RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B51 (2014), 163–174

二次超曲面の完全交叉とガロアコホモロジー (Complete intersection of two quadrics and Galois cohomology : a research announcement)

By

石塚 裕大 (Yasuhiro ISHITSUKA)*

Abstract

In this paper, we give an overview of a method of explicit 2-descent for hyperelliptic Jacobian varieties ([1]), and relate it to the set of complete intersections of two quadrics. This is an announcement of the results contained in the paper [4].

§1. 序

この論文の目的は超楕円曲線の Jacobi 多様体の降下を述べ, それをもとに [4] における主結果とその証明を概説することである. まず第 2 節では降下の一般論の概説を行い, 第 3 節では Bruin–Flynn([1]) によるより具体的な議論を紹介する. そして第 4 節では主結果を述べ, 証明の概略を説明する.

§2. 2-降下理論

大域体上の Abel 多様体 A が具体的な形で与えられたとする. A についてその Mordell–Weil 階数を計算することは一般に難しい. 一方で Mordell–Weil 階数の上界を求める方法として, **降下 (descent)** と呼ばれる一群の手法がある. この節では, A の 2 倍写像 $[2]\colon A \to A$ に伴った 2-降下を紹介する.

以下では, 特に断りのない限り体 k は標数が 2 でない完全体とし, k^s は k の分離閉包とする. $G_k := \mathrm{Gal}(k^s/k)$ を k の絶対 Galois 群とする. k 上定義された Abel 多様体 A について, 次の G_k-加群の短完全列を考える.

$$0 \longrightarrow A[2](k^s) \xrightarrow{\iota} A(k^s) \xrightarrow{[2]} A(k^s) \longrightarrow 0.$$

Received March 31, 2013. Revised June 30, 2013, July 1, 2013, November 17, 2013 and December 19, 2013.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11G30
Key Words: Hyperelliptic curve, Descent, Complete intersection, Jacobian
*京都大学大学院理学研究科 Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.
e-mail: yasu-ishi@math.kyoto-u.ac.jp

ここで [2] は Abel 多様体の 2 倍写像である．この短完全列について Galois コホモロジーの長完全列を部分的に見ると, 次の完全列が得られる．

$$0 \longrightarrow A(k)/2A(k) \longrightarrow H^1(G_k, A[2](k^s)) \xrightarrow{\iota_*} H^1(G_k, A(k^s))[2] \longrightarrow 0.$$

このうち $H^1(G_k, A[2](k^s))$ と $H^1(G_k, A(k^s))$ の元は, k 上定義された代数多様体の同型類としての解釈が可能だったことを思い出そう．必要な概念の定義を思い出しておく．

定義 2.1. A の torsor (X, ρ) とは, 単純推移的な A の作用 $\rho\colon A \times X \to X$ の入った k 上定義された代数多様体 X である．二つの torsor が同値であるとは, 作用と整合する k 上の代数多様体としての同型があることを意味する．自明な torsor は A と群法則 $m\colon A \times A \to A$ の組 (A, m) と同値な torsor のことである．

定義 2.2. A の 2-covering (X, π) とは, k 上定義された代数多様体 X と k 上の射 $\pi\colon X \to A$ の組で, ある k^s 上の同型 $f\colon X_{k^s} \xrightarrow{\sim} A_{k^s}$ について, $\pi = [2] \circ f$ を満たすものである．二つの 2-covering $(X, \pi), (X', \pi')$ が同型であるとは, $\pi = \pi' \circ g$ を満たす k 上の同型 $g\colon X \xrightarrow{\sim} X'$ が存在する場合を指す．自明な 2-covering は $(A, [2])$ と同型な 2-covering のことである．

2-covering には自然に torsor の構造が入る．しかし 2-covering の同型は torsor の同値より強い．このことを表したのが次の命題である．

命題 2.3 (cf. [3, Section 2])**.** 次の図式は可換である．ここで ι_* は ι から誘導される写像である．

$$\begin{tikzcd} H^1(G_k, A[2](k^s)) \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[d, leftrightarrow, "1{:}1"'] & H^1(G_k, A(k^s)) \arrow[d, leftrightarrow, "1{:}1"] \\ \{A \text{ の 2-covering の同値類}\} \arrow[r] & \{A \text{ の torsor の同値類}\} \end{tikzcd}$$

さらに ι_* の核は $A(k)/2A(k)$ に同型である．この集合は, k-有理点をもつ 2-covering X の同型類の集合と全単射になる．

命題の後半は, torsor X が自明であるための必要十分条件が, $X(k) \neq \emptyset$ であることを使えばただちにわかる．そこで k-有理点をもつ 2-covering X のことを可解 (soluble, または solvable) な 2-covering と呼ぶことにしよう．

いま k を大域体とする．2-Selmer 群 $S^{(2)}(A/k)$ は, 各局所体 k_v で可解, すなわち局所可解 (locally soluble) な 2-covering 全体として解釈される．すなわち Galois コホモロジーの言葉で書くと,

$$S^{(2)}(A/k) := \ker\left(H^1(G_k, A[2]) \to \prod_v H^1(G_{k_v}, A) \right)$$

である.

