*RIMS Kôkyûroku Bessatsu*
**B51** (2014), 375–433

# 多重ゼータ値の Hoffman 基底 (The Hoffman basis of the space of multiple zeta values)

By

安田 正大 (Seidai YASUDA)*

**Abstract**

Recently Brown [Br1] gave a proof of a conjecture by Hoffman [Hof2] that the $\mathbb{Q}$ vector space generated by the multiple zeta values is generated by the set, called the Hoffman basis, of multiple zeta values of a certain special type. In this article we give a survey of this topic including an outline of the proof by Brown [Br1]. At the end of the article we also give some applications of the result and mention some open problems.

**Contents**



Received December 11, 2013. Revised April 2, 2014, May 5, 2014, August 11, 2014 and August 19, 2014.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11M32, 11G55
*Key Words*: Multiple zeta values, Mixed Tate motives.
Supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research 24540018.
*Department of Mathematics, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan.
e-mail: `s-yasuda@math.sci.osaka-u.ac.jp`

# Part I
# 結果の紹介

## §1. はじめに

### §1.1. 多重ゼータ

和

$$\sum_{m_1>\cdots>m_n>0} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}} \tag{1.1}$$

のことを多重ゼータとよび, 記号 $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ で表わす. ここで $n$ は 0 以上の整数, $k_1,\dots,k_n$ は 1 以上の整数であり, (1.1) において, $m_1,\dots,m_n$ は不等式 $m_1 > \cdots > m_n > 0$ をみたす整数を動く. また, 特に断らない限り $k_1 \geq 2$ であるとも仮定する. ただし $n=0$ の場合は, $k_1 \geq 2$ などの仮定および和 (1.1) の意味を次のように理解する:

- $n=0$ のとき, 1 以上の整数 $k_1,\dots,k_0$ の組 $(k_1,\dots,k_0)$ がただ一つ存在する. さらにそれは $k_1 \geq 2$ をみたす,
- $n=0$ のとき, $m_1 > \ldots > m_0 > 0$ をみたす整数 $m_1,\dots,m_0$ の組 $(m_1,\dots,m_0)$ がただ一つ存在する. さらにそれは
$$\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_0^{k_0}} = 1$$
をみたす. 特に $\zeta(k_1,\dots,k_0)=1$ である.

多重ゼータ $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ は $k_1,\dots,k_n$ を並べる順番に依存することに注意しておく. たとえば $\zeta(k_1,k_2,k_3)$ と $\zeta(k_2,k_3,k_1)$ とを同一視することは一般には許されない.

## § 1.2. 空間 $Z$

**1.2.1.** 以下では実数についての基本的な知識を読者に仮定する. 実数の集合を $\mathbb{R}$ で表わし, 円周率の 2 乗を $\pi^2 \in \mathbb{R}$ で表わす. 和 (1.1) は $n \geq 1$ のとき無限和となるが, $k_1 \geq 2$ を仮定すると, この無限和が実数の中で収束することが示せる. $n \geq 1$ のときは和 (1.1) をこのように解釈し, 以下では $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ を実数とみなす. 実数とみなした $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ を多重ゼータ値とよぶことにする. 多重ゼータ値の生成する $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $Z$ で表わす.

$n \leq 2$ に対する多重ゼータ値の研究は古く Euler にまでさかのぼる. 一般の多重ゼータ値について系統的な研究論文は Hoffman [Hof1] が最初と思われる. ただし [Hof1] の謝辞によると, [Hof1] における多重ゼータ値の研究は同僚の Moen による先行研究に触発されて始まったとのことである. 論文 [Hof1] では $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ は $A(k_1,\dots,k_n)$ と書かれ, 多重調和級数とよばれている. 記号 $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ および多重ゼータ値という用語が文献に現れるのは, Zagier の論文 [Z1] のようである. ただし Zagier [Z1] では $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ のことを $\zeta(k_n,\dots,k_1)$ と書いている. 論文 [Z1] は, 多重ゼータ値の反復積分表示 (8 節を参照), および重さを固定した多重ゼータ値のなす $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の次元予想 (後述の予想 6.2) が与えられている点で画期的であり, その後の多重ゼータ値に関する数多くの研究の源泉となった.

## § 1.3. Hoffman 基底

多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\dots,k_n)$ は, 条件

- $k_1,\dots,k_n \in \{2,3\}$

をみたすとき Hoffman 基底の一員とよばれる ($n=0$ のときはこの条件が満たされていると理解する). Hoffman [Hof2, p. 493, Conjecture C] は, Hoffman 基底が $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として $Z$ を生成することを予想した. Hoffman [Hof2] は予想として述べていないが, より強く, Hoffman 基底が $Z$ の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての基底となるとも期待できる.

## §1.4. 本稿で紹介する主結果

**1.4.1.** 最近 Brown [Br1] は, 上で述べた Hoffman の予想を肯定的に解決した.

**定理 1.1** (Brown [Br1])**.** $Z$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として Hoffman 基底で生成される.

本稿の主要な目的は, 定理 1.1 の証明を解説することである. 他に本稿では, 定理 1.1 の背景, 関連する結果やそれらの帰結などについても述べる. Brown は最近, 本稿で紹介する定理 1.1 の他にも次々と興味深い結果を出しており, 多重ゼータ値関係の結果だけでも, [Br5], [Br2], [Br4], および未発表の分母つき結合子の標準的構成に関する結果が挙げられる. 本稿では紙面の関係もあって, これらについては [Br2], [Br4] について少し触れる以外は全く紹介しないことをお詫びしておく.[1]

**1.4.2.** Brown が証明した結果は実際には定理 1.1 よりも強い. 準備が必要となるので結果の正確な紹介は後節で行うが, 大体の感じを述べると次のようになる: モチヴィック多重ゼータ値のなす $\mathbb{Q}$ ベクトル空間はモチヴィック Hoffman 基底で生成される. つまり強い形の結果は定理 1.1 のところどころにモチヴィックという語を挿入したものであり, 定理 1.1 はその強い結果を脱モチヴィック化することにより得られる. $k_1,\ldots,k_n$ を固定した後であるにも関わらず, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\ldots,k_n)$ は, じつは隠れた変数についての関数になっている. 主張のところどころに絶妙に挿入されたモチヴィックという語は, この隠れた変数の住む領域を見極めたということの証に他ならない.

**1.4.3.** 強い形の結果を少し言い換えると, 次のような感じの主張が導かれる (準備が必要となるので正確な主張は今は述べない): $\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフのなす淡中圏の淡中基本群から, 射影直線引く 3 点 $M_{0,4}$ の (幾何的) 基本群の副巾単完備化の外部自己同型であって適当な条件を満たすもののなす群スキームへの, アフィン群スキームの射は閉埋め込みである. 後者の主張は, $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群から, $M_{0,4}$ の幾何的基本群の副有限完備化への連続準同型が単射である, という Belyĭ の結果 [Bel] の副代数群版とみなせる.[2] このように言い換えた主張はいろいろな応用をもたらす. 特に Deligne・伊原予想 ([I1], [I2] を参照) が, この主張を用いて肯定的に解決された.

[1] また, 多重ゼータ値関係の結果ではないかもしれないが, [Br3] も面白い結果であり, 総実代数体の Dedekind zeta 関数の特殊値の研究への, 将来的な応用の可能性を秘めている.

[2] 筆者は以前, この見方を山下剛氏から教わりました.

## §2. 記号の約束

非負整数全体, 正整数全体のなす集合をそれぞれ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ であらわす. スキーム $X$ に対し $\mathcal{O}(X) = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ とおく. $S$ を集合, $R$ を可換環とするとき, $R[S]$ で, $S$ を基底とする自由 $R$ 加群を表わす. $s \in S$ のとき, $s$ を $R[S]$ の元とみなしたもののことを $[s]$ で表わす. ただし $T$ を変数とする $R$ 係数 1 変数多項式環のことを $R[T]$ を書くこともある. 集合の圏を Sets であらわす. $F$ を体とするとき, $F$ ベクトル空間のなすアーベル圏を $\mathrm{Vect}_F$ で表わす. 有限次元 $F$ ベクトル空間のなす $\mathrm{Vect}_F$ の充満部分圏を $\mathrm{Vect}_F^f$ で表わす. 有限次元次数付き $F$ ベクトル空間と次数 0 の同次写像のなすアーベル圏を $\mathrm{Vect}_F^{\mathrm{gr}}$ で表わす.

## §3. 多重ゼータ値

本節で多重ゼータ値を定義する. これは 1 節で既に導入済みであるが, 関連する記号を導入したいので定義を繰り返すことにする. 以下しばしば多重ゼータ値のことを MZV と略す.

### §3.1. インデックス

集合

$$I = \coprod_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (\overbrace{\mathbb{Z}_{\geq 1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\geq 1}}^{n \text{ times}}).$$

の元をインデックスとよぶ. $\Bbbk = (k_1, \ldots, k_n)$ をインデックスとするとき, 非負整数 $n$ を $\Bbbk$ の深さといい, 非負整数 $|\Bbbk| = k_1 + \cdots + k_n$ を $\Bbbk$ の重さとよぶ ($n = 0$ のときは $|\Bbbk| = 0$ と約束する). $|\Bbbk| = 0$ をみたすただ一つのインデックスを空インデックスとよび, 記号 $\emptyset$ で表わす.

### §3.2. 多重ポリログ

$\Bbbk = (k_1, \ldots, k_n)$ をインデックスとする. ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$ に対し,

$$\mathbf{x}^{\Bbbk} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$$

とおく. ただし $\Bbbk = \emptyset$, $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{Q}^0$ のときは $\mathbf{x}^{\Bbbk} = 1$ であると約束する.

集合 $\angle_n$ を

$$\angle_n = \{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \mid m_1 > \cdots > m_n > 0\} \tag{3.1}$$

で定める. ただし $n = 0$ のときは $\angle_n = \{0\}$ と約束する.

多重ポリログとよばれる, $\mathbb{Q}$ 係数の 1 変数形式べき級数 $\mathrm{Li}_{\Bbbk}(z) = \mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_d}(z)$ を

$$\mathrm{Li}_{\Bbbk}(z) = \sum_{\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_n)\in\angle_n} \frac{z^{m_1}}{\mathbf{m}^{\Bbbk}}$$

によって定める. 上に書いた約束により $k = \emptyset$ のとき $\mathrm{Li}_{\Bbbk}(z) = 1$ となる.

### § 3.3. 多重ゼータ値

インデックス $\Bbbk = (k_1, \dots, k_n)$ が収束インデックスであるとは, $\Bbbk = \emptyset$ または $k_1 \geq 2$ であることをいう. 収束インデックス全体のなす集合を $I^c$ で表わす.

$\Bbbk = (k_1, \dots, k_n) \in I^c$ を収束インデックスとすると, 級数 $\mathrm{Li}_{\Bbbk}(z)$ に $z = 1$ を代入して得られる無限和は絶対収束する. この値を $\zeta(\Bbbk)$ または $\zeta(k_1, \dots, k_n)$ で表わす. 定義より

$$\zeta(\Bbbk) = \sum_{\mathbf{m}\in\angle_n} \frac{1}{\mathbf{m}^{\Bbbk}} = \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

である.

## § 4. ワード

$S$ を集合とするとき, $S$ の元で生成される (非可換) 自由モノイドを $W(S)$ で表わす. $W(S)$ の単位元を $e$ で表わす. $W(S)$ の元を $S$ におけるワードとよぶ. $S$ が異なる 2 元 0, 1 からなる集合 $S = \{0, 1\}$ のとき $W(\{0, 1\})$ のことを単に $W$ で表わす. 本稿では $S = \{0, 1\}$ の場合を主に扱う.

### § 4.1. ワードの綴り

$S$ を集合とする. 勝手な元 $w \in W(S)$ は, 定義により

$$w = w_1 \cdots w_k$$

(ここで $k \geq 0$ は整数で $w_1, \dots, w_k$ は $S$ の元) という形をしている. $w_1 \cdots w_k$ という $w$ の表記を $w$ の綴りとよぶことにする. 整数 $k$ をワード $w$ の長さとよび, 記号 $\ell(w)$ で表わす.

### § 4.2. ワードの連結

$S$ を集合とする. $v, w \in W(S)$ のとき, $v$ の右側に $w$ をつなげて得られるワードを $vw$ で表わす (13.5 項で, ワードの接合 $v \circ w$ という少し異なる概念を導入するので混同しないように注意する).

### § 4.3. ワードの反転

$S$ を集合とする. $w \in W(S)$ とし, $w = w_1 \cdots w_k$ を $w$ の綴りとする. このときワード $w_k \cdots w_1$ を $w$ の順序反転とよび記号 $(w)^{\leftrightarrow}$ で表わす. さらに $S = \{0, 1\}$ であると仮

定する. $i=1,\ldots,k$ に対し, $w_i'\in\{0,1\}$ を $w_i'=1-w_i$ で定めたとき, ワード $w_1'\cdots w_k'$ を $w$ の文字反転とよび, 記号 $(w)^{\updownarrow}$ で表わす. $((w)^{\leftrightarrow})^{\updownarrow}=((w)^{\updownarrow})^{\leftrightarrow}=w_k'\cdots w_1'$ である. このワードを $w$ の双対とよび, 記号 $\iota(w)$ で表わす.

### §4.4. 部分モノイド $W_1\subset W$

$W$ の元のうち, $e$ であるかまたは最後が 1 で終わるものの全体を $W_1$ で表わす. $W_1$ の元のうち, $e$ であるかまたは最初が 0 で始まるものの全体を ${}_0W_1$ で表わす. $W_1$ は $W$ の部分モノイドであり, ${}_0W_1$ は $W_1$ の部分モノイドである.

### §4.5. インデックスとワードとの関係

$\Bbbk=(k_1,\ldots,k_n)$ をインデックスとするとき, $\Bbbk$ に対応するワードとよばれるワード $w(\Bbbk)\in W$ を,

$$w(\Bbbk)=\overbrace{0\cdots\cdots0}^{k_1-1\text{ times}}1\overbrace{0\cdots\cdots0}^{k_2-1\text{ times}}1\cdots\cdots\cdots1\overbrace{0\cdots\cdots0}^{k_n-1\text{ times}}1$$

で定める (ただし $\Bbbk=\emptyset$ のときは $w(\Bbbk)=e$ と約束する). 定義から $w(\Bbbk)$ は $W_1$ に属する長さ $|\Bbbk|$ のワードとなる. また任意の $w\in W_1$ に対し, $w(\Bbbk)=w$ となるようなインデックス $\Bbbk$ がただ一つ存在する. このような $\Bbbk$ を $\Bbbk(w)$ で表わす. $w\in W_1$ のとき, $\Bbbk(w)$ が収束インデックスであることと $w\in{}_0W_1$ とが同値になる.

## §5. シャッフルと準シャッフル

### §5.1. $(k,k')$ シャッフル

非負整数 $k\geq 0$ に対し, 全順序集合 $\{1,\ldots,k\}$ を $[1,k]$ とおく. とくに $k=0$ ならば $[1,k]$ は空集合である. 非負整数 $k,k'\geq 0$ に対し, $[1,k]$ と $[1,k']$ との (半順序集合としての) 直和 $[1,k]\amalg[1,k']$ を考える.

$$\iota_1:[1,k]\hookrightarrow[1,k]\amalg[1,k']$$

および

$$\iota_2:[1,k']\hookrightarrow[1,k]\amalg[1,k']$$

を, それぞれ第 1 成分, 第 2 成分への埋め込みとする. 半順序を保つ全単射

$$h:[1,k]\amalg[1,k']\to[1,k+k']$$

を $(k,k')$ シャッフルとよぶ. $(k,k')$ シャッフル全体のなす集合を $\mathrm{Sh}(k,k')$ で表わす.

### §5.2. $(n,n')$ 準シャッフル

$n,n'\geq 0$ を非負整数とする.

- $0 \leq n'' \leq n+n'$ をみたす整数 $n''$, および
- 全射 $h : [1,n] \amalg [1,n'] \to [1,n'']$

のなす組 $\widetilde{h} = (n'', h)$ であって, $h \circ \iota_1$ および $h \circ \iota_2$ が順序を保つ単射となるもののことを $(n,n')$ 準シャッフル, または $(n,n')$ スタッフルとよぶ. $(n,n')$ 準シャッフル全体のなす集合を $\mathrm{QSh}(n,n')$ で表わす.

## § 5.3. 2 つのインデックスの準シャッフル

$$\Bbbk = (k_1, \ldots, k_n), \Bbbk' = (k'_1, \ldots, k'_{n'}) \in I$$

を, それぞれ深さ $n$, $n'$ のインデックスとする. $(n,n')$ 準シャッフル $\widetilde{h} = (n'', h)$ に対し, 深さ $n''$ のインデックス $\widetilde{h}(\Bbbk, \Bbbk') = (k''_1, \ldots, k''_{n''})$ を $i = 1, 2, \ldots, n''$ に対し,

$$k''_i = \sum_{h \circ \iota_1(j) = i} k_j + \sum_{h \circ \iota_2(j) = i} k'_j$$

とおくことによって定義する. 定義から $|\widetilde{h}(\Bbbk, \Bbbk')| = |\Bbbk| + |\Bbbk'|$ である.

## § 5.4. インデックスの調和積

非負整数 $k$ に対し, $I$, $I^c$ に属するインデックスであって重さが $k$ のもの全体をそれぞれ $I_k$, $I^c_k$ で表わす.

$k, k'$ を非負整数とする. $\Bbbk \in I_k, \Bbbk' \in I_{k'}$ に対し, $\Bbbk$, $\Bbbk'$ の深さをそれぞれ $n$, $n'$ とし, $\Bbbk * \Bbbk' \in \mathbb{Z}[I_{k+k'}]$ を

$$\Bbbk * \Bbbk' = \sum_{\widetilde{h} \in \mathrm{QSh}(n,n')} \widetilde{h}(\Bbbk, \Bbbk')$$

によって定める. $\Bbbk * \Bbbk'$ を $\Bbbk$ と $\Bbbk'$ との調和積とよぶ. これを双加法的に延ばして準同型

$$\mathbb{Z}[I_k] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[I_{k'}] \to \mathbb{Z}[I_{k+k'}]$$

を得る. $k$, $k'$ を動かして直和をすることにより, 次数つきアーベル群の準同型

$$\mathbb{Z}[I] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[I] \to \mathbb{Z}[I]$$

が得られる. この写像によって, $\mathbb{Z}[I] = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{Z}[I_k]$ は $[\emptyset]$ を単位元とする次数付き可換環の構造を持つ. また $\mathbb{Z}[I^c] = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{Z}[I^c_k]$ は $\mathbb{Z}[I]$ の次数つき部分環となる.

