的な議論については『代数学』本文の主張を確かめることによる方法しか考えられないため、これらは今後の課題としたい。

最後に本論文の執筆にあたり、京都大学数理解析研究所での発表時に足立恒雄先生、公田藏先生に貴重な助言をいただきました。ここに記して感謝いたします。

参考文献

- [1] Peacock G., “Preface” , *A Treatise of Algebra* (Cambridge: J. Smith, 1830), v-xxxv.
- [2] Peacock G., “Preface” , *A Treatise of Algebra Vol.I, Arithmetical Algebra* (Cambridge: J. & J.J.Deighton, 1842-45), iii-x.
- [3] Peacock G., “Preface” , *A Treatise of Algebra Vol.II, On Symbolical Algebra, and Its Applications to the Geometry of Position* (Cambridge: J. & J.J.Deighton, 1842-45), iii-x.
- [4] Peacock G., “Arithmetic” ,*The Encyclopaedia of Pure Mathematics* (London: J. Joseph Griffin & Co., 1847), pp.369-523.
- [5] Babbage, Ch., “Essays on Philosophy of Analysis” , British Museum Additional Manuscripts 37202.
- [6] Dubbey, J. M., “Babbage, Peacock and Modern Algebra” , *Historia Mathematica*, Vol. 4, 1977, pp.295-302.
- [7] Dubbey, J. M., *The Mathematical Works of Charles Babbage*, (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978), (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004).
- [8] Becher, H. W., “Woodhouse, Babbage, Peacock, and Modern Algebra” , *Historia Mathematica*, Vol. 7, 1980, pp.389-400.
- [9] Durand-Richard, M. J., “Peacock’s Arithmetic: An Attempt to Reconcile Empiricism to Unversity” , *Indian Journal of History of Science*, Vol. 42, No.2, 2011, pp.251-311.
- [10] Fisch, M., “The Making of Peacock’s *Treatise on Algebra*: A Case of Creative Indecision” , *Archive of Exact Science*, Vol.54, 1999, pp.137-79.
- [11] Pycior, H. M., “George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra” , *Historia Mathematica*, No. 8, 1981, pp.23-45.