2-Selmer 群は有限群であり, また定義から $A(k)/2A(k)$ が部分群として入っている. 従って,

$$2^{\mathrm{rank}\,A(k)} \leq \#\left(A(k)/2A(k)\right) \leq \# S^{(2)}(A/k)$$

であるから, Selmer 群の位数を求めれば A の Mordell–Weil 階数が上から抑えられることになる.

§ 3. 超楕円曲線の Jacobi 多様体の場合

前節に引き続き, k を標数が 2 でない完全体とする. 以降は, A が k-有理的な Weierstrass 点を持つ k 上の非特異超楕円曲線 C の Jacobi 多様体 J_C である場合のみ取り扱う. これは [7, Chapter X] で扱われているような, 楕円曲線の降下の延長でもある.

$g \geq 2$ を正整数とする. C を体 k 上定義される非特異射影的代数曲線で, 次のアフィンモデルを持つものとする：

$$y^2 = f(x) = x^{2g+1} + c_2 x^{2g} + c_4 x^{2g-1} + c_6 x^{2g-2} + \cdots + c_{4g+2}.$$

ここで $f(x)$ は k-係数の, 分離的な $2g+1$ 次多項式である. $f(x)$ の根を α_i $(1 \leq i \leq 2g+1)$ とおく. さらに J_C は C の Jacobi 多様体, $\mathcal{O} \in J_C(k)$ をその単位元とする.

このとき C は射影直線 $\mathbb{P}^1_k$ への $2:1$ の被覆写像 $\pi\colon C \to \mathbb{P}^1_k$ を持つ, 種数 g の超楕円曲線であり, C の Weierstrass 点の集合 Ω は π の分岐点全体の集合と一致する. 分岐点のうち $\infty = (0:1) \in \mathbb{P}^1_k$ 上にある点 P は k-有理点である. そこでその他の分岐点を,

$$\begin{aligned}\Omega' &:= \Omega \setminus \{P\} \\ &= \{\omega_i = (\alpha_i, 0)\}_{1 \leq i \leq 2g+1}\end{aligned}$$

とおく. すると Jacobi 多様体の 2-torsion 部分群 $J_C[2](k^s)$ は,

$$\Omega'_0 := \{(\omega_i) - (P) \in J_C(k^s)\}$$

で生成されること, また関係式は

$$\sum_{i=1}^{2g+1} \left((\omega_i) - (P)\right) = 0$$

のみであることが分かる. $J_C[2]$ の Weil ペアリングを

$$e_2\colon J_C[2](k^s) \times J_C[2](k^s) \to \mu_2(k^s)$$

と書くことにする.

k-代数 L を $L=k[T]/(f(T))$ として定義する. L は k 上 $(2g+1)$-次元のエタール k-代数である. T の L における像を θ と書く. すると次の同型がある.

$$\varphi=\bigoplus_{i=1}^{2g+1}\varphi_i\colon L\otimes_k k^s \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{2g+1} k^s,$$
$$\theta\mapsto(\alpha_i)_i.$$

さらに $\mu_{2,L}$ を 1 の 2 乗根のなす $\operatorname{Spec}L$ 上の群スキーム, $\operatorname{Res}_{L/k}\mu_{2,L}$ をその Weil restriction とする.

命題 3.1 ([6])**.** 次の写像は単射である.

$$\mu\colon J_C[2](k^s)\to\left(\operatorname{Res}_{L/k}\mu_{2,L}\right)(k^s)$$
$$R\mapsto(e_2((\omega_i)-(P),R))_{1\le i\le 2g+1}$$

その像はノルム写像 $\mathrm{N}_{L/k}\colon\left(\operatorname{Res}_{L/k}\mu_{2,L}\right)(k^s)\to\mu_{2,k}(k^s)$ の核 ($N(k^s)$ とおく) に一致し, 自然な商準同型を通じて商群 $\left(\left(\operatorname{Res}_{L/k}\mu_{2,L}\right)/\mu_{2,k}\right)(k^s)$ にも同型である.