## § 5.5. 2 つのワードのシャッフル

$S$ を集合とする. $k, k' \geq 0$ を非負整数, $v = v_1 \cdots v_k, w = w_1 \cdots w_{k'} \in W(S)$ をそれぞれ長さ $k$, $k'$ のワードとする. $(k,k')$ シャッフル $h$ に対し, 長さ $k+k'$ のワード

$h(v,w) \in W(S)$ を $i=1,2,\ldots,k+k'$ に対し

$$h(v,w)_i = \begin{cases} v_j,\ h(\iota_1(j)) = i \text{ のとき}, \\ w_j, h(\iota_2(j)) = i \text{ のとき} \end{cases}$$

とおき, さらに

$$h(v,w) = h(v,w)_1 \cdots h(v,w)_{k+k'}$$

とおくことによって定める.

### §5.6. ワードのシャッフル積

$S$ を集合とする. 非負整数 $\ell \geq 0$ に対し, $\mathbb{Z}[W(S)]_\ell$ で 長さ $\ell$ のワード全体の集合を基底とする自由アーベル群を表わす. $v, w \in W(S)$ をそれぞれ長さ $k$, $k'$ のワードとするとき, $v ш w \in \mathbb{Z}[W(S)]_{k+k'}$ を

$$v ш w = \sum_{h \in \mathrm{Sh}(k,k')} h(v,w)$$

によって定める. これを双加法的に延ばして写像

$$\mathbb{Z}[W(S)]_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[W(S)]_{k'} \to \mathbb{Z}[W(S)]_{k+k'}$$

を得る. これによって $\mathbb{Z}[W(S)] = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{Z}[W(S)]_k$ は $[e]$ を単位元とする次数付き可換環の構造を持つ. $S = \{0,1\}$ のとき, $\mathbb{Z}[W_1]$ は $\mathbb{Z}[W]$ の次数つき部分環となり, さらに $\mathbb{Z}[{}_0W_1]$ は $\mathbb{Z}[W_1]$ の次数付き部分環となる.

## §6. 予想

この節では, 多重ゼータ値の生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間についての予想, および知られている結果について述べる.

### §6.1. 空間 $Z_k$

集合 $\{\zeta(\Bbbk) \mid \Bbbk \in I_k^c\}$ の生成する $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $Z_k$ で表わす. 例えば $Z_0 = \mathbb{Q}$, $Z_1 = 0$, $Z_2 = \mathbb{Q}\cdot\zeta(2)$ である. 集合 $I_k^c$ は有限集合である. 具体的には, $I_k^c$ の元の個数は, $k=0$ のとき 1, $k=1$ のとき 0, $k \geq 2$ のとき $2^{k-2}$ である. 特に $Z_k$ は有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間となる. 次の予想は広く信じられており, Goncharaov [Go1, Conjecture 1.1 a)] に明記されている. またこの予想の関数体類似が [Cha] によって証明されている.

**予想 6.1.** $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として, $Z = \sum_{k \geq 0} Z_k$ は $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ の直和になる.

後述するように, 多重ゼータ値は $\mathbb{Q}$ 上の混合モチーフの周期と解釈できる. 代数体上の代数曲線およびアーベル多様体の周期については, Grothendieck による超越性の予想 [Gro, p. 102, 脚注 (10)] がある. この超越性の予想は一般化されており [3], 一般化されたものも含めて周期に関する Grothendieck の予想とよばれる. 上の予想 6.1 は, 周期に関する Grothendieck の予想を, 多重ゼータ値の場合に特殊化して得られる主張からの帰結とみなすこともできる.

## §6.2. $\mathbb{Q}$ 代数 $Z^{\oplus}$

$k, k'$ を非負整数とすると, $\Bbbk \in I_k^c$, $\Bbbk' \in I_{k'}^c$ のとき, $\zeta(\Bbbk)\zeta(\Bbbk') \in Z_{k+k'}$ である. したがって $Z^{\oplus} = \bigoplus_{k\geq 0} Z_k$ は次数付き $\mathbb{Q}$ 代数の構造を持つ. このことには主に 2 通りの証明がある.

ひとつは調和積公式というものを使う方法である. $\Bbbk, \Bbbk' \in I^c$ を収束インデックスとし, $n$, $n'$ をそれぞれ $\Bbbk$, $\Bbbk'$ の深さとすると, 等式

$$\zeta(\Bbbk)\zeta(\Bbbk') = \sum_{\widetilde{h}\in \mathrm{QSh}(n,n')} \zeta(\widetilde{h}(\Bbbk, \Bbbk'))$$

が成り立つことが比較的容易に示せる. この等式を調和積公式とよぶ. 言いかえるとアーベル群の準同型 $\mathbb{Z}[I^c] \to Z$ を, $\Bbbk \in I^c$ を $\zeta(\Bbbk)$ に送ることによって定めると, この準同型は可換環の準同型になる. さらにこの準同型は $\mathbb{Z}[I_k^c]$ を $Z_k$ に送るので, 次数付き環の準同型 $\mathbb{Z}[I^c] \to Z^{\oplus}$ を誘導する.

もうひとつはシャッフル積公式というものを使う方法である. $\Bbbk, \Bbbk' \in I^c$ を収束インデックスとし, $w = w(\Bbbk), w' = w(\Bbbk') \in {}_0W_1$ を対応するワードとし, $|\Bbbk| = k$, $|\Bbbk'| = k'$ とおくと, 等式

$$\zeta(\Bbbk)\zeta(\Bbbk') = \sum_{h\in \mathrm{Sh}(k,k')} \zeta(\Bbbk(h(w, w')))$$

が成り立つことが, 8 節で述べる多重ゼータ値の反復積分表示を用い, 反復積分の積に関するよく知られた公式 ([Ree], [K, 命題 1.1.5]) を用いると示せる. この等式をシャッフル積公式とよぶ. 言いかえるとアーベル群の準同型 $\mathbb{Z}[{}_0W_1] \to Z$ を, $w \in {}_0W_1$ を $\zeta(\Bbbk(w))$ に送ることによって定めると, この準同型は可換環の準同型になる. さらにこの準同型は $\mathbb{Z}[{}_0W_1] \cap \mathbb{Z}[W]_k$ を $Z_k$ に送るので, 次数付き環の準同型 $\mathbb{Z}[{}_0W_1] \to Z^{\oplus}$ を誘導する.

## §6.3. 次元予想

$k \geq 2$ のとき $Z_k$ の次元は $2^{k-2}$ 以下であるが, 実は $Z_k$ の次元は $k$ が大きいとき $2^{k-2}$ よりもかなり小さくなる. 次が予想されている:

[3] 滑らかかつ射影的な多様体の周期については [La, p. 42–43] に予想がある. より一般の場合については例えば [A, 23.1] に予想が述べられている.

**予想 6.2** (Zagier [Z1]). 任意の整数 $k \geq 0$ に対し $\dim_{\mathbb{Q}} Z_k = d_k$ が成り立つ. ここで $d_k$ は漸化式

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_2 = 1,\ \text{かつ}\ k \geq 3\ \text{のとき}\ d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$$

で定まる整数, 言いかえれば

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \frac{1}{1 - t^2 - t^3}$$

で定まる整数である.

Goncharov [Go1] と寺杣 [Te] は, 予想 6.2 の等式について, 一方の不等式が成り立つことを証明した.

**定理 6.3** (Goncharov [Go1], 寺杣 [Te]). 任意の整数 $k \geq 0$ に対し $\dim_{\mathbb{Q}} Z_k \leq d_k$ が成り立つ.

定理 6.3 の証明は本稿の主要な内容である定理 1.1 の証明と深く関連している. 後の 12.6.4 で定理 6.3 の証明を述べる.

## §7. 主結果

### §7.1. Hoffman 基底

$I^{2,3} = \{\Bbbk = (k_1, \ldots, k_n) \in I \mid k_1, \ldots, k_n \in \{2, 3\}\}$ とおく. 定義から $\emptyset \in I^{2,3} \subset I^c$ である. 整数 $k \geq 0$ に対し, $I_k^{2,3} = I^{2,3} \cap I_k$ とおく. 集合 $\{\zeta(\Bbbk) \mid \Bbbk \in I_k^{2,3}\}$ に属する元を重さ $k$ の Hoffman 基底という. この集合の生成する $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $Z_k^{2,3}$ で表わす. 定義から $Z_k^{2,3}$ は $Z_k$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間となる. $I_k^{2,3}$ に属する元の個数はちょうど $d_k$ 個であることが分かるので, $Z_k^{2,3}$ の次元は $d_k$ 以下である.

### §7.2. 主結果

1 節でも触れたように, 本稿の主要な目的は, Hoffman [Hof2, p. 493, Conjecture C] が予想し Brown [Br1] によって証明された次の結果についての解説である

**定理 7.1** (Brown [Br1]). 任意の整数 $k \geq 0$ に対し $Z_k = Z_k^{2,3}$ が成り立つ.

注. 定理 7.1 から定理 6.3 が直ちに従うが, 定理 7.1 の証明に定理 6.3 の証明で使われる主要な議論を用いるため, 定理 7.1 を用いることにより定理 6.3 の新しい証明が得られるとは言い難い.

# Part II
# 準備. モチヴィック多重ゼータ値

## §8. 反復積分表示

12.6 項でモチヴィック版の多重ゼータ値を構成するが, その構成は, 多重ゼータ値が反復積分表示という, 級数表示とは異なる表示を持つという観察に基づいている. 本節では反復積分表示について説明する.

### §8.1. 準同型 $I_{0,z}$, $I_{1,z}$

形式べき級数 $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$ に対し,

$$\int_0 f(z)dz = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}z^n}{n}$$

とおく. これは例えば $\int_0^z f(w)dw$ のように, ダミーの変数 $w$ を導入して書くべきものであるかもしれないが, 以下で述べる反復積分ではこの操作を繰り返すため, 定義を展開すると変数がたくさん必要となり面倒なことになる. そこであえて $\int_0 f(z)dz$ という書き方を採用する. $\mathbb{Q}$ 線形な準同型

$$I_{0,z} : z\mathbb{Q}[[z]] \to z\mathbb{Q}[[z]], \quad I_{1,z} : \mathbb{Q}[[z]] \to z\mathbb{Q}[[z]]$$

を, それぞれ $f(z)$ を $\int_0 f(z)\frac{dz}{z}$, $\int_0 f(z)\frac{dz}{1-z}$ に送る準同型とする.

### §8.2. 多重ゼータ値の反復積分表示

$\Bbbk \in I^c$ を収束インデックスとし, $w(\Bbbk)$ を $\Bbbk$ に対応するワードとする. $w(\Bbbk)$ の綴りを $w(\Bbbk)=w_1\cdots w_k$ とすると, 3.2 項で導入した多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\Bbbk}(z)$ は次の表示を持つ:

$$\mathrm{Li}_{\Bbbk}(z) = I_{w_1,z} \circ I_{w_2,z} \circ \cdots \circ I_{w_k,z}(1). \tag{8.1}$$

線形作用素 $I_{0,z}$, $I_{1,z}$ を形式べき級数に対して導入したが, これらの作用素は半径 1 の複素開円板で正則な関数の原点でのべき級数展開となるような形式べき級数を保つ. 多重ゼータ値 $\zeta(\Bbbk)$ は多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\Bbbk}(z)$ の $z=1$ での値とみなせるから, 上の表示によって $\zeta(\Bbbk)$ の積分を用いた表示が得られる. これは Chen [Che] の反復積分を用いた $\zeta(\Bbbk)$ の表示とみなせるため, 多重ゼータ値 $\zeta(\Bbbk)$ の反復積分表示とよばれる.

### §8.3. 多重ゼータ値の周期としての解釈

反復積分表示を用いると, 多重ゼータ値 $\zeta(\Bbbk)$ が次のような積分表示を持つことが分かる.

$$\zeta(\Bbbk) = \int_D \eta$$

ここで $D$ は領域

$$D = \{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 > t_1 > \ldots > t_k > 0\}$$

であり,

$$\eta = \frac{(-1)^{w_1} dt_1}{t_1 - w_1} \wedge \cdots \wedge \frac{(-1)^{w_k} dt_k}{t_k - w_k}$$

である. 積分領域の境界に $\eta$ の特異点が存在しているため, この積分表示は取り扱いが少し難しいが, これを用いて, $\zeta(\mathbb{k})$ を $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}$ 上のとある代数多様体のコホモロジーから作られる混合 Hodge 構造の周期とみなすことができる. 次節で少し説明をするように, より正確には, この混合 Hodge 構造は $\mathbb{Z}$ 上の混合 Tate モチーフのなす圏 $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ のとある対象に実現関手を施して得られるものになっている.

## §9. 三角圏 $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$

$k$ を体とする. 本節では三角圏 $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ を導入する. この圏は $k$ 上の $\mathbb{Q}$ 係数混合モチーフの三角圏とよばれることもある. $k$ 上の $\mathbb{Q}$ 係数混合モチーフのなすアーベル圏が存在してそれをハートに持つような $t$ 構造の入った三角圏となっていてほしい, という期待が背後にあってこのようによばれるが, $k$ 上の $\mathbb{Q}$ 係数混合モチーフのなすアーベル圏が構成されているというわけではない. 三角圏 $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ を構成する方法はいくつか知られているが, ここでは [V2], [MVW] に倣って構成を行う. 異なる構成法が花村 [Ha1], [Ha2], Levine [Le3] によって与えられており, 他に Morel・Voevodsky [V1], [MV] の $\mathbb{A}^1$ ホモトピー理論に基づいた構成法もある. 少なくとも $k$ 上の代数多様体が特異点解消を持つような $k$ については [4], これらの構成法はすべて同値な三角圏を与えることが示されている ([Le3], [Bon]).

### §9.1. 圏 $\mathrm{SmCor}_k$

$k$ 上滑らかなスキームのなす圏を $\mathrm{Sm}_k$ で表わす. $\mathrm{Sm}_k$ の対象 $X, Y$ に対し, スキーム $X \times_{\mathrm{Spec}\,k} Y$ (の底集合) の部分集合 $Z$ であって, 以下の 3 条件をみたすもの全体を $FC(X,Y)$ で表わす:

- $Z$ は $X \times_{\mathrm{Spec}\,k} Y$ の Zariski 位相に関して閉集合である,
- $Z$ は既約である, つまり, $Z$ は $Z$ 自身でも空でもないような $X \times_{\mathrm{Spec}\,k} Y$ の 2 つの Zariski 閉集合の合併の形に書けない. 特に $Z$ は連結である,
- 包含写像と第 1 射影との合成

$$Z \hookrightarrow X \times_{\mathrm{Spec}\,k} Y \to X$$

を $f$ とおくと, 写像 $f$ は次の条件をみたす:

[4] 本稿では $\mathbb{Q}$ 係数の圏を考えているため, 特異点解消を持つという条件は緩められる可能性もあるが, 筆者はよく確かめていない.

– $f$ の像は $X$ のある連結成分に一致する,
– $f$ は閉写像である, つまり $Z$ に含まれる $X \times_{\mathrm{Spec}\,k} Y$ の任意の Zariski 閉集合 $W$ に対し, $f(W)$ は $X$ の Zariski 閉集合となる,
– $f$ は有限対 1 の写像である, つまり任意の $x \in X$ に対し, $f^{-1}(x)$ は有限集合である.

$Z \in FC(X, Y)$ のとき $f$ を上のようにおくと, 各点 $x \in X$ に対し (空かもしれない) 有限集合 $f^{-1}(x)$ を対応させることができる. $f^{-1}(x)$ は $Z$ の有限部分集合なので, 包含写像と第 2 射影との合成

$$Z \hookrightarrow X \times_{\mathrm{Spec}\,k} Y \to Y$$

によって, $Y$ の有限部分集合にうつる. これにより $f^{-1}(x)$ を, $Y$ の有限個の点のようなものとみなすことができ, $Z$ の与える対応 $x \mapsto f^{-1}(x)$ を, $X$ から $Y$ への多価射のようなものであるとみなす. この多価射のようなものを許容することによって, 圏 $\mathrm{Sm}_k$ を少し肥大させ, 豊かな構造を取り出すことを試みる.

$\mathrm{SmCor}_k$ を以下で与えられる圏とする. $\mathrm{SmCor}_k$ の対象は $\mathrm{Sm}_k$ の対象と同じである. $X, Y$ を $\mathrm{SmCor}_k$ の対象とすると, $X$ から $Y$ への射の全体の集合は, $FC(X, Y)$ を基底とする $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathrm{SmCor}_k(X, Y)$ である. 射の合成の定義については詳細を省略するが, 上で述べた, $FC(X, Y)$ の元 $Z$ が多価射のようなものである, という視点に立てば自然に定義できる.

圏 $\mathrm{SmCor}_k$ は, 空スキームが零対象となり, スキームとしての有限直和が有限直和となるような $\mathbb{Q}$ 線形な加法圏となる. $\mathrm{Sm}_k$ の対象 $X$ を $X$ に, $\mathrm{Sm}_k$ の射 $f : X \to Y$ を, 和 $\sum_i \Gamma_{f_i}$ に送ることにより, 関手 $\mathrm{Sm}_k \to \mathrm{SmCor}_k$ を得る. ここで $X$ の連結成分への分解が $X = \coprod_i X_i$ であるとし, $f$ の $X_i$ への制限を $f_i$ とおき, $f_i$ のグラフを $X \times_{\mathrm{Spec}\,k} Y$ に埋め込んだものを $\Gamma_{f_i}$ で表わした. この関手をグラフ関手とよぶことにする.

## § 9.2. 移送付き前層

移送付き前層とは, 反変関手

$$F : \mathrm{SmCor}_k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}$$

であって, $\mathrm{SmCor}_k$ の任意の対象 $X, Y$ に対し, 引き戻し写像

$$\mathrm{SmCor}_k(X, Y) \times F(Y) \to F(X)$$

が $\mathbb{Q}$ 双線形となるもののことを言う.