証明. 単射性は Weil ペアリングの非退化性と, Ω_0' が $J_C[2](k^s)$ を生成することから従う. 2 番目の主張は, $N(k^s)$ と $J_C[2](k^s)$ の元の数が一致するので, 包含関係 $\mu(J_C[2](k^s))\subset N(k^s)$ を示せばよい. いま同型 φ を用いると,

$$\mathrm{N}_{L/k}(\beta)=\prod_{i=1}^{2g+1}\varphi_i(\beta)$$

であるから, $R\in J_C[2](k^s)$ をとったとき,

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{L/k}(\mu(R))&=\prod_{i=1}^{2g+1}e_2((\omega_i)-(P),R)\\&=e_2\left(\sum_{i=1}^{2g+1}\left((\omega_i)-(P)\right),R\right)\\&=e_2(0,R)=1\end{aligned}$$

となって従う. また L が k 上奇数次元であることに注意すると, $-1=(-1)_i\notin N(k^s)$ である. 従って最後の主張が従う. $\square$

この命題から特に次の同型が成立する.

$$H^1(G_k,J_C[2])\xrightarrow{\sim}H^1(G_k,N(k^s))\xrightarrow{\sim}H^1\left(G_k,\left(\left(\operatorname{Res}_{L/k}\mu_{2,L}\right)/\mu_{2,k}\right)(k^s)\right).$$

ここで後の二つの群 $H^1(G_k,N(k^s))$ および $H^1\left(G_k,\left(\left(\operatorname{Res}_{L/k}\mu_{2,L}\right)/\mu_{2,k}\right)(k^s)\right)$ だが, 完全列

$$1\longrightarrow\mu_{2,k}(k^s)\longrightarrow\left(\operatorname{Res}_{L/k}\mu_{2,L}\right)(k^s)\longrightarrow\left(\left(\operatorname{Res}_{L/k}\mu_{2,L}\right)/\mu_{2,k}\right)(k^s)\longrightarrow 1$$

はノルム写像 $\mathrm{N}_{L/k}\colon \left(\mathrm{Res}_{L/k}\,\mu_{2,L}\right)(k^s) \to \mu_{2,k}(k^s)$ によって分裂するので, Kummer 理論より同型

$$H^1(G_k, J_C[2]) \xrightarrow{\sim} L^\times/k^\times L^{\times 2}$$

が得られる.

以降の議論は [1, Chapter 5] に依る. 連結準同型 $J_C(k)/2J_C(k) \hookrightarrow H^1(G_k, J_C[2])$ と, 同型 $H^1(G_k, J_C[2]) \xrightarrow{\sim} L^\times/k^\times L^{\times 2}$ の合成

$$\kappa\colon J_C(k)/2J_C(k) \to L^\times/k^\times L^{\times 2}$$

を具体的に記述していくことにする. より詳しい証明は [6] を参照のこと.

写像 κ の計算

まず $\overline{D} \in J_C(k)$ を k-有理的な因子類とする. 仮定より k は完全体なので, 適当な (重複も許す)g 個の k^s-有理点 $P_i \in C(k^s)$ を用いて, 因子類 $\overline{D}$ の代表となる因子 D を

$$D = \sum_{i=1}^{g}(P_i) - g(P)$$

と取ることができる. $C(k) \neq \emptyset$ から k-有理的な因子類は k-有理的な因子を代表元にもつことに注意すると ([2, Corollary 1.3]), 因子 D は k-有理的な因子としてよい. P_i らの G_k-軌道を考えれば, 結局 D は次のように因子の和として分けられる:

$$D = \sum_R D_R, \quad D_R := \sum_Q (Q) - d_R(P).$$

ここで $R \in C(k^s)$ で, Q は R の G_k-軌道を走り, d_R はその軌道の位数である. 従ってそれぞれの D_R について κ の像を考えればよい.

一方で, 次の補題がある.

補題 3.2 ([6, Lemma 2.2])**.** $\overline{D}$ の代表元として, Ω に台を持たない k-有理的な因子 E を取ってくることができる.

Ω に台を持たない次数 0 の k-有理的な因子 $E = \sum_i n_i(P_i)$ については, κ の像は

$$\kappa(E) = \prod_i (x(P_i) - \theta)^{n_i} \in L^\times/k^\times L^{\times 2}$$

と計算される. ここに $x(P_i)$ は P_i の x 座標を表す有理関数で, θ は $L = k(T)/(f(T))$ における T の像である. D_R は $P \in \Omega(k)$ を台に持つので, この計算が直接使える因子ではない. [6, Lemma 2.2] では, D_R と線型同値な Ω に台を持たない因子を具体的に構成することで, $\kappa(D_R)$ を具体的に計算している. その結果だけを以下に述べておこう.