## § 9.3. 圏 $\mathrm{DM}_k^{\mathrm{eff},-}$

本節で紹介しようとしている三角圏 $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ の主要部分は, より大きな三角圏 $\mathrm{DM}_k^{\mathrm{eff},-}$ の充満部分圏として構成される. 本項では後者の三角圏 $\mathrm{DM}_k^{\mathrm{eff},-}$ を, 移送付き前層のなす複体の圏をいくつかの方向に局所化することによって構成する.

移送付きエタール層とは, 移送付き前層 $F:\mathrm{SmCor}_k^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}$ であって, $F$ とグラフ関手 $\mathrm{Sm}_k\to\mathrm{SmCor}_k$ との合成で得られる $\mathrm{Sm}_k$ 上の反変関手が $\mathrm{Sm}_k$ 上のエタール層となるもののことをいう. $X$ を $\operatorname{Spec}k$ 上滑らかなスキームとする. $\mathrm{SmCor}_k$ 上 $X$ で表現される反変関手を $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X)$ で表わす. $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X)$ は移送付きエタール層となる. $\mathbb{D}^-\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{SmCor}_k)$ で, 移送付きエタール層の, 上に有界な複体のなす導来圏とする. $\mathcal{E}_{\mathbb{A}^1}$ をその濃密充満三角部分圏であって, $\operatorname{Spec}k$ 上滑らかな任意のスキーム $X$ に対し, $\mathrm{Cone}(\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X\times\mathbb{A}^1)\to\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X))$ がその対象となるような最小のものとする. $\mathrm{Cone}(f)$ が $\mathcal{E}_{\mathbb{A}^1}$ に入るような $\mathbb{D}^-\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{SmCor}_k)$ の射 $f$ を $\mathbb{A}^1$ 弱同値という. $\mathrm{DM}_k^{\mathrm{eff},-}$ を $\mathbb{D}^-\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{SmCor}_k)$ の $\mathcal{E}_{\mathbb{A}^1}$ による Verdier 商とする. これと同値な圏は $\mathbb{D}^-\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{SmCor}_k)$ の充満部分圏としても実現可能である. $X$ を $\operatorname{Spec}k$ 上滑らかなスキームとするとき, $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X)$ の $\mathrm{DM}_k^{\mathrm{eff},-}$ における類を $M(X)$ で表わす.

注. 本稿では $\mathbb{Q}$ 係数の混合モチーフの三角圏しか必要としないので, $\mathbb{Q}$ ベクトル空間に値を持つ関手を考えている. $\mathbb{Z}$ 係数の混合モチーフの三角圏も構成されているが, 後者の構成の際は, $\mathrm{SmCor}_k$ の定義を $\mathbb{Q}$ 線形でないただの加法圏になるように変更し, 関手 $F$ をアーベル群に値をもつように変更するだけでなく, エタール層のかわりに Nisnevich 層を扱うようにするなどの変更が必要である.

## § 9.4. 圏 $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$

$\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}^{\mathrm{eff}}\subset\mathrm{DM}_k^{\mathrm{eff},-}$ を, $k$ 上滑らかな任意のスキーム $X$ に対し $M(X)$ が $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}^{\mathrm{eff}}$ に属するような最小の濃密充満三角部分圏として定義する.

$\operatorname{Spec}k$ 上のスキームの圏での直積が圏 $\mathrm{SmCor}_k$ に対称モノイダル構造を誘導する. これによって対称モノイダル構造 $\otimes^{\mathrm{tr}}$ が移送付き前層の圏に入り, $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X)\otimes^{\mathrm{tr}}\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(Y)\cong\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(X\times_{\operatorname{Spec}k}Y)$ となる. これを用いて, 移送付きエタール層 $F,G$ に対して, 移送付き前層 $F\otimes^{\mathrm{tr}}G$ に付随するエタール層を $F\otimes^{\mathrm{tr}}_{\text{ét}}G$ とおく. これは自然に移送付きエタール層の構造を持つ. これによって導来圏 $\mathbb{D}^-\mathrm{Sh}_{\text{ét}}(\mathrm{SmCor}_k)$ 上に対称モノイダル構造 $\otimes^{\mathrm{tr},\mathbb{L}}_{\text{ét}}$ が定まる. さらに $f$ を $\mathbb{A}^1$ 弱同値とすると, $f\otimes^{\mathrm{tr},\mathbb{L}}\mathrm{id}$, $\mathrm{id}\otimes^{\mathrm{tr},\mathbb{L}}f$ も $\mathbb{A}^1$ 弱同値となる. このことから $\mathrm{DM}_k^{\mathrm{eff},-}$ および $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}^{\mathrm{eff}}$ に $M(X)\otimes M(Y)=M(X\times Y)$ となるような対称モノイダル構造が入る.

## § 9.5. Tate 対象

$\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(\{1\})\to\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathbf{m}})$ という複体 (ただし $\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(\{1\})$ の次数が 0 となるように次数を入れる) のクラスを $\mathbb{Q}(1)$ とおく. また $\mathbb{Q}(0)=\mathbb{Q}=\mathbb{Q}_{\mathrm{tr}}(\operatorname{Spec}k)$ とおき, 整数 $n>0$ に対して $\mathbb{Q}(n)=\mathbb{Q}(1)^{\otimes n}$ とおく. 関手 $\mathbb{Q}(1)\otimes-:\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}^{\mathrm{eff}}\to\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}^{\mathrm{eff}}$ は忠実充満であることが知られている. 圏 $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}^{\mathrm{eff}}$ の対象を形式的に増やしてこの関手を可逆化することにより, 圏 $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}^{\mathrm{eff}}$ を充満部分圏として含む圏 $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ が得られる. $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ は三角圏となる. $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}^{\mathrm{eff}}$ の対称モノイダル構造が $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ の対称モノイダル構造を誘導する. 定義により $\mathbb{Q}(-1)=\mathbb{Q}(1)^{\otimes-1}$ が $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ の対象として得られる. $n>0$ に対し $\mathbb{Q}(-n)=\mathbb{Q}(-1)^{\otimes n}$ とおく. ある整数 $n\in\mathbb{Z}$ に対する $\mathbb{Q}(n)$ の形をした $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ の対象を Tate 対象という. 定義から $m,n\in\mathbb{Z}$ のとき $\mathbb{Q}(m)\otimes\mathbb{Q}(n)\cong\mathbb{Q}(m+n)$ であ

る．$\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ の勝手な対象は, ある $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{geom},k}$ の対象 $M$ および整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対する $M \otimes \mathbb{Q}(n)$ の形をしている．特に, $X$ を $\mathrm{Spec}\, k$ 上滑らかなスキーム, $n$ を整数とすると, $M(X)(n) = M(X) \otimes \mathbb{Q}(n)$ という $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ の対象が作れる．

## §10. 混合 Tate モチーフのなす圏

本節では代数体 $F$ に対し $\mathbb{Q}$ 線形な圏 $\mathrm{MT}(F)$ を導入し, $F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $S \subset F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ に対し, $\mathrm{MT}(F)$ の充満部分圏 $\mathrm{MT}(F, S)$ を構成する．$R$ が $F$ を分数体として持つ Dedekind 環のとき, $\mathrm{MT}(F, R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ のことを $\mathrm{MT}(R)$ と書く．特に $\mathrm{MT}(\mathbb{Z}) = \mathrm{MT}(\mathbb{Q}, \{0\})$ である．

### §10.1. Beilinson・Soulé 消滅予想

**10.1.1.** $k$ を体とする．整数 $i, j \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(j)[i])$ を $H^i_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{Q}(j))$ で表わす．整数 $n \geq 0$ に対し, $K_n(k)$ を $k$ の $n$ 次代数的 $K$ 群とする．Chern 類写像 $c_{j,2j-i} : K_{2j-i}(k) \to H^i_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{Q}(j))$ が構成され, $2j-1 \geq 1$ のとき同型 $(K_{2j-i}(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{(j)} \cong H^i_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{Q}(j))$ を与えることが知られている ([Bl1], [Bl2], [Le2], [Su], および [V2] を参照, また $2j - i = 0$ のときも Chern 類写像のかわりに Chern 指標写像を考えれば同様のことが成り立つ)．ここで上つき添え字の $(j)$ は, Adams 作用素に関する第 $j$ 固有空間を表わす．$j < i$ または $j < 0$ のときこれは 0 となる．次のことが予想されていて, (弱い形の) Beilinson-Soulé の消滅予想とよばれる:

**予想 10.1.** 任意の $i < 0$ に対し $H^i_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{Q}(j)) = 0$ が成り立つ．

Borel [Bor1] は $k$ が有限次代数体かつ $n \geq 2$ のとき $K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の次元を計算した．計算結果は以下のとおりである: $k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ ならば $K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の次元は $n \geq 2$ のとき $n \mod 4$ が $0, 1, 2, 3$ ならばそれぞれ $0$, $r_1 + r_2$, $0$, $r_2$ となる．特に $K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は $n \neq 1$ のとき $\mathbb{Q}$ 上有限次元であることがわかる．

**10.1.2.** $k$ が代数体のときは, Beilinson-Soulé の消滅予想が成立する．これは一般に $K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{j \geq 0} (K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{(j)}$ であること, $n \geq 2$ が偶数のとき $K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \{0\}$ となること (Borel [Bor1] 参照), および $j \geq 1$ のとき Chern 類写像

$$c_{j,2j-1} : K_{2j-1}(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to H^1_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{Q}(j))$$

が同型であることからわかる．$c_{j,2j-1}$ が同型であることは, $j = 1$ のときには定義域, 値域とも $k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と同型であることなどから比較的容易にわかるが, $j \geq 2$ のときの証明はそれほど容易でなく, Borel レギュレーター写像 [Bor2] と Chern 類写像 $c_{j,2j-1}$ との関係 (詳細は [Bei], [Rap], [Gi] 参照) によりわかる．このことと 10.1.1 で述べたことをあわせると, $k$ が有限次代数体のとき, $H^i_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, k, \mathbb{Q}(j))$ は $(i, j) = (0, 0)$ または $i = 1$ のときを除くと 0 であり, さらに $(i, j) = (1, 1)$ のときに $k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と同型であることを除くと $\mathbb{Q}$ 上

有限次元であることが分かる．具体的には $r_1$, $r_2$ を上のようにおくと, $H^i_{\mathcal{M}}(\operatorname{Spec} k, \mathbb{Q}(j))$ は

- $(i,j)=(0,0)$ のとき標準的に $\mathbb{Q}$ と同型,
- $(i,j)=(1,1)$ のとき標準的に $k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と同型,
- $i=1$ かつ $j$ が 2 以上の偶数のとき $\mathbb{Q}$ 上 $r_2$ 次元,
- $i=1$ かつ $j$ が 3 以上の奇数のとき $\mathbb{Q}$ 上 $r_1+r_2$ 次元,
- 上記 4 つの場合を除くと $\{0\}$

となる．

## § 10.2. Borel の結果についての補足

以下で必要とするわけではないが, 前項で用いた Borel [Bor1] の結果の証明のあらすじを, 原稿の内容の完全性のためここで紹介しておく．以下本項の終わりまで $k$ を有限次代数体と仮定する．

**10.2.1.** Borel の結果を説明する前に $k$ の代数的 $K$ 群 $K_n(k)$ について基本的なことをおさらいしておく．$\mathcal{O}_k$ を $k$ の整数環とすると, Quillen [Q1, §5, Theorem 5] の系にあるように長完全系列

$$\cdots \to K_1(k) \to \bigoplus_v K_0(\kappa(v)) \to K_0(\mathcal{O}_K) \to K_0(k) \to 0$$

が得られる．ここで $v$ は $k$ の有限素点をすべて動き, $\kappa(v)$ は $v$ での剰余体を表わす．単位元をもつ環 $R$ の代数的 $K$ 群 $K_n(R)$ にはいくつか同値な定義があるが, そのうちの定義のひとつは $n \geq 1$ のとき $B\mathrm{GL}(R)^+$ という位相空間の第 $n$ ホモトピー群を $K_n(R)$ とする, というものである ([Ge, §2], [Q1, §2, Remarks], [Gray] を参照)．$B\mathrm{GL}(R)^+$ は群 $\mathrm{GL}(R)=\varinjlim_r \mathrm{GL}_r(R)$ の分類空間 $B\mathrm{GL}(R)$ を少し修正して作られる連結かつ弧状連結な位相空間であり, 写像 $B\mathrm{GL}(R)\to B\mathrm{GL}(R)^+$ が存在しホモロジー群の同型を引き起こす．一方 $B\mathrm{GL}(R)^+$ はホモトピー結合的な $H$ 空間の構造を持つので, [MiMo, Appendix] より $n \geq 1$ のとき Hurewicz 準同型写像 $K_n(R)=\pi_n(B\mathrm{GL}(R)^+) \to H_n(B\mathrm{GL}(R)^+,\mathbb{Z})$ は $K_n(R)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ から $H_n(B\mathrm{GL}(R)^+,\mathbb{Q})$ の原始元のなす部分空間

$$PH_n(B\mathrm{GL}(R)^+,\mathbb{Q}) = \{x \in H_n(B\mathrm{GL}(R)^+,\mathbb{Q}) \mid \Delta_*(x) = 1\otimes x + x \otimes 1\}$$

への同型を引き起こす．ここで $\Delta_*$ は対角写像 $\Delta : B\mathrm{GL}(R)^+ \to B\mathrm{GL}(R)^+ \times B\mathrm{GL}(R)^+$ と Künneth 公式の引き起こす準同型

$$\Delta_* : H_n(B\mathrm{GL}(R)^+,\mathbb{Q}) \to \bigoplus_{0\leq i\leq n} H_i(B\mathrm{GL}(R)^+,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_{n-i}(B\mathrm{GL}(R)^+,\mathbb{Q})$$

である．同型 $H_i(B\mathrm{GL}(R)^+,\mathbb{Q})\cong H_i(B\mathrm{GL}(R),\mathbb{Q})\cong H_i(\mathrm{GL}(R),\mathbb{Q})$ を通じ, $n\geq 1$ のとき $K_n(R)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ から $H_n(\mathrm{GL}(R),\mathbb{Q})$ の原始元のなす部分空間

$$PH_n(\mathrm{GL}(R),\mathbb{Q})=\{x\in H_n(\mathrm{GL}(R),\mathbb{Q})\mid \Delta_*(x)=1\otimes x+x\otimes 1\}$$

への同型が得られる．ここで $\Delta_*$ は対角写像 $\Delta:\mathrm{GL}(R)\to\mathrm{GL}(R)\times\mathrm{GL}(R)$ と Künneth 公式の引き起こす準同型

$$\Delta_*:H_n(\mathrm{GL}(R),\mathbb{Q})\to\bigoplus_{0\leq i\leq n}H_i(\mathrm{GL}(R),\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}H_{n-i}(\mathrm{GL}(R),\mathbb{Q})$$

である．このことを使うと $n\geq 1$ のとき各 $v$ に対し, $K_n(\kappa(v))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=\{0\}$ であることが示せる.[5] したがって $n\geq 2$ のとき $K_n(\mathcal{O}_k)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\to K_n(k)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ は同型である．$R$ が可換環のとき $\mathrm{SL}(R)=\varinjlim_r \mathrm{SL}_r(R)$ とおくと, 包含写像 $\mathrm{SL}(R)\subset\mathrm{GL}(R)$ が $n\geq 2$ のとき同型 $PH_n(\mathrm{SL}(R),\mathbb{Q})\xrightarrow{\cong}PH_n(\mathrm{GL}(R),\mathbb{Q})$ を引き起こすことが比較的容易に示せる．以上まとめると $n\geq 2$ のとき同型

$$K_n(k)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong PH_n(\mathrm{SL}(\mathcal{O}_k),\mathbb{Q}) \tag{10.1}$$

が得られたことになる．

**10.2.2.** Borel [Bor1] は各整数 $r$ に対し, 整数 $m_r$ であって $\lim_{r\to\infty}m_r=\infty$ となるものが存在して, $n\leq m_r$ のとき, 群コホモロジーの制限写像

$$H^n_{\mathrm{cont}}(\mathrm{SL}_r(\mathcal{O}_k\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}),\mathbb{R})\to H^n(\mathrm{SL}_r(\mathcal{O}_k),\mathbb{R}) \tag{10.2}$$

が同型であることを示した．定義域の $H^n_{\mathrm{cont}}(\mathrm{SL}_r(\mathcal{O}_k\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}),\mathbb{R})$ は連続なコチェインのなす複体を用いて定義されるコホモロジー群である．$G_r=\mathrm{SL}_r(\mathcal{O}_k\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R})$ とおき $G_r$ の極大コンパクト群を $K_r$ とおくと, (10.2) が同型であることの証明は, van Est [vE] の定理 ([HoMo] および [BW, IX, 5] も参照のこと) と松島・村上 [MaMu] の同型を用いて定義域と値域のそれぞれを組 $(\mathrm{Lie}\,G_r,\mathrm{Lie}\,K_r)$ に関する相対 Lie 代数のコホモロジーを使って記述し, 松島 [Matsus] の議論を $\mathrm{SL}_r(\mathcal{O}_k)\backslash G_r/K_r$ に対して適用することによってなされる．$\mathrm{SL}_r(\mathcal{O}_k)\backslash G_r/K_r$ はコンパクトでないため松島 [Matsus] の議論を直接適用できないが, Borel [Bor1] は Borel-Serre のコンパクト化 [BS] を用い, さらにコンパクト化の境界近くで対数的増大度をもつ微分形式の概念を導入することによって困難を克服している．$U_r\supset K_r$ を $\mathrm{SL}_r(\mathcal{O}_k\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})$ の極大コンパクト群とすると, van Est の定理を用いて $H^n_{\mathrm{cont}}(\mathrm{SL}_r(\mathcal{O}_k\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}),\mathbb{R})$ とコンパクトな等質空間 $U_r/K_r$ ($G_r/K_r$ のコンパクト双対とよばれる) のコホモロジー群 $H^n(U_r/K_r,\mathbb{R})$ との間の同型が得られる．この同型と (10.2) とを合わせ, ホモロジーに移行することにより $n\leq m_r$ のとき同型

$$H_n(\mathrm{SL}_r(\mathcal{O}_k),\mathbb{R})\xrightarrow{\cong}H_n(U_r/K_r,\mathbb{R}) \tag{10.3}$$

[5] より強く $n\geq 1$ のとき $K_n(\kappa(v))$ は有限アーベル群であることが知られており, その構造を Quillen [Q2] が求めている．

が得られる．いま $r$ を固定するごとに $K_r, U_r$ を選んでいたが, $K_r \subset K_{r+1}$ かつ $U_r \subset U_{r+1}$ となるように選ぶことができる．$X_u = \varinjlim_r U_r/K_r$ とおくと, (10.1) および (10.3) より $n \geq 2$ のとき同型

$$K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} PH_n(X_u, \mathbb{R}) \tag{10.4}$$

が得られる．この同型, より正確にはこの同型と $K_n(k) \to K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とを合成して得られる準同型を Borel レギュレーター写像とよぶ. Borel レギュレーター写像は Borel [Bor2] が導入したものであり, 本項の内容と直接関係ないが Borel [Bor2] はこの Borel レギュレーター写像と $k$ の Dedekind ゼータ関数の負の整数点での特殊値とを関係させる重要な結果を得ている．$H^*(U_r/K_r, \mathbb{R})$ を具体的に計算することにより, $PH_n(X_u, \mathbb{R})$ の次元を計算できる．したがって (10.4) より $K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の次元がわかる．(Borel レギュレーター写像を導入する以前の論文であるが実質的に) このようにして, Borel [Bor1] は $n \geq 2$ のときに $K_n(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の次元を計算した.