まず $R = P$ の場合は 1 である. 次に $R \in \Omega'(k^s)$ の場合, つまり $\overline{D_R} \in J_C[2](k) \setminus \{\mathcal{O}\}$ の場合は,

$$\kappa(\overline{D_R}) = \prod_Q (x(Q) - \theta) + \prod_U (x(U) - \theta)$$

となる. ここで Q は上と同じく R の G_k-軌道全体を動く. また U は D_R の台に入らず, P でもない Weierstrass 点全体を動くものとする.

最後にそれ以外の場合, $R = (x(R), y(R)), y(R) \neq 0$ と書けるが, この場合 D_R は次のように記述できる: d_R 未満の次数を持つ k 係数多項式 $h_R(x)$ であって,

$$D_R = \sum_\alpha (\alpha, h_R(\alpha)) - d_R(P)$$

を満たすものが存在する. ここに α は $x(R)$ と k 上共役な k^s の元をわたるものとする. この場合, g_R を x の最小多項式とすれば,

$$\begin{aligned}\kappa(\overline{D_R}) &= \prod_\alpha (\alpha - \theta) \\ &= (-1)^{\deg g_R} g_R(\theta) \\ &= g_R(\theta) \quad \in L^\times / k^\times L^{\times 2}\end{aligned}$$

である. これらの積として, $\kappa(\overline{D})$ が定義されることになる.

二次形式 $Q_{i,\delta}$ の構成

今 $\overline{D}$ を適当に $J_C[2](k)$ の元で動かせば, 各 P_i は P 以外の Weierstrass 点を取らない, つまり D が Ω' に台を持たないようにできることに注目しよう. D が Ω' に台を持たない場合, 次のような多項式 $g_D(x), h_D(x) \in k[x]$ が存在する.

> g_D は f と素なモニック多項式で, 次数について $0 \leq \deg h_D < \deg g_D \leq g$ を満たし, かつ $\overline{D}$ は
>
> $$D = \sum_\alpha (\alpha, h_D(\alpha)) - (\deg g_D)\,(P)$$
>
> の属する因子類となる. ここで α は g_D の根を走るものとする.

この g_D を用いて, κ は次のように表される:

$$\overline{D} \mapsto g_D(\theta).$$

したがって, $\delta \in L^\times$ の $L^\times/k^\times L^{\times 2}$ における像 $\overline{\delta}$ が κ の像であるためには, ある $u \in L^\times, \overline{\gamma} \in \kappa(J_C[2](k))$ と $a \in k^\times$ を用いて,

$$a\gamma\delta u^2 = g_D(\theta)$$

という等式が成立することが必要である (ここで各 $\overline{\gamma} \in L^\times/k^\times L^{\times 2}$ について代表元 $\gamma \in L^\times$ を勝手に取った．以降では同様の記法を他の対象についても使う場合がある)．L の k-基底 $\{\theta^i\}_{0\le i\le 2g}$ を用いて, $u = \sum_{i=0}^{2g} u_i\theta^i$ と表したとき, 上の方程式は

$$a\gamma\delta\left(\sum_{i=0}^{2g} u_i\theta^i\right)^2 = g_D(\theta) \tag{3.1}$$

と書き直すことができる．さらに左辺を $\{\theta^i\}_{0\le i\le 2g}$ の k-係数線型和で表し, 両辺の θ^i の係数を比較することで, 左辺の u_i $(0 \le i \le 2g)$ についての L の中での方程式とみることができる．

今, 具体的にこの条件を書き下すことにしよう．L の k-基底 $\{\theta^i\}_{0\le i\le 2g}$ の双対基底を $\{\check{\theta}_i\}_{0\le i\le 2g}$ とする．これらを (3.1) の左辺に作用させた場合, u_i の 2 次形式が現れる．これを $Q_{a\gamma\delta,i}(u)$ とおこう．すなわち,

$$Q_{a\gamma\delta,i}(u) := \check{\theta}_i\left(a\gamma\delta\left(\sum_{i=0}^{2g} u_i\theta^i\right)^2\right).$$

このとき g_D は高々 g 次式であるので, まず次の等式が全て成立しなくてはならない．

$$\begin{aligned} &Q_{a\gamma\delta,i}(u) = 0 \quad (g+1 \le i \le 2g) \\ \Leftrightarrow\ &Q_{\gamma\delta,i}(u) = 0 \quad (g+1 \le i \le 2g) \end{aligned}$$

これらを満たす $u = (u_i)_{0\le i\le 2g}$ について, 座標を一斉に $a \in k^\times$ 倍しても同じ等式が満たされるので, 上の g 個の等式は, 射影空間 $\mathbb{P}(\mathrm{Res}_{L/k}\,\mathbb{A}^1)$ の代数的部分集合 $V_{\gamma\delta}$ を定める．つまり

$$V_{\gamma\delta} = \left\{u = (u_0 : u_1 : \cdots : u_{2g}) \in \mathbb{P}(\mathrm{Res}_{L/k}\,\mathbb{A}^1) \mid Q_{\gamma\delta,i}(u) = 0 \quad (g+1 \le i \le 2g)\right\}.$$

もしこの $V_{\gamma\delta}$ が, どの $\overline{\gamma} \in L^\times/k^\times L^{\times 2}$ についても k-有理点を持たなければ, $\overline{\delta}$ が κ の像に入らないことが言える．しかしある $V_{\gamma\delta}$ が k-有理点を持つからと言って, $\overline{\delta}$ が κ の像である, あるいは Selmer 群の元から来ているとは言えない．$V_{\gamma\delta}$ のいずれかに k-有理点があることが, それらの必要条件にしかなっていないためである．

注．　Bruin–Flynn の論文 [1] では, k が代数体である場合に, さらに残りの $Q_{\delta,i}$ についても h_D を用いて条件を定式化することで, 代数的集合 T_δ を構成している．これについても説明しておく．以下では k は代数体と仮定する．$g_D(T)$ を $k(u_0, u_1, \ldots, u_{2g})$-係数の多項式とみて,

$$M := k(u_0, u_1, \ldots, u_{2g})[T]/(g_D(T))$$

とし, T の像を β とおく．$y^2 = f(x)$ であるから, M の中で

$$f(\beta) = h_D(\beta)^2$$

が成立する．ここで有限群 $\kappa(J_C(k)_{\mathrm{tors}})$ がすべてわかっているという仮定をおこう．すると $\overline{D}$ は torsion 元でない場合を扱えば十分である．このとき $\kappa(\overline{D'}) = \kappa(\overline{D})$ を満たす k-有理的な因子類 $\overline{D'}$ で，ある代表因子 D' についての $g_{D'}$ が g 次式であるようなものが存在する ([1, Remark 5.10])．したがって M は g 次代数であるとしてよい．

この式についても，L の時と同様に基底 $\{\beta^j\}_{0\leq j\leq g-1}$ の係数を比較することにしよう．まずは $\overline{\varepsilon} \in \kappa(J_C(k)_{\mathrm{tors}})$ が 1 の場合を考える．$h_D(x) = \sum_{i=0}^{\deg h_D} y_i x^i$ とおいたとき，左辺の β^j の係数は u_i の有理関数 $F_{\delta,j}(u)$ で，右辺の係数は u_i, y_i の有理関数 $Y_{\delta,j}(u,y)$ である．さらにそれぞれの係数は分子と分母が u_i に関する斉次式で，分子と分母の次数が等しい．これから次の代数的集合が well-defined である:

$$T_\delta := \left\{ (u,y) \in \mathbb{P}(\mathrm{Res}_{L/k}\,\mathbb{A}^1) \times \mathrm{Res}_{M/k}\,\mathbb{A}^1 \;\middle|\; \begin{array}{l} Q_{\delta,i}(u) = 0 \quad (g+1 \leq i \leq 2g), \\ F_{\delta,j}(u) = Y_{\delta,j}(u,y) \quad (0 \leq j \leq g-1) \end{array} \right\}.$$

$\overline{\varepsilon} \neq 1$ のときは，$T_{\delta\varepsilon}$ が同様に構成される．

このときある $\overline{\varepsilon} \in \kappa(J_C(k)_{\mathrm{tors}})$ について $T_{\delta\varepsilon}$ に k-有理点が存在することと，$\overline{\delta}$ が κ の像になっていることは同値である．これを用いて Bruin–Flynn([1]) は，種数が 2 の超楕円曲線の無限族で，それぞれのメンバーが非自明な Tate–Shafarevich 群を持つものを構成している．