## § 10.3. 圏 MT($F$)

$F$ を代数体とする．$F$ は有限次でなくてもよいが, 本稿で実質的に取り扱うのは $F = \mathbb{Q}$ の場合のみである．DMT($F$) を, $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},F}$ の対象の集合

$$\{\mathbb{Q}(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

の生成する $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},F}$ の充満三角部分圏とする．$\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},F}$ の対称モノイダル構造が圏 DMT($F$) の対称モノイダル構造を誘導する.

MT($F$) を, $\mathbb{Q}(n)$ たちの逐次拡大として書ける対象のなす DMT($F$) の充満部分圏とすると, MT($F$) はアーベル圏となり, DMT($F$) のとある $t$ 構造に関するハートとなる (Levine [Le1] 参照). DMT($F$) の対称モノイダル構造が圏 MT($F$) の対称モノイダル構造を誘導する．さらに各 $\mathbb{Q}(n)$ を $\mathbb{Q}(-n)$ に送るような関手 $D : \mathrm{MT}(F)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{MT}(F)$ を構成することができ, MT($F$) の対象 $M$, $N$ に対し $D(M) \otimes N$ を内部 Hom と定めることによって MT($F$) は $\mathbb{Q}$ 線形な淡中圏となる.[6] 任意の MT($F$) の対象 $M$ に対し, 長さ有限の増大フィルトレーション $W_\bullet M$ であって次の性質をみたすものがただひとつ存在する:

- $n$ が奇数のとき $\mathrm{gr}_n^W M = 0$ である,
- $n$ が偶数のとき $\mathrm{gr}_n^W$ は $\mathbb{Q}(-n/2)$ の有限個の直和と同型である.

このフィルトレーションを $M$ の重さフィルトレーションとよぶ.

## § 10.4. 圏 MT($F, S$)

$F$ を代数体, $S$ を $F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間とする．MT($F$) の対象 $M$ が次の条件をみたすとき $S$ 許容的であるとよぶことにする: 任意の整数 $n$, MT($F$) における

[6] $\mathbb{Q}$ 線形な淡中圏とは単位対象をもつ $\mathbb{Q}$ 線形な対称モノイダル圏 $\mathcal{C}$ であって, $\mathcal{C}$ はアーベル圏となり, さらに内部 Hom 関手とよばれる関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が与えられていて, ファイバー関手が存在する, などいくつかの条件をみたすもののことである．正確な定義については [De2] を参照のこと.

任意の射 $f : \mathrm{gr}^W_{-2n-2}M \to \mathbb{Q}(n+1)$ および $v : \mathbb{Q}(n) \to \mathrm{gr}^W_{-2n}M$ に対し, $\mathrm{MT}(F)$ における短完全系列

$$0 \to \mathrm{gr}^W_{-2n-2}M \to W_{-2n}M/W_{-2n-3}M \to \mathrm{gr}^W_{-2n}M \to 0$$

を $f$ で押し込み $v$ で引き戻すことによって得られる

$$0 \to \mathbb{Q}(n+1) \to E \to \mathbb{Q}(n) \to 0$$

の拡大類が, 同型

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(F)}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n+1)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(F)}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(1)) \xrightarrow[(1)]{\cong} H^1_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, F, \mathbb{Q}(1)) \xrightarrow[(2)]{\cong} F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

のもと $S$ の元と対応する. ここで (1) は $\mathrm{MT}(F)$ が $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},F}$ の充満部分圏であることおよび $H^1_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, F, \mathbb{Q}(1))$ の定義から得られる同型であり, (2) は 10.1 項でふれた同型である. $S$ 許容的な対象のなす $\mathrm{MT}(F)$ の充満部分圏を $\mathrm{MT}(F, S)$ で表わす. 定義から各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbb{Q}(n)$ は $\mathrm{MT}(F, S)$ の対象となる. さらに $\mathrm{MT}(F, S)$ は $\otimes$ および $D$ で閉じているため, $\mathbb{Q}$ 線形な $\mathrm{MT}(F)$ の部分淡中圏となる. $\mathrm{MT}(F)$ の対象 $M$ に対し, $M$ が $S$ 許容的であれば任意の整数 $n$ に対し $W_nM$ も $S$ 許容的である.

10.1 項で述べたこと, および $t$ 構造をもつ三角圏における射とそのハートにおける米田拡大群との間の関係の一般論 ([BBD] を参照) より, $n, n' \in \mathbb{Z}$ に対し以下のことが分かる:

- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MT}(F,S)}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n'))$ は $n \neq n'$ のとき $\{0\}$ であり, $n = n'$ のとき恒等射を基底とする 1 次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間である.
- $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(F,S)}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n'))$ は $n' - n \leq 0$ のときは 0 であり, $n' - n = 1$ のときは $S$ と同型であり, $n' - n \geq 2$ のときは $H^1_{\mathcal{M}}(\mathrm{Spec}\, F, \mathbb{Q}(n' - n))$ と同型である.
- 米田の拡大群 $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{MT}(F,S)}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n'))$ は $\{0\}$ となる.

Dedekind 環 $R$ であって分数体 $\mathrm{Frac}\, R$ が代数体となるようなものに対し, 淡中圏 $\mathrm{MT}(\mathrm{Frac}\, R, R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ を $\mathrm{MT}(R)$ で表わす. 次節以降では $R = \mathbb{Z}$ の場合のみを取り扱う. 上の段落で述べたことと 10.1.2 より次がわかる: $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MT}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n'))$ は $n \neq n'$ のとき 0 であり, $n = n'$ のとき恒等射を基底とする 1 次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間である. $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MT}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n'))$ は $n - n'$ が 3 以上の奇数のときは 1 次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間であり, そうでないときは 0 である. また米田の拡大群 $\mathrm{Ext}^2_{\mathrm{MT}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Q}(n), \mathbb{Q}(n'))$ は常に 0 となる.

$$\mathrm{Odd}_{\leq -3} = \{-3, -5, -7, -9, -11, \ldots\}$$

を $-3$ 以下の奇数全体の集合とする. 上で述べた米田の拡大群の計算から, $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ は, 次数付き有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $V$ と $i \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$ に対する同次次数 $i$ の射 $f_i : V \to V$ の組 $(V, (f_i)_{i \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}})$ のなす圏と圏同値であることがわかる. ただしこの圏同値を標準的に与える方法は知られていない.

## § 10.5. 実現関手

Grothendieck が構想したモチーフの哲学によれば, $k$ を体とすると, $k$ 上の混合モチーフの圏とよばれる $\mathbb{Q}$ 線形な淡中圏が存在するのではないか, $k = F$ が代数体のとき, 圏 $\mathrm{MT}(F, S)$ はその充満部分淡中圏となっているのではないか, と期待されている. $A$ を可換環とすると, 有限生成射影的 $A$ 加群のなす圏 $\mathcal{P}_A$ は, $A$ 上のテンソル積で対称モノイダル構造を入れ, $\mathcal{P}_A$ の対象 $M$, $N$ に対し $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ を内部 Hom とすることによってリジッド対称モノイダル圏の構造をもつ. 一般に $\mathbb{Q}$ 線形な淡中圏からとある可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $A$ に対する圏 $\mathcal{P}_A$ への関手であって, 対称モノイダル構造および内部 Hom と両立的なものをファイバー関手とよぶが, $\mathrm{MT}(F, S)$ のように体上の混合モチーフの圏の充満淡中部分圏と期待されている $\mathbb{Q}$ 線形な淡中圏から $\mathcal{P}_A$ へのファイバー関手, あるいはより一般に付加構造をつけた $\mathcal{P}_A$ の対象のなすリジッド対称モノイダル圏への関手であって, 対称モノイダル構造および内部 Hom と両立的なものを実現関手とよぶ. 圏 $\mathrm{MT}(F, S)$ からの実現関手として, Betti 実現関手 $\omega_B$, de Rham 実現関手 $\omega_{\mathrm{dR}}$, $\ell$ 進実現関手 $\omega_\ell$ などが構成されている. ただし本稿では $\ell$ 進実現関手はあまり活躍しない. これらは $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},F}$ 上の実現関手 ([Hu1], [Hu2], [Le3], および [DG, 1.5] にある注意を参照) から誘導される.[7] 他に重要な実現関手としてクリスタリン実現関手がある.

以下 $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ からの実現関手に話を限定する. 多重ゼータ値との関連では, $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ からの実現関手のうち Betti 実現関手 $\omega_B$ と de Rham 実現関手 $\omega_{\mathrm{dR}}$ が重要である. この 2 つの実現関手はともに圏 $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ から圏 $\mathrm{Vect}^f_{\mathbb{Q}}$ へのファイバー関手となっている. 例えば定義から $\omega_B(\mathbb{Q}(1))$ は複素多様体 $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ の特異ホモロジー群 $H_1(\mathbb{G}_{\mathbf{m}}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ に等しく, $\omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}(-1))$ は $\mathbb{Q}$ 上のスキーム $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}$ の代数的 de Rham コホモロジー群 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{G}_{\mathbf{m}}/\mathbb{Q})$ に等しい. また整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\omega_B(\mathbb{Q}(n)) = \omega_B(\mathbb{Q}(1))^{\otimes n}$, $\omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}(n)) = \omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}(-1))^{\otimes -n}$ である. さらに比較同型とよばれるファイバー関手の同型 $\mathrm{comp} : \omega_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \omega_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ を標準的に構成できる. ここで $? \in \{B, \mathrm{dR}\}$ に対し, $\omega_?$ と基底変換関手 $- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} : \mathrm{Vect}^f_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Vect}^f_{\mathbb{C}}$ の合成を $\omega_? \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ と書いた. $p$ 進多重ゼータ値とよばれる多重ゼータ値の $p$ 進類似が古庄 [F1] により導入されているが, $p$ 進多重ゼータ値との関連ではクリスタリン実現関手と de Rham 実現関手が重要である. $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ にはより標準的なファイバー関手 $\widetilde{\omega}$ がある. その関手は $\omega_{\mathrm{dR}}$ と標準的に同型なので, 本稿では積極的には取り扱わないことにする.

実現関手 $\omega_{\mathrm{dR}} : \mathrm{MT}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Vect}^f_{\mathbb{Q}}$ については, さらに以下の事実も重要であり後の議論で用いられる: $M$ を $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の対象とすると, $\omega_{\mathrm{dR}}(M)$ には $W_\bullet M$ の誘導する増大フィルトレーションの他に Hodge フィルトレーションとよばれる減少フィルトレーションが入る. この 2 つのフィルトレーションが $\omega_{\mathrm{dR}}(M)$ に次数付きベクトル空間の構造 $\omega_{\mathrm{dR}}(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \omega_{\mathrm{dR}}(M)_k$ を定め, 各整数 $k$ に対し $\omega_{\mathrm{dR}}(W_{2k}M) = \bigoplus_{\ell \leq k} \omega_{\mathrm{dR}}(M)_\ell$ となる. 次数付きベクトル空間の構造の入れ方は $M$ について関手的であり, これによって実現関手 $\omega_{\mathrm{dR}}$ は忘却関手 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Vect}^f_{\mathbb{Q}}$ を経由する.

---

[7] [Hu1], [Hu2], [Le3] の構成した実現関手はコホモロジー的である. 本稿ではホモロジー的な実現関手を考察するため, 実現関手を得る際に一度双対をとる必要がある.

## § 11. 道のなす空間

本節では各 $a,b \in \{0,1\}$ および整数 $n \geq 0$ に対し, $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の対象 ${}_bP_{a,n}$ を, [Go1, 4.2], [DG] にしたがって構成する.[8] そのための準備として, 以下の 11.1 項で $a,b \in \{0,1\}$ に対し, 接基点付き $\pi_1$ とよばれる集合 $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_a, t_b)$ を導入する. $b = a$ のとき $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_a, t_a)$ は群の構造を持ち, 一般の $a, b$ に対する $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_a, t_b)$ は左 $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_b, t_b)$ トーサーかつ右 $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_a, t_a)$ トーサーとなる.

本節で構成する圏 $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の対象 ${}_bP_{a,n}$ は, その Betti 実現 $\omega_B({}_bP_{a,n})$ が集合 $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus \{0,1,\infty\}, t_a, t_b)$ を基底とする $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_a, t_b)]$ を, 群環 $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_a, t_a)]$ の添加イデアル $I$ の $k+1$ 乗で割った空間

$$\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_a, t_b)]/I^{n+1}$$

と自然に同型になるような対象である. 整数 $n$ は多重ゼータ値の重さと関係が深い. そのため記号の統一性の観点からは ${}_bP_{a,n}$ ではなく ${}_bP_{a,k}$ とすべきであるが, 本節では記号 $k$ を別の意味に使うためやむを得ず ${}_bP_{a,n}$ と書くことにした.

### § 11.1. 接基点付き $\pi_1$

$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の標準的な座標関数を $t$ とする. $a \in \mathbb{C}$ に対し, $\frac{\partial}{\partial t}$ は点 $a$ における $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の接空間の基底 $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=a}$ を与える. $a \in \{0,1\}$ に対し $t_a$ を $t_0 = \frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}$, $t_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=1}$ で定める. これを $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}$ の接基点とみなす. $a,b \in \{0,1\}$ に対し, $t_a$ から $t_b$ への道とは, 連続写像 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ であって条件

- $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$,
- $x \in (0,1)$ のとき $\gamma(x)$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}$ に属する,
- $\gamma(x)$ は $x = 0$ および $x = 1$ で微分可能である,
- $e \in \{0,1\}$ に対し, $\gamma(x)$ が $x = e$ での接空間に誘導する準同型は $\frac{\partial}{\partial x}$ を $(-1)^e t_{\gamma(e)}$ に送る,

をみたすもののことをいう. $t_a$ から $t_b$ への 2 つの道 $\gamma, \gamma' : [0,1] \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ がホモトープであるとは, 連続写像 $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ であって, 条件

- 任意の $s \in [0,1]$ に対し, $x \in [0,1]$ を $F(s,x)$ に送る写像を $\gamma_s$ とおくと, $\gamma_s$ は $t_a$ から $t_b$ への道である,
- $\gamma_0 = \gamma$ かつ $\gamma_1 = \gamma'$ が成り立つ,

[8] ただしここに挙げた文献と本稿とでは記号や定式化が少し異なる. また [Go1] によると, この構成は Beilinson によるとのことである.

をみたすもののことをいう．ホモトープであるという性質は $t_a$ から $t_b$ への道の集合の同値関係を定める．この同値関係に関する同値類の集合を $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_b)$ で表わす．この集合を, $t_a$ から $t_b$ への道のホモトピー類のなすトーサーとよぶ．$a,b,c\in\{0,1\}$ とする．$\gamma$ を $t_a$ から $t_b$ への道, $\gamma'$ を $t_b$ から $t_c$ への道とするとき, 十分小さく $\epsilon>0$ をとり, $t_a$ から $t_c$ への道 $\gamma'\circ_\epsilon\gamma$ を

- $0\le x\le 1/2-\epsilon$ のとき $\gamma'\circ_\epsilon\gamma(x)=\gamma(2x)$,
- $1/2-\epsilon\le x\le 1/2+\epsilon$ のとき,
$$\gamma'\circ_\epsilon\gamma(x)=\frac{1}{2\epsilon}\left(\left(\frac{1}{2}+\epsilon-x\right)\gamma(1-2\epsilon)+\left(x+\epsilon-\frac{1}{2}\right)\gamma'(2\epsilon)\right),$$
- $1/2+\epsilon\le x\le 1$ のとき $\gamma'\circ_\epsilon\gamma(x)=\gamma'(2x-1)$,

とおくことによって定める．道 $\gamma'\circ_\epsilon\gamma$ を道 $\gamma$ と道 $\gamma'$ との合成とよぶ．$\epsilon>0$ が十分小さいとき, $\gamma'\circ_\epsilon\gamma$ の $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_c)$ における類は $\epsilon$ に依存しない．この類を $\gamma'\circ\gamma$ で表わす．組 $(\gamma',\gamma)$ に対し, 合成 $\gamma'\circ_\epsilon\gamma$ を対応させる $t_b$ から $t_c$ への道と $t_a$ から $t_b$ への道との組のなす集合から $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_c)$ への写像は, 写像

$$\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_b,t_c)\times\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_b)\to\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_c)$$

を誘導する．この写像は結合律をみたす．特に $a=b$ のとき, $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_a)$ は群となり, 一般の $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_b)$ には左から群 $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_b,t_b)$ が, 右から群 $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_a)$ が作用し, 左 $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_b,t_b)$ トーサーかつ右 $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_a)$ トーサーとなる．

## § 11.2.　スキーム上の道の空間

$k$ を体, $X$ を $\operatorname{Spec} k$ 上のスキームとする．集合 $S$ に対し, $\operatorname{Map}(S,X)$ で, $\operatorname{Spec} k$ 上のスキームに $Y$ に対し, $S$ から $X(Y)=\operatorname{Hom}_k(Y,X)$ への写像全体の集合 $\operatorname{Map}(S,X(Y))$ を対応させる関手を表現する $\operatorname{Spec} k$ 上のスキームを表わすことにする．例えば $S$ が有限集合であれば, $\operatorname{Map}(S,X)$ は, $S$ で添え字づけられた $X$ のコピーの $\operatorname{Spec} k$ 上でのファイバー積である．$X$ を固定して $S$ を動かすと, $\operatorname{Map}(-,X)$ は集合の圏から $\operatorname{Spec} k$ 上のスキームの圏への反変関手を与える．$F:\Delta^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Sets}$ を単体的集合 [9] とするとき, $\operatorname{Map}(F,X)$ で, $[n]$ に $\operatorname{Map}(F([n]),X)$ を対応させることによって得られる $\operatorname{Spec} k$ 上の余単体的スキームを表わすことにする．$X$ を固定して $F$ を動かすと, $\operatorname{Map}(-,X)$ は単体的集合の圏から $\operatorname{Spec} k$ 上の余単体的スキームの圏への反変関手を与える．

非負整数 $n\ge 0$ に対し, $[n]$ で表現される単体的集合を $\Delta^n$ で表わす．$\Delta^n$ の部分単体的集合 $\partial\Delta^n:\Delta^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Sets}$ を, 各 $[m]$ に対して,

$$\partial\Delta^n([m])=\{f:[m]\to[n]\mid f\text{ は全射でない }\}$$

[9] 単体的集合の定義および一般論については [May] を参照.

とおくことによって定める. 本稿では, この記号は $n = 1$ の場合しか使わない. $\Delta^1$ は単位区間 $[0,1]$ の類似であり, $\partial\Delta^1$ はその端点の類似である.

定義から $\mathrm{Map}(\partial\Delta^1, X)$ は単体的方向に定数となるスキーム $X \times X$ である. 包含射 $\partial\Delta^1 \hookrightarrow \Delta^1$ は, 余単体的スキームの射 $\mathrm{Map}(\Delta^1, X) \to \mathrm{Map}(\partial\Delta^1, X) = X \times X$ を与える. この射によって $\mathrm{Map}(\Delta^1, X)$ を $X \times X$ 上の余単体的スキームとみなす.

厳密な言い方ではないかもしれないが, $\mathrm{Map}(\Delta^1, X)$ は単位区間 $[0,1]$ から $X$ への連続写像のなす空間, つまり $X$ 内の道の空間のようなものであり, 射 $\mathrm{Map}(\Delta^1, X) \to X \times X$ は, $X$ 内の道に対して, その両端の点を対応させる写像のようなものであると解釈すると感じが分かりやすい.

## § 11.3. 対象 ${}_bP_{a,n}$

$X$ を $\mathrm{Spec}\, k$ 上滑らかと仮定する. 非負整数 $n \geq 0$ に対し, 構造射 $\mathrm{Map}(\Delta^1([n]), X) \to X \times X$ が滑らかであることは容易にわかる. したがって $Z$ を $\mathrm{Spec}\, k$ 上滑らかなスキーム, $a, b : Z \to X$ を $k$ 上の射とすると, 各 $n \geq 0$ に対し射 $(a,b) : Z \to X \times X$ による底変換 ファイバー積

$$ {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([n]), X)_a = \mathrm{Map}(\Delta^1([n]), X) \times_{X \times X} Z $$

は $\mathrm{Spec}\, k$ 上滑らかである. 各 $[n]$ に ${}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([n]), X)_a$ を対応させることにより $\mathrm{Spec}\, k$ 上の余単体的スキーム ${}_b\mathrm{Map}(\Delta^1, X)_a$ であって, 次数ごとに $\mathrm{Spec}\, k$ 上滑らかなものが得られる. $n \geq 0$ に対し, $\mathrm{SmCor}_k$ における有界な複体

$$ \begin{aligned} &\coprod_{i_{0,n}} {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([0]), X)_a \to \coprod_{i_{1,n}} {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([1]), X)_a \to \cdots \\ &\cdots \to \coprod_{i_{n-1,n}} {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([n-1]), X)_a \to {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([n]), X)_a \end{aligned} $$

を考える. ここで $j = 0, \ldots, n-1$ に対し $i_{j,n}$ は順序を保つ単射 $i_{j,n} : [j] \to [n]$ をすべて動くものとし, また ${}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([n]), X)_a$ の次数が $n$ となるように上の複体に次数をつけている (とくに断らない限り, 本稿では複体にはコホモロジー的な次数付けをする). $j = 0, \ldots, n$ に対し, この複体の次数 $j$ 成分は ${}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([j]), X)_a$ のコピーの直和であるが, 余境界作用素は $i_{j,n} = i_{j+1,n} \circ \iota$ をみたす $\iota : [j] \to [j+1]$ が誘導する射 ${}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([j]), X)_a \to {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1([j+1]), X)_a$ のグラフに適当に符号をつけて和をとったものである (詳細は [DG, 3.6,3.12] を参照). この複体を $C([n], {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1, X)_a)$ で表わす.[10] 複体 $C([n], {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1, X)_a)$ は $\mathrm{DM}_{\mathrm{geom},k}$ の対象を与える. $M(X)$ および $M(Z)$ が $\mathrm{DMT}(k)$ の対象であると仮定すると $C([n], {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1, X)_a)$ も $\mathrm{DMT}(k)$ の対象となる. さ

[10] この複体は一見不自然なもののように見えるかもしれないが, 実は余単体的スキーム ${}_b\mathrm{Map}(\Delta^1, X)_a$ に付随する正規化された余チェイン複体 (Moore 複体とも呼ばれる) をちょん切ってできる複体とホモトピー同値となるように作っており自然なものである ([DG, Prop. 3.10] を参照). 正規化された余チェイン複体を定義するためには $\mathrm{SmCor}_k$ の巾等完備化に移行する必要があり, その面倒を避けるため本稿では上の定義を用いることにした.

らに Beilinson-Soulé の消滅予想を仮定すると関手 $H^0 : \mathrm{DMT}(k) \to \mathrm{MT}(k)$ を適用することにより $\mathrm{MT}(k)$ の対象 $H^0(C([n], {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1, X)_a))$ を得る.

特に $k = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ のときを考える. このとき $a, b \in X(\mathbb{Q})$ に対して, $\mathrm{MT}(\mathbb{Q})$ の対象 $H^0(C([n], {}_b\mathrm{Map}(\Delta^1, X)_a))$ が上述の方法で構成できる. さらに $a, b \in \{0, 1\}$ のとき, 接基点 $t_a, t_b$ に対しても $\mathrm{MT}(\mathbb{Q})$ の対象 ${}_bP_{a,n} = H^0(C([n], {}_{t_b}\mathrm{Map}(\Delta^1, X)_{t_a}))$ を構成することができる (この構成については [DG, Théorème 4.4] を参照). これは $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の対象となる.

## §12. トーサーの部分コンパクト化

本節では, 初めに淡中基本群の定義を復習した後, 後節でモチヴィック多重ゼータ値を定義し, モチヴィック多重ゼータ値のなす $\mathbb{Q}$ ベクトル空間に余加群構造を入れるための準備となる概念の整備を行う.

$U(\omega_{\mathrm{dR}})$ を淡中基本群 $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ (定義はすぐ後の 12.1 項を参照) の副巾単根基とする. Goncharov [Go3, Appendix] は多重ゼータ値のなす $\mathbb{Q}$ 代数と $U(\omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環とを関連付けている. 本稿の 12.6 項ではこのアイデアに基づいてモチヴィック多重ゼータ値 $\zeta^M(\Bbbk)$ を定義する. ただし $\zeta^M(\Bbbk)$ は 淡中基本群 $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ ではなく淡中基本トーサー $\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ (定義はすぐ後の 12.1 項を参照) の座標環の元となる. ここで次の 2 つの問題が生じる:

- $\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環は自然に次数付き $\mathbb{Q}$ 代数の構造を持つが, 負の次数も現れ, また各次数部分は無限次元である. そこで $\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環の部分環 $\mathcal{H}$ であって, 正の次数しか現れず, また各次数部分が有限次元であるものをうまくとり, $\zeta^M(\Bbbk)$ が $\mathcal{H}$ に属するようにしなければならない.

- $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ の群構造を使って $\mathcal{H}/(\zeta^M(2))$ に余代数の構造を定義し, さらに $\mathcal{H}$ に $\mathcal{H}/(\zeta^M(2))$ 余加群の構造を与えたい. しかし, $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ ではなく $\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環からスタートするため, 余代数や余加群の構造が一見すると標準的に定まらない,

これらの問題点は従来の方法でも解決可能であるが, 本節では, これらをできる限り自然な形で, かつ非標準的な選択を排除して解決するために, 淡中基本トーサーの部分コンパクト化およびその境界という概念を導入する. これらの概念を導入することにより, 第 1 の問題点は即座に解決し, さらに標準的な同型 (12.4) および (12.6) を用いると第 2 の問題点も解決する, という流れで話が進んでゆく.

### §12.1. 淡中基本トーサー

$$\omega_1, \omega_2 : \mathrm{MT}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Vect}^f_{\mathbb{Q}}$$

を 2 つのファイバー関手とする. 可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $R$ に対し, $\omega_1 \otimes_{\mathbb{Q}} R$ から $\omega_2 \otimes_{\mathbb{Q}} R$ へのテンソル関手としての同型の全体を

$$\mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_1 \otimes_{\mathbb{Q}} R, \omega_2 \otimes_{\mathbb{Q}} R)$$

で表わす. $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ は本質的に小圏であるから $\mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_1 \otimes_{\mathbb{Q}} R, \omega_2 \otimes_{\mathbb{Q}} R)$ は集合とみなせる. 各可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $R$ に集合 $\mathrm{Isom}^{\otimes}(\omega_1 \otimes_{\mathbb{Q}} R, \omega_2 \otimes_{\mathbb{Q}} R)$ を対応させる関手を $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ で表わす. 関手 $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_2)$ は $\mathbb{Q}$ 上のアフィンスキームで表現可能である ([De1] を参照). このアフィンスキームを $\pi_1(\mathrm{MT}(\mathbb{Z}), \omega_1, \omega_2)$ で表わし, $\omega_1, \omega_2$ を基点とする $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の淡中基本トーサーという. 以下ではしばしば $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ を省略し, $\pi_1(\mathrm{MT}(\mathbb{Z}), \omega_1, \omega_2)$ のことを $\pi_1(\omega_1, \omega_2)$ と略記する. $\omega_1 = \omega_2$ のとき, 関手 $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_1, \omega_1)$ のことを $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_1)$ と表わし, スキーム $\pi_1(\omega_1, \omega_1)$ のことを $\pi_1(\omega_1)$ で表わす. $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\omega_1)$ は群の圏に値をもつ関手となるので, $\pi_1(\omega_1)$ は群スキームとなる. これを $\omega_1$ を起点とする $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の淡中基本群とよぶ. $\pi_1(\omega_1, \omega_2)$ の座標環 $\mathcal{O}(\pi_1(\omega_1, \omega_2))$ を $\mathcal{A}(\omega_1, \omega_2)$ で表わす.

## § 12.2. 淡中基本トーサーの部分コンパクト化

$\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ で, $W_0 M = M$ を満たす対象全体のなす $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の充満部分圏とする. この充満部分圏は直和および $\otimes$ で保たれ, $\otimes$ に関する単位対象も含むが, 双対では保たれない.

$$\omega_1, \omega_2 : \mathrm{MT}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}^{f}$$

を 2 つのファイバー関手とする. $i = 1, 2$ に対し, $\omega_i$ の $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ への制限を $\omega_i^{\mathrm{eff}}$ で表わす. 可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $R$ に対し, $\omega_1^{\mathrm{eff}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$ から $\omega_2^{\mathrm{eff}} \otimes_{\mathbb{Q}} R$ へのテンソル関手の準同型 (であって単位対象の実現間の同型を引き起こすもの) の全体を

$$\mathrm{Hom}^{\otimes}(\omega_1^{\mathrm{eff}} \otimes_{\mathbb{Q}} R, \omega_2^{\mathrm{eff}} \otimes_{\mathbb{Q}} R)$$

で表わす. $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ は本質的に小圏であるから $\mathrm{Hom}^{\otimes}(\omega_1^{\mathrm{eff}} \otimes_{\mathbb{Q}} R, \omega_2^{\mathrm{eff}} \otimes_{\mathbb{Q}} R)$ は集合とみなせる. 各可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $R$ に集合 $\mathrm{Hom}^{\otimes}(\omega_1^{\mathrm{eff}} \otimes_{\mathbb{Q}} R, \omega_2^{\mathrm{eff}} \otimes_{\mathbb{Q}} R)$ を対応させる関手を $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1^{\mathrm{eff}}, \omega_2^{\mathrm{eff}})$ で表わす. 関手 $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1^{\mathrm{eff}}, \omega_2^{\mathrm{eff}})$ は $\mathbb{Q}$ 上のアフィンスキームで表現可能である. このアフィンスキームを $\overline{\pi}_1(\omega_1, \omega_2)$ で表わし, $\pi_1(\omega_1, \omega_2)$ の部分コンパクト化という.

$V$ を有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間とするとき, 可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $R$ に対し $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $R \otimes_{\mathbb{Q}} V$ を対応させる関手を表現する $\mathbb{Q}$ 上のアフィンスキームを $\mathbb{G}_{\mathbf{a}} \otimes V$ で表わす. $V$ に $\mathbb{G}_{\mathbf{a}} \otimes V$ を対応させることにより, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}^{f}$ から $\mathbb{Q}$ 上のアフィンスキームの圏への共変関手 $\mathbb{G}_{\mathbf{a}} \otimes -$ が得られる. $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ の対象 $M$ に対し, $H_{\omega_1, \omega_2}(M) = \mathbb{G}_{\mathbf{a}} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\omega_1(M), \omega_2(M))$ とおく. $M$ での値を考えることにより, $\mathbb{Q}$ 上のスキームの射

$$\mathrm{ev}_M : \overline{\pi}_1(\omega_1, \omega_2) \to H_{\omega_1, \omega_2}(M)$$

が得られる．特に $M=\mathbb{Q}(1)$ の場合を考え，$0\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\omega_1(\mathbb{Q}(1)),\omega_2(\mathbb{Q}(1)))$ の定める $H_{\omega_1,\omega_2}(\mathbb{Q}(1))$ の $\mathbb{Q}$ 有理点を $0$ で表わす．$\partial\pi_1(\omega_1,\omega_2)=\mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(1)}^{-1}(0)$ とおき，$\pi_1(\omega_1,\omega_2)$ の境界とよぶ．定義から $\partial\pi_1(\omega_1,\omega_2)$ は $\overline{\pi}_1(\omega_1,\omega_2)$ の閉部分スキームである．包含射 $\partial\pi_1(\omega_1,\omega_2)\to\overline{\pi}_1(\omega_1,\omega_2)$ を $i(\omega_1,\omega_2)$ で表わす．次は容易に示せる:

**補題 12.1.** $\omega_1,\omega_2:\mathrm{MT}(\mathbb{Z})\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}^f$ を 2 つのファイバー関手とする．

(1) $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ への制限が誘導する関手の射 $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega_1,\omega_2)\to\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega_1^{\mathrm{eff}},\omega_2^{\mathrm{eff}})$ は同型

$$\pi_1(\omega_1,\omega_2)\xrightarrow{\cong}\mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(1)}^{-1}(H_{\omega_1,\omega_2}(\mathbb{Q}(1))\setminus\{0\})$$

を誘導する．以下この同型によって $\pi_1(\omega_1,\omega_2)$ を $\overline{\pi}_1(\omega_1,\omega_2)$ の開部分スキームとみなし，開埋め込み $\pi_1(\omega_1,\omega_2)\hookrightarrow\overline{\pi}_1(\omega_1,\omega_2)$ を $j(\omega_1,\omega_2)$ で表わす．

(2) $\omega_1=\omega_2$ と仮定する．1 を恒等写像 $\omega_1(\mathbb{Q}(1))\to\omega_1(\mathbb{Q}(1))$ に対応する $H_{\omega_1,\omega_1}(\mathbb{Q}(1))$ の $\mathbb{Q}$ 有理点とすると，閉部分スキーム $\mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(1)}^{-1}(1)\subset\overline{\pi}_1(\omega_1)$ は $\pi_1(\omega_1)$ の副巾単根基に等しい．

□

## § 12.3. 基本図式その 1

一般に $\omega_1,\omega_2,\omega_2:\mathrm{MT}(\mathbb{Z})\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}^f$ をファイバー関手とすると，各可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $R$ に対する関手の合成写像

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}^{\otimes}(\omega_2^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R,\omega_3^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R)\\ \times\mathrm{Hom}^{\otimes}(\omega_1^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R,\omega_2^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R)\end{pmatrix}\to\mathrm{Hom}^{\otimes}(\omega_1^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R,\omega_3^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R)$$

および $\mathbb{Q}$ 線形写像の合成写像

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\omega_2(\mathbb{Q}(1)),\omega_3(\mathbb{Q}(1)))\\ \times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\omega_1(\mathbb{Q}(1)),\omega_2(\mathbb{Q}(1)))\end{pmatrix}\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\omega_1(\mathbb{Q}(1)),\omega_3(\mathbb{Q}(1)))$$

は，$\mathbb{Q}$ 上のスキームの可換図式

$$\begin{array}{ccc}\overline{\pi}_1(\omega_2,\omega_3)\times\overline{\pi}_1(\omega_1,\omega_2) & \longrightarrow & \overline{\pi}_1(\omega_1,\omega_3)\\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(1)}\times\mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(1)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{\mathbb{Q}(1)}}\\ H_{\omega_2,\omega_3}(\mathbb{Q}(1))\times H_{\omega_1,\omega_2}(\mathbb{Q}(1)) & \longrightarrow & H_{\omega_1,\omega_3}(\mathbb{Q}(1))\end{array}\tag{12.1}$$

を誘導する．図式 (12.1) 上段の射を $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}}),(\omega_B,\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ の場合に考え，それぞれ $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})\times\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$, $\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\times\pi_1(\omega_B)$ に制限することによりスキームの射

$$\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})\times\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\to\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}}),\ \overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\times\pi_1(\omega_B)\to\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\tag{12.2}$$