§ 4. 2 次超曲面の完全交叉

前節で構成した対応を整理しよう．k 上有理的な Weierstrass 点をもつ超楕円曲線 C をとる．まずこの Jacobi 多様体の 2-torsion $J_C[2]$ から作られるガロアコホモロジー群の元 $\eta \in H^1(G_k, J_C[2])$ について，エタール k-代数 L と生成元 θ，および $\overline{\delta} \in L^\times/k^\times L^{\times 2}$ の三つ組を構成した．次にこの三つ組から，各 $\overline{\gamma} \in \kappa(J_C[2](k))$ ごとに，射影的代数的集合 $V_{\delta\gamma} \subset \mathbb{P}(\mathrm{Res}_{L/k}\,\mathbb{A}^1)$ を構成したのであった (前節と同様，$\delta, \gamma \in L^\times$ はそれぞれ $\overline{\delta}, \overline{\gamma}$ の勝手な代表元である)．この対応は k が標数 2 でない完全体であれば構成できる．

$$\text{(4.1)} \qquad \big(C, \eta \in H^1(G_k, J_C[2])\big) \mapsto (L, \theta, \overline{\delta} \in L^\times/k^\times L^{\times 2}) \mapsto \{V_{\delta\gamma}\}_{\overline{\gamma}\in\kappa(J_C[2](k))}.$$

V_δ は $\delta\left(\sum_{i=0}^{2g} u_i\theta^i\right)^2$ の基底 $\{\theta^i\}_i$ による表示で，$i = g+1, g+2, \dots, 2g$ に対する θ^i の係数が 0 になるような $u = (u_0 : u_1 : \cdots : u_{2g}) \in \mathbb{P}(\mathrm{Res}_{L/k}\,\mathbb{A}^1)$ のなす代数的集合であった．それぞれの係数は u_i らの 2 次式になるので，これらは 2 次式 g 個の共通零点とも言える．

さてこれらの g 個の 2 次式のうち，$i = 2g-1, 2g$ の共通零点だけを取り出してみよう．前節の記号 $Q_{\delta,i}$ を使うと，

$$X_\delta := \left\{ u = (u_0 : u_1 : \cdots : u_{2g}) \in \mathbb{P}(\mathrm{Res}_{L/k}\,\mathbb{A}^1) \mid Q_{\delta,2g}(u) = Q_{\delta,2g-1}(u) = 0 \right\}$$

である．この代数多様体について，次のことが分かる．

命題 4.1. X_δ は $Q_{\delta,2g}$ と $Q_{\delta,2g-1}$ から定まる 2 次超曲面 2 つの滑らかな完全交叉である.

種数 g が 2 の場合は $X_\delta = V_\delta$ であるが, さらにこの場合は特殊な意味を持つ. [3] と [8] の結果を要約しておこう.

まず J_C を C の Jacobi 多様体とすると, 種数 2 の場合は J_C は Abel 曲面である. これの -1 倍写像 $[-1]\colon J_C \to J_C$ による商多様体 (=特異 Kummer 曲面) $\mathcal{X}$ を考えると, $\mathcal{X}$ は $[-1]$ の固定点 $J_C[2]$ の像である 16 個の通常 2 重点を持つ.

そこでこの 16 点において $\mathcal{X}$ のブローアップを考えたものが非特異化 Kummer 曲面 $\mathcal{Y}$ である. これは J_C の $J_C[2]$ でのブローアップ J' に -1 倍写像を延長したとき, それによる商多様体になっている. $\mathcal{Y}$ はある線型系を用いて $\mathbb{P}^5_k$ に埋め込むことができ, その線型系の k^s-基底として Ω と Galois 同変なもの $\{c_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ を取ることができる.

今 C 上には k-有理的な Weierstrass 点 P が存在するため, c_P を線型系の k-基底の一部として取ることができる. このとき $\mathbb{P}^5_k$ から座標 c_P を無視することで, 有理写像である射影

$$\pi\colon\ \mathbb{P}^5_k \dashrightarrow \mathbb{P}^4_k$$

ができる. この π で $\mathcal{Y}$ を送ると, その像が先に構成した $\overline{\delta} = 1 \in L^\times/k^\times L^{\times 2}$ に対応する X_1 となるのである (なお $\mathcal{Y}$ 上では π は有理写像ではなく射になっている). またこの構成は初めの J_C を, $\overline{\delta}$ に対応する J_C の torsor A_δ に置き換えても同様に働き, これによってできる 2 次超曲面 2 つの完全交叉が X_δ となる ([8]). 図式としてまとめると,

$$\begin{tikzcd}
A'_\delta \arrow[r, "/[-1]"] \arrow[d] & \mathcal{Y}_\delta \arrow[r] \arrow[d] & X_\delta \\
A_\delta \arrow[r, "/[-1]"] & \mathcal{X}_\delta &
\end{tikzcd}$$

のようになる.