を得る．射 (12.2) によってスキーム $\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ には群スキーム $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ が左から, 群スキーム $\pi_1(\omega_B)$ が右から作用し, 両者の作用は互いに可換である．また閉部分スキーム $\partial\pi_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\subset\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ は $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ および $\pi_1(\omega_B)$ の作用で安定である．

$M$ を $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の対象とすると, $\omega_B(M)$ には複素共役 $F_\infty$ が作用する．$F_\infty$ は $M$ について関手的なので, $\pi_1(\omega_B)$ の $\mathbb{Q}$ 有理点 $F_\infty$ を与える．$\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ を右からの $F_\infty$ の作用で割って得られるスキームを $\overline{\pi}_1^+(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ で表わす．合成

$$\partial\pi_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\xrightarrow{i(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})}\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\to\overline{\pi}_1^+(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$$

を $i(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})^+$ で表わす．これも閉埋め込みとなる．(12.2) は射

$$\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})\times\overline{\pi}_1^+(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\to\overline{\pi}_1^+(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}}) \tag{12.3}$$

を誘導し, これによってスキーム $\overline{\pi}_1^+(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ には群スキーム $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ が左から作用する．閉部分スキーム $\partial\pi_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ は $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ の作用で安定である．

## § 12.4. 基本図式その 2

標準的な同型 $c_0:\omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q})\cong\omega_B(\mathbb{Q})$ であって $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}$ と両立的なものがただ一つ存在することに注意する．$R$ を可換 $\mathbb{Q}$ 代数, $F\in\mathrm{Hom}^{\otimes}(\omega_B^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R,\omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R)$ を $\partial\pi_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ の $R$ 有理点とする．このとき $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ の任意の対象 $M$ に対し, $F(M):\omega_B(M)\to\omega_{\mathrm{dR}}(M)$ を $\omega_B(W_{-1}M)\subset\omega_B(M)$ に制限したものは零射となる．従って $F(M)$ は商写像 $\omega_B(M)\to\omega_B(M/W_{-1}M)$ を経由する．誘導される準同型 $\omega_B(M/W_{-1}M)\to\omega_{\mathrm{dR}}(M)$ を $\overline{F}(M)$ とおく．$M/W_{-1}M$ は $\mathbb{Q}(0)$ のいくつかのコピーの直和と (非標準的に) 同型であるから, $c_0$ を用いて標準的な同型 $c_{0,M}:\omega_{\mathrm{dR}}(M/W_{-1}M)\xrightarrow{\cong}\omega_B(M/W_{-1}M)$ を構成できる．合成

$$\omega_{\mathrm{dR}}(M)\twoheadrightarrow\omega_{\mathrm{dR}}(M/W_{-1}M)\xrightarrow[\cong]{c_{0,M}}\omega_B(M/W_{-1}M)\xrightarrow{\overline{F}(M)}\omega_{\mathrm{dR}}(M)$$

を $F'(M)$ とおいて $M$ を動かすと, $F'\in\mathrm{Hom}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R,\omega_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{eff}}\otimes_{\mathbb{Q}}R)$ であって $\partial\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}})$ の $R$ 有理点を与えるものができる．$F$ を $F'$ に対応させることよって $\mathbb{Q}$ 上のスキームの同型

$$\partial\pi_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\xrightarrow{\cong}\partial\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}}) \tag{12.4}$$

が得られる．

$\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の任意の対象 $M$ に対し, $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\omega_{\mathrm{dR}}(M)$ には標準的な次数付けが入ることを思い出す．この次数付けを $\omega_{\mathrm{dR}}(M)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\omega_{\mathrm{dR}}(M)_n$ で表わす．次数 0 への射影 $\omega_{\mathrm{dR}}(M)\to\omega_{\mathrm{dR}}(M)_0$ は $\partial\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}})$ の $\mathbb{Q}$ 有理点 $\mathrm{pr}_0$ を定める．図式 (12.1) を $\omega_1=\omega_2=\omega_{\mathrm{dR}}$ に対して考えることにより射 $\overline{\pi}_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}})\times\partial\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}})\to\partial\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}})$ を得る．この射を $\overline{\pi}_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}})\times\mathrm{pr}_0$ に制限することによって $\mathbb{Q}$ 上のスキームの射

$$\overline{\pi}_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}})\to\partial\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}}) \tag{12.5}$$

が得られる. $U(\omega_{\mathrm{dR}})$ を $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ の副巾単根基とする. このとき, 合成

$$U(\omega_{\mathrm{dR}}) = \mathrm{ev}^{-1}_{\mathbb{Q}(1)}(1) \hookrightarrow \overline{\pi}_1(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{dR}}) \xrightarrow{(12.5)} \partial\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{dR}}) \tag{12.6}$$

は $\mathbb{Q}$ 上のスキームの同型となることが確かめられる. $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ の作用 (12.3) を $U$ に制限し, 同型 (12.4), (12.6) を用いることにより, $\mathbb{Q}$ 上のスキームの射

$$\partial\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}}) \times \overline{\pi}_1^+(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}}) \to \overline{\pi}_1^+(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}}) \tag{12.7}$$

が得られる.

## § 12.5. 枠つき対象

$\overline{\pi}_1(\omega_1, \omega_2)$ の座標環 $\mathcal{O}(\overline{\pi}_1(\omega_1, \omega_2))$ を $\mathcal{A}_{\geq 0}(\omega_1, \omega_2)$ で表わす. 本項で $\mathcal{A}_{\geq 0}(\omega_1, \omega_2)$ の元を組織的に与える方法を述べる.

$\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ の対象 $M$, $v \in \omega_1(M)$, および $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\omega_2(M), \mathbb{Q})$ からなる 3 つ組 $(M, v, f)$ のことを $(\omega_1, \omega_2)$ 枠つきの $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ の対象とよぶ. $(\omega_1, \omega_2)$ 枠つき対象 $(M, v, f)$ が与えられると, $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\omega_1(M), \omega_2(M))$ を $f(\lambda(v))$ に送る $\mathrm{Vect}^f_{\mathbb{Q}}$ の射 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\omega_1(M), \omega_2(M)) \to \mathbb{Q}$ に関手 $\mathbb{G}_{\mathbf{a}} \otimes -$ を施すことによって $\mathbb{Q}$ 上のスキームの射 $H_{\omega_1, \omega_2}(M) \to \mathbb{G}_{\mathbf{a}}$ が得られる. この射と $\mathrm{ev}_M$ とを合成することによって $\mathbb{Q}$ 上のスキームの射 $\overline{\pi}_1(\omega_1, \omega_2) \to \mathbb{G}_{\mathbf{a}}$ が得られるが, $\mathbb{G}_{\mathbf{a}}$ の定義からこれは座標環 $\mathcal{A}_{\geq 0}(\omega_1, \omega_2)$ の元を与える. この元を $[M, v, f]$ で表わす. $[M, v, f]$ の境界 $\partial\pi_1(\omega_1, \omega_2)$ への制限を $\partial[M, v, f]$ で表わす. $v$ の $\omega_1(\mathrm{gr}^W_0 M)$ における像を $\overline{v}$ とおくと, $\partial[M, v, f]$ は $M$, $\overline{v}$ および $f$ にしか依存しない. そこで $\partial[M, v, f]$ のことを $\partial[M, \overline{v}, f]$ とも書く.

## § 12.6. 反復積分元

**12.6.1.** スキーム $\overline{\pi}_1^+(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環 $\mathcal{O}(\overline{\pi}_1^+(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}}))$ を $\mathcal{H}$ とおく. 10.5 項の最後に述べたように実現関手 $\omega_{\mathrm{dR}}$ は圏 $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}}_{\mathbb{Q}}$ を標準的に経由するので群スキームの射 $\mathbb{G}_{\mathbf{m}} \to \pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ を得る. この射と (12.3) を通じて $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}$ が $\overline{\pi}_1^+(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ に作用する. この作用により, $\mathcal{H}$ は次数付き $\mathbb{Q}$ 代数の構造を持つ. $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_k$ を $\mathcal{H}$ の次数付けとする. $k < 0$ のとき $\mathcal{H}_k = \{0\}$, $k = 0$ のとき $\mathcal{H}_0 = \mathbb{Q}$ である. この次数付けは次で特徴づけられる: $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ の対象 $M$, $v \in \omega_B(M)^{F_\infty}$, および $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\omega_{\mathrm{dR}}(M), \mathbb{Q})$ に対し, $f$ が次数 $-k$ 部分への射影 $\omega_{\mathrm{dR}}(M) \twoheadrightarrow \omega_{\mathrm{dR}}(M)_{-k}$ を経由するならば $[M, v, f] \in \mathcal{H}_k$ である.

**補題 12.2.** 各 $k \geq 0$ に対し $\mathcal{H}_k$ は $d_k$ 次元の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間になる.

(証明のスケッチ). $\mathcal{H}$ は整域, $\mathcal{H}_2$ は 1 次元であり, $\partial\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環は $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}_2$ の生成する同次イデアルで割った剰余環に等しい. 半単純な対象からなる $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の充満部分圏は充満部分淡中圏であり, $\omega_{\mathrm{dR}}$ はその部分圏と $\mathrm{Vect}^{\mathrm{gr}}_{\mathbb{Q}}$ との間の圏同値を誘導する. これより分裂する短完全系列

$$1 \to U(\omega_{\mathrm{dR}}) \to \pi_1(\omega_{\mathrm{dR}}) \to \mathbb{G}_{\mathbf{m}} \to 1$$

を得る. (12.4), (12.6) の与える同型 $\partial\pi_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})\cong U(\omega_{\mathrm{dR}})$ は, $\partial\pi_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ への $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}$ の作用, および上の短完全系列の与える $U(\omega_{\mathrm{dR}})$ への $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}$ の作用と両立的である. 10.4 項の最後で述べた $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の記述から, $U(\omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環が $-3$ 以下の各奇数につき一つずつ変数をもつ $\mathbb{Q}$ 係数非可換多項式環の次数付き双対と同型となる. この同型は非標準的であるが次数付けを保つので, $U(\omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環の次数 $k$ の部分は $d_k-d_{k-2}$ 次元であることがわかる. したがって主張が従う. □

各 $a,b\in\{0,1\}$ および 各 $w\in W$ に対し, $I^M(b;w;a)\in\mathcal{H}$ を次のように定める. まず $a=b$ のときは

$$I^M(a;w;a)=\begin{cases}1, w=e \text{ のとき},\\ 0, w\neq e \text{ のとき}\end{cases}$$

とおく. $a\neq b$ のときは, $k=\ell(w)$ とおき, $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の対象 ${}_bP_{a,k}$ を考える. この対象は $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ に属し, また, $\omega_{\mathrm{dR}}({}_bP_{a,k})^*=\mathbb{Q}[W]_{\le k}$ が成り立つ. ここで上付き添字の $*$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の双対を表わす. $\omega_B({}_bP_{a,k})$ は標準的に $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{0,1,\infty\},t_a,t_b)]/I^{k+1}$ と同型なので, $a$ から $b$ までを一直線に結ぶ素直な道 $\gamma_{a,b}$ がとれる. 3 つ組 $({}_bP_{a,k},\gamma_{a,b},[w])$ は $(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ 枠つきの $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ の対象となる. $\gamma_{a,b}$ が $F_\infty$ の作用で不変なので, $[{}_bP_{a,k},\gamma_{a,b},[w]]\in\mathcal{A}_{\ge 0}(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ は $F_\infty$ 不変部分 $\mathcal{H}$ に属する. この元を $I^M(b;w;a)$ で表わす. $[w]$ が $(\omega_{\mathrm{dR}}({}_bP_{a,k})^*)_{\ell(w)}$ の元であることを用いると $I^M(b;w;a)$ が $\mathcal{H}_{\ell(w)}$ に属することがわかる.

**12.6.2.** 元 $I^M(b;w;a)$ は次の性質を満たす.

(1) $a=b$ かつ $w\neq e$ ならば $I^M(a;w;a)=0$,

(2) $w=e$ のとき $I^M(b;e;a)=1$,

(3) $I^M(a;(w)^{\leftrightarrow};b)=(-1)^{\ell(w)}I^M(b;w;a)$

(4) 任意の $v,w\in W$ に対し, 次のシャッフル積公式が成り立つ:

$$I^M(b;v;a)\cdot I^M(b;w;a)=\sum_{h\in\mathrm{Sh}(\ell(v),\ell(w))}I^M(b;h(v,w);a),$$

(5) $w\in W$ が文字 0 のみからなる空でないワードのとき $I^M(1;w;0)=I^M(0;w;1)=0$.

**12.6.3.** インデックス $\Bbbk$ に対し, $\Bbbk$ に対応するワード $w(\Bbbk)\in W_1$ を考え, $\mathcal{H}$ の元 $I^M(1;w(\Bbbk);0)$ のことを $\zeta^M(\Bbbk)$ で表わす. これをインデックス $\Bbbk$ のモチヴィック多重ゼータ値とよぶ. 集合

$$\{\zeta^M(\Bbbk)\mid \Bbbk \text{ は収束インデックス}\}$$

の生成する $\mathcal{H}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ で表わす. $\mathcal{H}$ は次数付き $\mathbb{Q}$ 代数であり, $k=|\Bbbk|$ を $\Bbbk$ の重さとすると, 12.6.1 の最後に述べたことから $\zeta^M(\Bbbk)$ は $\mathcal{H}$ の次数 $k$ 部分

$\mathcal{H}_k$ に属する. したがって $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ は $\mathcal{H}_k^{\mathrm{MZV}} = \mathcal{H}^{\mathrm{MZV}} \cap \mathcal{H}_k$ の直和であり, $\mathcal{H}_k^{\mathrm{MZV}}$ は, 集合

$$\{\zeta^M(\Bbbk) \mid \Bbbk \text{ は重さ } k \text{ の収束インデックス}\}$$

の生成する $\mathcal{H}_k$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間となる. 12.6.2 で性質 (4) として述べたシャッフル積公式より, $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ は $\mathcal{H}$ の次数付き部分 $\mathbb{Q}$ 代数となる.

注. 収束インデックスでないインデックス $\Bbbk$ に対しても $\zeta^M(\Bbbk)$ を定義したが, この $\zeta^M(\Bbbk)$ は, 重さ $|\Bbbk|$ の収束インデックスに対するモチヴィック多重ゼータ値から, 積分表示による正規化 (の定数項をとる) という方法で構成される $\mathcal{H}$ の元に一致する. 特に任意のインデックス $\Bbbk$ に対して $\zeta^M(\Bbbk)$ は $\mathcal{H}_{|\Bbbk|}^{\mathrm{MZV}}$ に属する. さらに $W_1$ に属するとは限らない $w \in W$ に対する $I^M(1;w;0)$ も, 重さ $\ell(w)$ のインデックスに対するモチヴィック多重ゼータ値から, 積分表示による正規化 (の定数項をとる) という方法で構成される $\mathcal{H}$ の元に一致する. 特に任意の $w \in W$ に対し, $I^M(1;w;0)$ は $\mathcal{H}_{\ell(w)}^{\mathrm{MZV}}$ に属する. 収束インデックス $\Bbbk$ に対する $\zeta^M(\Bbbk)$ は調和積公式もみたし, 収束しないインデックスについても, 級数表示による正規化を用いて拡張した形の調和積公式 ([AK] を参照) をみたす. ただしこれらは自明ではなく, 古庄 [F4] の結果 [11] から従う. 本稿の主要部分では, モチヴィック多重ゼータ値が調和積公式をみたすということは使わないので詳細は省略する.

**12.6.4.** 比較点 $\mathrm{comp}: \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to \pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ を考える. 合成 $j(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}}) \circ \mathrm{comp}$ は複素共役の作用と両立的なので, 射 $\mathrm{Spec}\mathbb{R} \to \pi_1^+(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ を誘導する. 座標環に移行して $\mathbb{Q}$ 代数の準同型 $c: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ が得られる. $\Bbbk$ を収束インデックスとするとき, $\zeta(\Bbbk)$ の反復積分表示を用いると, この準同型による $\zeta^M(\Bbbk)$ の像が $\zeta(\Bbbk)$ に一致することが分かる.

このことから, 準同型 $c$ は各非負整数 $k \geq 0$ に対し $\mathbb{Q}$ 線形な全射 $\mathcal{H}_k^{\mathrm{MZV}} \twoheadrightarrow Z_k$ を導くことがわかる. $\mathcal{H}_k^{\mathrm{MZV}} \subset \mathcal{H}_k$ であり $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}_k = d_k$ であることより, $\dim_{\mathbb{Q}} Z_k \leq d_k$ となり, 定理 6.3 が従う.

**12.6.5.** 準同型 $c: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ は単射であると予想されている. 次元予想 6.2 は $c$ が単射かつ $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ であるという主張と同値である. 以下の系 12.4 で述べるように, 本稿で紹介する Brown の結果の帰結として後者の主張の後半部分 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ が従う.

**12.6.6.** インデックスのうち $\{2,3\}$ のみからなるもの全体を $I^{\{2,3\}}$ で表わす. 定義から $\emptyset \in I^{\{2,3\}}$ であり, また $I^{\{2,3\}}$ に属するインデックスは収束インデックスである. $\{\zeta^M(\Bbbk) \mid \Bbbk \in I^{\{2,3\}}\}$ の生成する $\mathcal{H}$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ で表わす. 定義から $\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ は $\mathcal{H}_k^{\{2,3\}} = \mathcal{H}^{\{2,3\}} \cap \mathcal{H}_k$ の直和になり, 包含関係

$$\mathcal{H}_k^{\{2,3\}} \subset \mathcal{H}_k^{\mathrm{MZV}} \subset \mathcal{H}_k$$

が成り立つ.

[11] 同様の結果を寺杣 [DT] もアナウンスしているようである.