さて $\mathbb{P}^4_k$ における 2 次超曲面 2 つの完全交叉は k 上定義された次数 4 の del Pezzo 曲面であり, これは k^s 上定義された 16 本の line を含む. これについて, [8] で Skorobogatov は次のことを示した.

命題 4.2 ([8, Section 2.2])**.** k を標数が 2 でない体で $\#k \geq 5$ とする. すべての $\mathbb{P}^4_k$ における 2 次超曲面 2 つの滑らかな完全交叉は, ある種数 2 の超楕円曲線 C と $\overline{\delta} \in H^1(G_k, J_C[2]) \cong L^\times/k^\times L^{\times 2}$ から構成した X_δ と k 上同型である. その中でも k-有理的な line を含む完全交叉の同型類は, $\overline{\delta}$ が単位元の場合に構成した完全交叉の同型類と一致する.

この結果を種数 g が一般の場合に拡張することを考えたい. しかし Skorobogatov の手法は種数 2 の場合の特殊事情, すなわち完全交叉が次数 4 の del Pezzo 曲面であることを本質的に使っている. そのため g が一般の場合には素直に拡張できないものと思われる.

筆者は V_δ の構成法と類似の手法で, 次の結果を得た.

定理 4.3 ([4, Theorem 0.1])**.** $g \geq 2$ を整数とし, k を $2g+1$ 個以上の元を持つ標数が 2 でない体とする. すべての $\mathbb{P}^{2g}_k$ における 2 次超曲面 2 つの滑らかな完全交叉は, ある種数 g の超楕円曲線 C と $\overline{\delta} \in H^1(G_k, J_C[2]) \cong L^\times/k^\times L^{\times 2}$ について, X_δ として構成したものと k 上同型である.

その中でも $\mathbb{P}^{g-1}_k$ と k 上同型な多様体を含む完全交叉の偏極付き同型類は, $\overline{\delta}$ が単位元の場合に構成した完全交叉の偏極付き同型類と一致する.

また k が完全体とすると, $\overline{\delta}$ が $J_C(k)/2J_C(k)$ の像に含まれる場合には, ある $\overline{\gamma} \in \kappa(J_C[2](k))$ について $X_{\gamma\delta}$ は k-有理点を持つ.

証明の概略を述べる. 最後の主張は, $\overline{\delta}$ が $J_C(k)/2J_C(k)$ から来る場合, ある $\overline{\gamma} \in \kappa(J_C[2](k))$ について $V_{\gamma\delta}$ が k-有理点をもつことから直ちに分かる.

最初の主張を示す際には, $\mathbb{P}^{2g}_k$ における 2 次超曲面 2 つの滑らかな完全交叉 X をとったとき, そこから k 上 $2g+1$ 次元のエタール k-代数 $L = k[\theta]$ と, $\overline{\delta} \in L^\times/k^\times L^{\times 2}$ が取り出せることを示す. この証明に, 高次合成則に関する Wood の手法を用いる ([9]). この三つ組 $(L, \theta, \overline{\delta})$ に対応する超楕円曲線 C と $H^1(G_k, J_C[2])$ の元の組から作った X_δ が X と同型になるのである.

第 2 の主張の証明は次の通りである. まず $u = (u_0 : u_1 : \cdots : u_{2g}) \in X_1$ は,

$$\check{\theta}_{2g}\left(\left(\sum_{i=0}^{2g} u_i\theta^i\right)^2\right) = \check{\theta}_{2g-1}\left(\left(\sum_{i=0}^{2g} u_i\theta^i\right)^2\right) = 0$$

を満たす元の集合なのだから, X_1 は $1, \theta, \ldots \theta^{g-1}$ で張られる k-ベクトル空間の射影化を含む. これが $\mathbb{P}^{g-1}_k$ と k 上同型な多様体である.

逆に X が $\mathbb{P}^{g-1}_k$ と k 上同型な多様体を含むと仮定する. 最初の主張からある $(L, \theta, \overline{\delta})$ が存在して,

$$X \cong \{u = (u_0 : u_1 : \cdots : u_{2g}) \mid Q_{\delta,2g}(u) = Q_{\delta,2g-1}(u) = 0\}$$

である. 仮定よりこの 2 次形式 $Q_{\delta,2g}(u), Q_{\delta,2g-1}(u)$ は, ある k 上の g 次元ベクトル空間 M を等方部分空間として持つ. 実はこの M が, ある $a \in L^\times$ について,

$$a, a\theta, \ldots, a\theta^{g-1}$$

の形の基底をもつことが示されるのである. ここから $\overline{\delta}$ を 1 としてよいことが従う.