非負整数 $k$ に対し, 写像 $\zeta^M : I^c \to \mathcal{H}$ の $I_k^{\{2,3\}}$ への制限は $\mathbb{Q}$ 線型写像 $\varphi_k : \mathbb{Q}[I_k^{\{2,3\}}] \to \mathcal{H}_k$ を与える. 定理 7.1 を示すには, 写像 $\varphi_k$ が全射であることを示せば十分である. ところが $\mathbb{Q}[I_k^{\{2,3\}}]$ と $\mathcal{H}_k$ は, ともに $d_k$ 次元の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間であるから, $\varphi_k$ の全射性の代わりに $\varphi_k$ の単射性を示せば十分である. したがって定理 7.1 は次の定理に帰着される:

**定理 12.3.** $\mathcal{H}_k^{\{2,3\}}$ の $d_k$ 個の生成元, つまり多重集合 $\{\zeta^M(\Bbbk) \mid \Bbbk \in I_k^{\{2,3\}}\}$ の元は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

**系 12.4.** $\mathcal{H}_k^{\{2,3\}} = \mathcal{H}_k^{\mathrm{MZV}} = \mathcal{H}_k$ が成り立つ. □

1 節で強い形の定理と述べたのは, この定理 12.3, あるいはその帰結である系 12.4 のことである. 定理 12.3 は

(1) Goncharov・Brown の余作用公式

(2) $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$ に関する Zagier の公式

の 2 つを主に用いて証明される.

# Part III
# 証明

## §13. Goncharov・Brown の余作用公式

### §13.1. 余作用準同型 Δ

$\partial\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環 $\mathcal{O}(\partial\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}}))$ を $\overline{\mathcal{H}}$ で表わす. 合成

$$\partial\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}}) \hookrightarrow \overline{\pi}_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}}) \to \overline{\pi}_1^{+}(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$$

は閉埋め込みであるから, この合成を通じて $\overline{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ の剰余環とみなす. $\mathbb{Q}$ 上のスキームの射 (12.7) が座標環に誘導する $\mathbb{Q}$ 代数の準同型

$$\Delta : \mathcal{H} \to \overline{\mathcal{H}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H} \tag{13.1}$$

を余作用準同型とよぶ.

全射準同型 $\mathcal{H} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{H}}$ による $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ の像を $\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{MZV}}$ で表わす. Goncharov [Go3] の議論を用いると, $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ の $\Delta$ による像が $\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{MZV}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ に含まれることがわかり, さらに各 $I^M(b; w; a)$ の像を具体的に記述することもできる. この記述を, 証明の概略を付けて説明することが本節の目的である. 原論文 [Go3] では, 同様の余作用を, 作用団 (operad)

と関係のある大きな Hopf 代数に埋め込むことによって記述しており, たいへん興味深い. しかしながら本稿の主要な目的とは直接の関係がないため, ここでは少し面白みがないが, より直接的な方法で記述を導くことにする. さらに別の方法として, Drinfeld [Dr] の導入した結合子の空間への群 $GRT$ の作用の定義を書き下すことによっても記述が導ける. 最後の方法が最もスマートであるが, ここではあえて別の方法で記述を導くことにする. [12]

注. Goncharov [Go3] よりも以前に伊原 [I2] は, 現在伊原の bracket とよばれている概念を導入し, 余作用の記述と実質的に同様のことを少し異なる文脈で行っている.

注. $\partial\pi_1(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ は (12.4), (12.6) により $U(\omega_{\mathrm{dR}})$ と同型であり, $U(\omega_{\mathrm{dR}})$ は群であるから, 逆元射 $U \to U$ が位数 2 の自己同型 $\iota : \overline{\mathcal{H}} \to \overline{\mathcal{H}}$ を与える. 自己同型 $\iota$ を対蹠写像 (antipode) とよぶ. 余作用準同型と違い, 本稿で紹介する内容では対蹠写像 $\iota$ はまったく活躍しない. しかし $\iota$ には将来性があり, 古庄 [F1] の導入した $p$ 進多重ゼータ値と法 $p$ 有限多重ゼータ値とを結びつける際に, 重要な役割を果たすのではないかと著者は期待している.

## § 13.2. 一般的な形

$(M, v, f)$ を $(\omega_B, \omega_{\mathrm{dR}})$ 枠つきの $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ の対象とする.

$\omega_{\mathrm{dR}}(M)^*$ を $\omega_{\mathrm{dR}}(M)$ の $\mathbb{Q}$ 線型双対とする. 10.5 項の最後に述べたように $\omega_{\mathrm{dR}}(M)^*$ は次数つきベクトル空間の構造 $\omega_{\mathrm{dR}}(M)^* = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(\omega_{\mathrm{dR}}(M)^*)_k$ を持つ. $M$ が $\mathrm{MT}^{\mathrm{eff}}(\mathbb{Z})$ の対象であることから, $k < 0$ のとき $(\omega_{\mathrm{dR}}(M)^*)_k = 0$ となる. 各整数 $k \geq 0$ に対し $(\omega_{\mathrm{dR}}(M)^*)_k$ の基底 $B_k$ をひとつ選ぶ. $h \in B_k$ に対し, $\omega_{\mathrm{dR}}(M)_{-k}$ の双対基底における $h$ に対応する元を $h^*$ で表わす. $\omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}(1))$ の基底 $t$ をひとつ選んでおく. $f \in \omega_{\mathrm{dR}}(M)^*_k$ と仮定すると, 定義により

$$\Delta([M, v, f]) = \sum_{0\leq\ell\leq k}\sum_{h\in B_\ell} \partial[W_{-2\ell}M \otimes \mathbb{Q}(-\ell), \overline{h^* \otimes t^{-\ell}}, f \otimes t^\ell] \otimes [M, v, h] \tag{13.2}$$

が成立する. ここで右辺に現れる $\partial[W_{-2\ell}M \otimes \mathbb{Q}(-\ell), \overline{h^* \otimes t^{-\ell}}, f \otimes t^\ell]$ は $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環の元であるが, 同型 (12.4) を通じて $\overline{\mathcal{H}}$ の元とみなしている.

## § 13.3. 解析接続写像

式 (8.1) より多重ポリログの生成する空間を微分方程式の解空間とみなすことができる. 多重ポリログを素直な道 $\gamma_{0,1}$ に沿って解析接続することを考える. 多重ポリログを解析接続すると, 一般には $z = 1$ で特異点が現れるが, 特異点は十分よくコントロールが可能であり, $z = 1$ のまわりでの正則関数を係数とする $\log(1 - z)$ の多項式の形に表わせる. さらに, 微分方程式が変数変換 $z \leftrightarrow 1 - z$ に関して対称的な形をしていることから, 多項

[12] ここで紹介する方法の利点は, $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ との関係を使わずに途中まで議論が進む点にある. そのため, 多重ゼータ値の関数体類似 [Th, 5.10] のように $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ のような幾何的対象との関係が知られていないものに対しても, 同様の方法が適用可能である可能性を秘めている.

式の係数に現れる正則関数は多重ポリログの変数 $z$ を $1-z$ におきかえたものの, 実数係数の有限和で記述でき, 係数の部分に多重ゼータ値が現れる. 本項ではこの現象を形式化し, 多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\mathbb{k}}(z)$ の生成するベクトル空間を係数とする $\log(z)$ の多項式のなす空間, および変数 $1-z$ に対する同様の空間を抽象化した加群 $V_0$, $V_1$ を可換環 $R$ に対して導入し, さらに $R$ が $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ 代数のとき, 素直な道 $\gamma_{i,1-i}$ に沿った解析接続を抽象化した写像 ${}_{1-i}AC_i : V_i \to V_{1-i}$ を $i=0,1$ に対して導入する. 多重ポリログのなす微分方程式系は通常, KZ 方程式

$$\frac{dG(z)}{dz} = \frac{AG(z)}{z} + \frac{BG(z)}{z-1}$$

を用いて記述される. ここで $G(z)$ は, $z$ についての解析関数を係数とする, 2 変数 $A$, $B$ についての非可換形式べき級数である. 本項で導入する写像 ${}_{1-i}AC_i : V_i \to V_{1-i}$ は KZ 方程式の解の接続を表わす Drinfeld 結合子 $\Phi_{KZ}$(18.1.5 も見よ) と実質的に同等なものである.

$R$ を可換環とする. $V_0 = V_1 = R[W]$ とおく. $i=0,1$ に対し, モノドロミー写像とよばれる $R$ 線形な自己準同型 $N : V_i \to V_i$ を次の規則で定める;

- $w \in W_1$ に対し $N([w]) = 0$,
- $w \in W \setminus W_1$ に対し $w = w'0$ と書くと $N([w]) = [w']$.

組 $(V_0, N : V_0 \to V_0)$ と組 $(V_1, N : V_1 \to V_1)$ は定義から同じものであるが, あえて同一視しないことにする.

$R$ が可換 $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ 代数であると仮定する. $i=0,1$ に対し, 解析接続写像とよばれる $R$ 線形な自己準同型写像 ${}_{1-i}AC_i : V_i \to V_{1-i}$ を, $w \in W$ に対し, $w$ の綴りを $w = w_1 \cdots w_k$ とおくとき,

$${}_{1-i}AC_i([w]) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j I^M(1-i; w_{j+1} \cdots w_k; i)[(w_1 \cdots w_j)^{\updownarrow}]$$

とおくことによって定める. ${}_{1-i}AC_i$ は同型であることが容易に確かめられる. 実は ${}_{1-i}AC_i$ と ${}_iAC_{1-i}$ は互いに逆写像になっている. このことはモチヴィック多重ゼータ値の満たす結合子関係式 (18.1.5 を参照) のうちの 2 サイクル関係式というものから分かる.

$R$ 線形な自己準同型 $N_0, N_1 : V_0 \to V_0$ を $N_0 = N$, $N_1 = {}_0AC_1 \circ N \circ {}_1AC_0$ によって定める. $w \in W$ とし, $w = w_1 \cdots w_k$ を $w$ の綴りとする. $N_w = N_{w_1} \circ \cdots \circ N_{w_k}$ とおく.

## § 13.4. 作用の記述

13.2 項と同様基底 $t \in \omega_{\mathrm{dR}}(\mathbb{Q}(1))$ をひとつ選んでおく. 整数 $k \geq 0$ に対し, $\mathrm{Hom}(\omega_{\mathrm{dR}}({}_1P_{0,k}), \mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}$ 基底 $\{[w] \mid w \in W, w$ は長さ $k$ 以下 $\}$ の双対基底を $\{[w]^* \mid w \in W, w$ は長さ $k$ 以下 $\}$ で表わす. このとき次が成り立つ:

**命題 13.1.** $v, w \in W$ とし, $v = v_1 \cdots v_\ell$ を $v$ の綴りとする. $w$ の長さを $k$ とし, $\ell \le k$ であると仮定する. このとき $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{dR}})$ の元

$$[W_{-2\ell}({}_1P_{0,k}) \otimes \mathbb{Q}(-\ell), \overline{[v]^* \cdot \gamma_{0,1} \otimes t^\ell}, [w] \otimes t^\ell]$$

を 13.2 項と同様の方法で $\overline{\mathcal{H}}$ の元とみなしたものは $\overline{I}^M(1; N_v([w]); 0)$ に等しい. ここで $x = \sum_{w \in W} a_w[w] \in \mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}[W]$ に対し $\sum_{w \in W} a_w I^M(1; w; 0) \in \mathcal{H}$ の $\overline{\mathcal{H}}$ における類を $\overline{I}^M(1; x; 0)$ と表わした.

命題 13.1 の式を (13.2) に代入すると, $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ の $\Delta$ による像が $\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{MZV}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ に含まれることがわかり, さらに 各 $I^M(b; w; a)$ の像を具体的に記述することもできる. $\Delta$ を $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ に制限して得られる準同型を

$$\Delta^{\mathrm{MZV}} : \mathcal{H}^{\mathrm{MZV}} \to \overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{MZV}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}^{\mathrm{MZV}} \tag{13.3}$$

で表わす. 以下に $\Delta^{\mathrm{MZV}}$ の具体的な記述を述べるが, その前に記号の準備をする.

## § 13.5. ワードの接合と短絡

$S$ を有限集合とする. 長さ 1 以上, 長さ 2 以上のワード $w \in W(S)$ 全体のなす集合をそれぞれ $W(S)_+$, $W(S)_{++}$ で表わす.

2 つのワード $v, w \in W(S)_+$ が接合可能であるとは, $v$ の最後の文字と $w$ の最初の文字が等しいことをいう. $v$ と $w$ が接合可能のとき, $v$ の最後の文字を $a$ とおくと $v = v'a$, $w = aw'$ の形に書ける. このときワード $v'aw'$ を $v$ と $w$ の接合とよび記号 $v \circ w$ で表わす. $W(S)_+$ の元の有限列 $(w_1, \cdots, w_n)$ (ここで $n$ は 1 以上の整数) が接合可能列であるとは, $i = 1, \ldots, n-1$ に対し, $w_i$ の最後の文字と $w_{i+1}$ の最初の文字が等しいことをいう ($n = 1$ のときは常に接合可能列であるとみなす). 2 つのワードの接合と同様にして, 接合可能列 $(w_1, \cdots, w_n)$ の接合 $w_1 \circ \cdots \circ w_n$ を定義する. 接合可能列 $(w_1, \cdots, w_n)$ が被約であるとは $w_1, \ldots, w_n \in W(S)_{++}$ であることをいう. $w \in W(S)_{++}$ の最初の文字を $b$, 最後の文字を $a$ とするとき, 長さ 2 のワード $ba$ を $w$ の短絡とよび記号 $\overline{w}$ で表わす.

$W(S)_{++}$ の元全体を基底とする $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathbb{Q}[W(S)_{++}]$, および $W(S)_{++}$ の元全体を変数とする $\mathbb{Q}$ 係数多項式環 $P_{W(S)_{++}}$ を考える. ワード $w \in W(S)_{++}$ を $P_{W(S)_{++}}$ の変数とみなしたものを $[w]$ で表わす. $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\Delta : \mathbb{Q}[W(S)_{++}] \to P_{W(S)_{++}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[W(S)_{++}]$ を次で定める:

$$\Delta(w) = \sum_{\substack{(w_1, \ldots, w_n) \\ w = w_1 \circ \cdots \circ w_n}} \left( \prod_{i=1}^{n} [w_i] \right) \otimes (\overline{w}_1 \circ \cdots \circ \overline{w}_n)$$

ここで $(w_1, \ldots, w_n)$ は被約な接合可能列であって, 合成 $w_1 \circ \cdots \circ w_n$ が $w$ に等しいようなものをすべて動く.

## §13.6. 余積公式

以下では $S=\{0,1\}$ の場合を考え, $S$ を省略して $W_{++}=W(S)_{++}$ などと書くことにする. $w\in W_{++}$ とするとき, $I^M(w)\in\mathcal{H}$ を,

$$I^M(w)=I^M(b;w';a)$$

によって定める. ここで $w$ の最初の文字を $b$, 最後の文字を $a$ とし, $w=bw'a$ とおいた. 12.6.3 に与えた注より, $I^M(w)$ は $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ に属する. $w\in W_{++}$ を $I^M(w)\in\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ に送る写像 $I^M: W_{++}\to\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ を延長して得られる $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\mathbb{Q}[W_{++}]\to\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$, および $\mathbb{Q}$ 代数の準同型 $P_{W_{++}}\to\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}$ を同じ記号 $I^M$ で表わす. また $I^M$ と商準同型 $\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}\to\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{MZV}}$ との合成を $\overline{I}^M$ で表わす.

**命題 13.2** (余積公式)**.** 上の記号の下, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}[W_{++}] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "I^M"'] & P_{W_{++}}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[W_{++}] \arrow[d, "\overline{I}^M\otimes I^M"] \\
\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}} \arrow[r, "\Delta^{\mathrm{MZV}}"] & \overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{MZV}}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathcal{H}^{\mathrm{MZV}}
\end{tikzcd}$$

が可換となる. したがって $w\in W_{++}$ に対し,

$$\Delta^{\mathrm{MZV}}(I^M(w))=\sum_{\substack{(w_1,\dots,w_n)\\ w=w_1\circ\cdots\circ w_n}}\left(\prod_{i=1}^n \overline{I}^M(w_i)\right)\otimes I^M(\overline{w}_1\circ\cdots\circ\overline{w}_n) \tag{13.4}$$

が成り立つ. ここで $(w_1,\dots,w_n)$ は被約な接合可能列であって, 合成 $w_1\circ\cdots\circ w_n$ が $w$ に等しいようなものをすべて動く.

## §14. 主定理の証明

本節では定理 12.3 の証明を述べる. 証明の概略を述べると以下のようになる. まず 14.1 項で, 余作用準同型 $\Delta$ の $\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ への制限がよい性質をみたすことを見る. また準備として整数 $k\geq 1$ に対し $\Delta(\zeta^M(k))=\Delta^{\mathrm{MZV}}(\zeta^M(k))$ を計算しておく. 次に 14.2 項で群の作用を記述する $\Delta$ の情報を Lie 代数の作用の情報に落として得られる準同型 $D_k$ を導入し, 公式 (13.4) を用いて $D_k$ についての公式 (14.1) を導く. 以降の議論では複雑な形をした公式 (13.4) は直接使わず, 常に (14.1) を経由した形で用いられる. 公式 (13.4) および公式 (14.1) は, 本質的に多重ゼータ値の結合子関係式とよばれる関係式 (18.1.5 を参照) だけから導けるものである. 次の 14.3 項は 14.2 項とは独立した議論であり, 10.4 項の最後で述べた圏 MT($\mathbb{Z}$) の非標準的な記述およびリーマンゼータの正の整数値が 0 でないことを用いて, 命題 14.10 が示される.[13] 14.4 項で非負整数 $a,b\in\mathbb{Z}$ に対し元

[13]Goncharov・Brown の余作用公式は多重ゼータ値の結合子関係式系から従うものであるが, 命題 14.10 を導く際に多重ゼータ値のモチヴィック関係式系が用いられている. 命題 14.10 を結合子関係式系だけから導くことができていない. このことが多重ゼータ値の空間が Hoffman 基底で生成されるということを結合子関係式系だけから導くことができていない主な理由である.