主定理についていくつか注意をしておく. まず k 上同型な X_δ を与える C と $\eta \in H^1(G_k, J_C[2])$ の組は一意ではない. また X_δ を与える $(L, \theta, \overline{\delta})$ の組もまた一意でない. 実際, それぞれ次のような例がある.

例 4.4. $\mathbb{Q}$ 上の種数 4 の 2 つの超楕円曲線

$$C\colon y^2 = (x^3-1)(x^3-2)(x^3-3)$$
$$C'\colon y^2 = (x^3-1)\left(x^3-\frac{1}{2}\right)\left(x^3-\frac{1}{3}\right)$$

を考える．これらの C と C' からは, ガロアコホモロジーの元 $\overline{\delta}, \overline{\delta}'$ を適当に取れば, $\mathbb{Q}$ 上で同型な偏極付き多様体 $X_\delta, X_{\delta'}$ を作ることができる．しかし C と C' は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上でも同型ではない．これは二つの曲線を $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ の二重被覆と見たとき, 分岐点の集合は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の一次分数変換で移り合わないが, それぞれの分岐点の集合から無限遠点を除くと一次分数変換 $z \mapsto \frac{1}{z}$ で移り合うことによる.

例 4.5. k を有理数体 $\mathbb{Q}$ に 1 の 5 乗根 ζ_5 を添加した体 $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ とし, $L = k[x]/(x^5-1)$ と x の像 θ を考える．このとき $(L, \theta, \overline{\delta})$ と $(L, \zeta_5\theta, \overline{\delta})$ が $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ 上同型な完全交叉 X を定めるように, $\overline{\delta} \in L^\times/k^\times L^{\times 2}$ を取ってくることができる．これは θ と $\zeta_5\theta$ が k 上共役, かつ k 上の 1 次分数変換で移り合っていることによる．$\mathbb{Q}$ 上でも類似の例を無数に構成することができる.

あるガロアコホモロジーの元 $\overline{\delta}$ が Selmer 群の元であることを確かめるためには, $T_{\delta\gamma}$ が局所的に有理点を持つ $\overline{\gamma} \in \kappa(J_C[2](k))$ の存在を確かめれば良い．しかし $X_{\delta\gamma}$ に有理点があっても $T_{\delta\gamma}$ に有理点があるとは限らないため, $X_{\delta\gamma}$ だけでは $\overline{\delta}$ が Selmer 群の元から来るかどうかを完全に決定することができない.

一方でたとえば $\overline{\delta}$ が Selmer 群の元であることがわかっているとき, 任意の $\overline{\gamma} \in \kappa(J_C[2](k))$ について $X_{\gamma\delta}$ が k-有理点を持たなければ, Theorem 4.3 より $\overline{\delta}$ が $J_C(k)/2J_C(k)$ から来ないことが分かり, 従って $\overline{\delta}$ が非自明な Tate–Shafarevich 群の元を与えることは分かる．このようにして, Selmer 群の元が非自明な Tate–Shafarevich 群の元を与える (必要条件でない) 十分条件が得られることにも注意しておく (種数 2 の場合の具体的な計算例については [1] を参照).

References

[1] Bruin, N. and Flynn, E. V., Exhibiting Sha[2] on hyperelliptic Jacobians, *J. Number Theory,* **118 (2)**(2006), 266–291.

[2] Coray, D. and Manoil, C. and others, On large Picard groups and the Hasse principle for curves and K3 surfaces, *Acta. Arith.* **76 (2)**(1996), 165–189.

[3] Flynn, E. V., Testa, D. and van Lujik, D., Two-coverings od Jacobians of Curves of Genus Two, *Proc. of the London Math. Soc.* **104 (2)**(2012), 387–429.

[4] Ishitsuka, Y., Complete intersection of two quadrics and Galois cohomology, preprint 2012, arXiv:1205.5426v2.

[5] Poonen, B. and Schaefer, E. F., Explicit descent for Jacobians of cyclic covers of the projective line, *J. Reine Angew. Math.* **488**(1997), 141–188.

[6] Schaefer, E. F., 2-descent on the Jacobians of hyperelliptic curves, *J. Number Theory* **51** **(2)**(1995), 219–232.
[7] Silverman, J. -H., The Arithmetic of Elliptic curves, Graduate Texts in Mathematics **106**, Springer-Verlag, 2009.
[8] Skorobogatov, A., Del Pezzo surfaces of degree 4 and their relation to Kummer surfaces, *L' Enseignement Math.* **56**(2010), 73–85.
[9] Wood, M. E. M., Moduli spaces for rings and ideals, Princeton University, 2009.