$\xi^M(a), \xi^M(a,b) \in \mathcal{H}^{\{2,3\}}$ を導入する. (14.1) と 命題 14.10 とを組み合わせることによって $\xi^M(a) \in \mathbb{Q}[\zeta^M(2)]$ であることおよび $\xi^M(a,b)$ が $\zeta^M(k)$ たちで生成される $\mathbb{Q}[\zeta^M(2)]$ 加群に属することが示される. さらに通常の (モチヴィックでない) 多重ゼータ値に関する Zagier [Z2] の結果を用いて, $\zeta^M(k)$ たちを用いた $\xi^M(a,b)$ の具体的表示を得る. 14.5 項で, $D_k$ の情報をさらに落として得られる準同型 $\overline{\partial}_{k,\ell}$ を整数 $k,\ell \geq 1$ に対して導入する. 証明は $\overline{\partial}_{k,\ell}$ の定義域の具体的な生成元が 1 次独立である, という主張を示すことに帰着される. (14.1) を巧妙に用いて, 準同型 $\overline{\partial}_{k,\ell}$ の像が, 定義域と同じ個数の生成元を持つ $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $V_{k,\ell}$ に入ることを示す. 帰納法を用いることにより, この $V_{k,\ell}$ の生成元は 1 次独立であると仮定できる. 14.4 項の結果を用いると, 定義域の各生成元を準同型 $\overline{\partial}_{k,\ell}$ で送った像を, $V_{k,\ell}$ の生成元の具体的な一次結合で書くことができる. 最後にこの一次結合に現れる係数から作った行列が可逆であることを示すことによって定理 12.3 の証明が完結する.

## §14.1. 余作用準同型の解析

余作用準同型 (13.3) を記述する公式 (13.4) から出発する. $\Bbbk \in I^{\{2,3\}}$ のとき, この公式による $\Delta^{\mathrm{MZV}}(\zeta^M(\Bbbk))$ の記述は比較的簡単な形をしている. とくに次が成り立つ:

**補題 14.1.**

$$\Delta^{\mathrm{MZV}}(\mathcal{H}^{\{2,3\}}) \subset \overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{MZV}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}^{\{2,3\}}$$

が成立する.

(証明). 2 つのワード 10, 100 の生成する $W$ の部分モノイドを $W^{\{2,3\}} \subset W$ で表わす. $W^{\{2,3\}}$ の元のうち, 最後が 10 で終わるもの全体を $W_{10}^{\{2,3\}}$ で表わす. $\Bbbk \in I^{\{2,3\}}$ とすると, $1w(\Bbbk)0 \in W_{10}^{\{2,3\}}$ である. $\Bbbk \in I^{\{2,3\}}$ を $1w(\Bbbk)0 \in W_{10}^{\{2,3\}}$ に送る写像 $I^{\{2,3\}} \to W_{10}^{\{2,3\}}$ は全単射であり, さらに $\Bbbk \in I^{\{2,3\}}$ に対し $\zeta^M(\Bbbk) = I^M(1w(\Bbbk)0)$ が成り立つ.

$w \in W_{++}$ の最初の文字と最後の文字が等しいとき, $w$ が $w$ の短絡 $aa$ と等しくなければ $I^M(w) = 0$ である. したがって主張は次の補題 14.2 から従う. □

**補題 14.2.** $(w_1, \dots, w_n)$ を被約な接合可能列であって, 合成 $w_1 \circ \cdots \circ w_n$ が $W_{10}^{\{2,3\}}$ に属するようなものとする. さらに $1 \leq i \leq n$ をみたす各整数 $i$ に対し, ワード $w_i$ の最初の文字と最後の文字が異なるか, または $w_i = \overline{w_i}$ であるとする. このとき $\overline{w}_1 \circ \cdots \circ \overline{w}_n$ も $W_{10}^{\{2,3\}}$ に属する.

(証明). 帰納法によって, ひとつの $i$ を除いて $w_i = \overline{w_i}$ である場合に帰着できるが, その場合は簡単に証明できる. □

整数 $\ell \geq 0$ に対し, 集合

$$\{\zeta^M(\Bbbk) \mid \Bbbk = (k_1, \dots, k_n) \in I^{\{2,3\}}, k_i = 3 \text{ となる } i \text{ が } \ell \text{ 個以下 }\}$$

の生成する $\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ の次数付き部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $F_\ell \mathcal{H}^{\{2,3\}} \subset \mathcal{H}^{\{2,3\}}$ で表わす. このとき次が成り立つ.

**補題 14.3.** このとき $\Delta^{\mathrm{MZV}}(F_\ell\mathcal{H}^{\{2,3\}}) \subset \overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{MZV}} \otimes_{\mathbb{Q}} F_\ell\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ が成立する.

(証明). 補題 14.1 の証明をよく見るとわかる. □

インデックス $\Bbbk$ に対し, $\overline{\mathcal{H}}$ における $\zeta^M(\Bbbk)$ の像を $\overline{\zeta}^M(\Bbbk)$ で表わす.

**補題 14.4.** $k \geq 1$ を整数とするとき, $\Delta^{\mathrm{MZV}}(\zeta^M(k)) = 1 \otimes \zeta^M(k) + \overline{\zeta}^M(k) \otimes 1$ が成り立つ.

(証明). 公式 (13.4) および 12.6.2 の性質 (5) から従う. □

**系 14.5.** $\Delta(\zeta^M(2)) = 1 \otimes \zeta^M(2)$ が成り立つ. 特に $\Delta$ は $\mathbb{Q}[\zeta^M(2)]$ 代数の準同型となる.

(証明). $\overline{\mathcal{H}}_2 = \{0\}$ であることから従う. □

## § 14.2. 準同型 $D_k$

公式 (13.4) はかなり複雑な形をしており分かりにくい. そこで, 群の作用を記述する余作用準同型 $\Delta$ が含んでいる情報を Lie 代数の作用の情報に落とすことによって, 各整数 $k \geq 1$ に対し $\mathbb{Q}$ 線形写像 $D_k$ を定義する. $D_k$ たちは $\Delta$ が内包する重要な構造をかなりよく維持している. 一方で $D_k$ たちを用いることによって, 公式 (13.4) の構造の一部を解析しやすいような形で抽出することができる.

**14.2.1.** 各整数 $k \geq 1$ に対し, $\mathcal{L}_k = \overline{\mathcal{H}}_k / \sum_{1\leq r\leq k-1} \overline{\mathcal{H}}_r \cdot \overline{\mathcal{H}}_{k-r}$ とおき, 合成

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\Delta} \overline{\mathcal{H}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{H}}_k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_k \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{H}$$

を $D_k$ で表わす. $D_k$ は余作用準同型 $\Delta$ の情報を落として得られるものである. $\Delta$ の記述 (13.4) に現れる項のうち, 高々 1 つの $i$ を除いて $w_i$ が長さ 2 となるような $(w_1, \ldots, w_n)$ についての項を除くと $D_k$ には寄与しない. このことから,

$$D_k(I^M(w)) = \sum_{w=w_1\circ w_2\circ w_3} \overline{I}^M(w_2) \otimes I^M(w_1 w_3) \tag{14.1}$$

が成り立つことがわかる. ここで上式右辺の和は, $w = w_1 \circ w_2 \circ w_3$ かつ $\ell(w_2) = k+2$ をみたす (被約とは限らない) 接合可能列 $(w_1, w_2, w_3)$ をすべて動く. また $\overline{I}^M(w_2) \in \overline{\mathcal{H}}_k$ の商 $\mathcal{L}_k$ における類を同じ記号で書いた.

**補題 14.6.** 任意の奇数 $k \geq 3$ に対し,

$$D_k(F_\ell\mathcal{H}^{\{2,3\}}) \subset \mathcal{L}_k \otimes_{\mathbb{Q}} F_{\ell-1}\mathcal{H}^{\{2,3\}} \tag{14.2}$$

が成り立つ. ただし $\ell = 0$ のときは $F_{-1}\mathcal{H}^{\{2,3\}} = \{0\}$ であると理解する.

(証明). 補題 14.1 の証明を丁寧に追うとわかる. □

包含関係 (14.2) において, 左辺と右辺とでフィルトレーション $F_\bullet$ の番号がひとつずれていることがポイントである.

## § 14.3. MT($\mathbb{Z}$) の抽象的構造からの帰結

$U(\omega_{\mathrm{dR}})$ の座標環 $\mathcal{O}(U(\omega_{\mathrm{dR}}))$ を $\mathcal{B}$ で表わす. $\mathcal{B}$ は次数付き $\mathbb{Q}$ 代数の構造をもち, $\mathcal{B} \to \mathcal{H}$ は次数付き $\mathbb{Q}$ 代数の準同型となる. $U(\omega_{\mathrm{dR}})$ は $\mathbb{Q}$ 上の副巾単代数群であり, その Lie 代数は各 $m \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$ に (標準的とは限らないが) 生成元 $f_m$ を 1 つずつもつような次数付き自由 Lie 代数 (の次数についての完備化) となる. したがって, $\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})$ の包絡代数 $U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))$ は, $f_m, m \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$ たちの生成する $\mathbb{Q}$ 上の非可換多項式代数の次数についての完備化となる. 整数 $d \leq 0$ に対し, $\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})$ および $U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))$ の次数 $d$ 部分を, それぞれ $\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})_d$, $U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d$ で表わす. $d \leq m \leq 0$ をみたす整数 $d, m$, および $f \in \mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})_m$ に対し, $L_{f,d} : U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_{d-m} \to U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d$ を左から $f$ をかけることによって得られる $\mathbb{Q}$ 線形写像とする. $d \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$, $f \in U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d$ に対し, $f$ を $f_m, m \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$ たちの非可換多項式で表わしたときの $f_d$ の係数を $\alpha_d(f)$ で表わす. $f$ を $\alpha_d(f)$ に送る写像を $\alpha_d : U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d \to \mathbb{Q}$ で表わす.

**補題 14.7.** $d \leq 0$ を整数とする.

(1) $d \leq -1$ ならば $U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として $L_{f_m,d}$ たち (ここで $m$ は $d \leq m \leq -3$ をみたす奇数を動く) の像で生成される.

(2) $d$ が奇数ならば $U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として $L_{f_m,d}$ たち (ここで $m$ は $d < m \leq -3$ をみたす奇数を動く) の像および $f_d$ で生成される.

(3) $F : U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d \to \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 線形写像とする. このとき $d \leq m \leq -3$ をみたす任意の奇数 $m$ に対し合成 $F \circ L_{f_m,d}$ が 0 であれば, $F = 0$ または $d = 0$ が成り立つ.

(4) $d$ を $-3$ 以下の奇数と仮定し, $F : U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d \to \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 線形写像とする. このとき $d < m \leq -3$ をみたす任意の奇数 $m$ に対し合成 $F \circ L_{f_m,d}$ が 0 であれば, $F$ は $\alpha_d$ の有理数倍である.

(5) $F : U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d \to \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 線形写像とする. このとき $d \leq m \leq -3$ をみたす任意の奇数 $m$ および任意の $f \in \mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})_m$ に対し合成 $F \circ L_{f,d}$ が 0 であれば, $F = 0$ または $d = 0$ が成り立つ.

(6) $d$ を $-3$ 以下の奇数と仮定し, $F : U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_d \to \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 線形写像とする. このとき $d < m \leq -3$ をみたす任意の奇数 $m$ および任意の $f \in \mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})_m$ に対し合成 $F \circ L_{f,d}$ が 0 であれば, $F$ は $\alpha_d$ の有理数倍である.

(証明). (1), (2) は明らかである. (3) は (1) を言いかえただけである. (4) は (2) の証明の議論を見ることにより分かる. (5), (6) はそれぞれ (3), (4) の主張を弱めただけである. □

**14.3.1.** $U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))$ は自然に完備化された次数付き Hopf 代数の構造を持つ. その余積を $\Delta_U^* : U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})) \to U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}}U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))$ で表わすと, 各 $m \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$ に対し $\Delta_U^*(f_m) = 1 \otimes f_m \otimes + f_m \otimes 1$ が成り立つ. さらに $\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})$ は $\Delta_U^*(f) = 1 \otimes f + f \otimes 1$ をみたす $f \in U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))$ の全体がなす $U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間に一致している. 座標環 $\mathcal{B}$ は, $\mathbb{Q}$ 上の次数付き Hopf 代数としてこの包絡代数の双対とみなせる.

**補題 14.8.** $d \geq 1$ を整数とする. $\mathcal{B}$ の次数 $d$ 部分 $\mathcal{B}_d$ を $U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_{-d}$ の双対とみなしたとき, 部分空間 $\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})_{-d} \subset U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))_{-d}$ に対応する $\mathcal{B}_d$ の商ベクトル空間は, $\overline{\mathcal{B}}_d := \mathcal{B}_d / \sum_{i=1}^{d-1} \mathcal{B}_i \mathcal{B}_{d-i}$ に等しい.

(証明). $\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})$ は $f \in U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))$ を $\Delta_U^*(f) - 1 \otimes f - f \otimes 1$ に送る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の準同型 $U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})) \to U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}}U(\mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}}))$ の核であるが, この準同型の双対をとることによって得られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の準同型 $\mathcal{B} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ は, $k, k' \geq 0$ を非負整数, $b \in \mathcal{B}_k$, $b' \in \mathcal{B}_{k'}$ をそれぞれ $\mathcal{B}$ の次数 $k$, $k'$ 部分に属する元とするとき, $b \otimes b' \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ を, $kk' \neq 0$ のとき $bb'$ に, $k, k'$ のうち一方だけが $0$ のとき $0$ に, $k = k' = 0$ のとき $-bb'$ に送る写像となっている. このことから主張が従う. □

Hopf 代数 $\mathcal{B}$ の余積を $\Delta_U : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{B}$ で表わす. 整数 $d \geq 0$ および $3 \leq k < d$ をみたす奇数 $k$ に対し, 合成

$$\mathcal{B}_d \xrightarrow{\Delta_U} \bigoplus_{i+j=d} \mathcal{B}_i \otimes \mathcal{B}_j \twoheadrightarrow \mathcal{B}_k \otimes \mathcal{B}_{d-k} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{B}}_k \otimes \mathcal{B}_{d-k}$$

を $D'_{d,k}$ で表わす. $m \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$, $f \in \mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})_m$ に対し, $1 \in \mathbb{Q}$ を $f$ に送る準同型 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{Lie}\,U(\omega_{\mathrm{dR}})_m$ の双対を $h_f : \overline{\mathcal{B}}_{-m} \to \mathbb{Q}$ で表わすことにすると, $d \leq m$ をみたす任意の整数 $d$ に対し, 合成

$$\mathcal{B}_{-d} \xrightarrow{D'_{-d,-m}} \overline{\mathcal{B}}_{-m} \otimes \mathcal{B}_{m-d} \xrightarrow{h_f \otimes \mathrm{id}} \mathcal{B}_{m-d}$$

は準同型 $L_{f,d}$ の双対写像に等しい. したがって補題 14.7 (5), (6) より次が従う:

**系 14.9.** $d \geq 0$ を整数, $x \in \mathcal{B}_d$ とする.

(1) $3 \leq k \leq d$ をみたす任意の奇数 $k$ に対し $D'_{d,k}(x) = 0$ であれば, $x = 0$ または $d = 0$ が成り立つ.

(2) $d$ を 3 以上の奇数と仮定する. このとき $3 \leq k < d$ をみたす任意の奇数 $k$ に対し $D'_{d,k}(x) = 0$ であれば, $x$ は $\alpha_{-d}$ の有理数倍である.

□

**14.3.2.** $\pi_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ の $\mathbb{Q}$ 有理点 $\lambda_0$ が存在するのでひとつ選ぶ. $\lambda_0$ との合成が誘導する同型

$$\overline{\pi}_1(\omega_{\mathrm{dR}},\omega_{\mathrm{dR}}) \xrightarrow{\cong} \overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$$

の逆射を, 射 (12.5) および同型 (12.6) の逆射と合成することによって, $\lambda_0$ に依存する射 $\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}}) \to U(\omega_{\mathrm{dR}})$ を得る. この射は商射 $\overline{\pi}_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}}) \to \overline{\pi}_1^{+}(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}})$ を経由するので, 射 $\overline{\pi}_1^{+}(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}}) \to U(\omega_{\mathrm{dR}})$ が得られる. この射が座標環に誘導する $\mathbb{Q}$ 代数の準同型を $\iota_{\lambda_0}:\mathcal{B}\to\mathcal{H}$ で表わす. $\iota_{\lambda_0}$ を通じて $\mathcal{H}$ を $\mathcal{B}$ 代数とみなすと, $\mathcal{H}$ は $\mathcal{B}$ 代数として $\zeta^M(2)$ を変数とする $\mathcal{B}$ 上の 1 変数多項式環となる. 2 つの同型 (12.4), (12.6) を組み合わせて得られる同型 $\partial\pi_1(\omega_B,\omega_{\mathrm{dR}}) \cong U(\omega_{\mathrm{dR}})$ が座標環に誘導する $\mathbb{Q}$ 代数の同型を $\iota:\mathcal{B}\xrightarrow{\cong}\overline{\mathcal{H}}$ で表わす. $x\in\mathcal{H}$ とする. $x$ は $\zeta^M(2)$ についての多項式 $x=f(\zeta^M(2))$ (ここで $f(T)\in\mathcal{B}[T]$) の形に表せる. $f(T)=\sum_i b_i T^i$ とおく. 定数項 $f(0)\in\mathcal{B}$ を $\iota$ で送った $\iota(f(0))$ が, 商準同型 $\mathcal{H}\twoheadrightarrow\overline{\mathcal{H}}$ による $x$ の像に一致することに注意すると, $\Delta(x)$ は

$$\sum_i ((\iota\otimes\iota_{\lambda_0})\circ\Delta_U)(b_i)(1\otimes\zeta^M(2)^i)$$

に等しいことが分かる. このことを用いて次の命題が得られる:

**命題 14.10.** $d\geq 0$ を整数とする.

(1) 0 でない $f\in\mathcal{H}_d$ が, $3\leq k\leq d$ をみたす任意の奇数 $k$ について $D_k(f)=0$ を満たすとする. このとき $d$ は偶数であり, $f$ は $\zeta^M(2)^{d/2}$ の有理数倍である.

(2) $d$ が 3 以上の奇数であると仮定する. $f\in\mathcal{H}_d$ が, $3\leq k<d$ をみたす任意の奇数 $k$ について $D_k(f)=0$ を満たすとする. このとき $f$ は $\zeta^M(d)$ の有理数倍である.

(証明). 主張 (1) は系 14.9 (1) および補題 14.8 の帰結である. $d\geq 3$ を奇数とすると, 系 14.7 (1), (2) より, 主張 (2) の条件をみたす $f$ 全体は $\mathcal{H}_d$ の 1 次元部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間をなす. 補題 14.4 より $f=\zeta^M(d)$ は主張 (2) の条件をみたす. 12.6.4 で導入した準同型 $c:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ による $\zeta^M(d)$ の像は $\zeta(d)$ であり, $\zeta(d)\neq 0$ であるから, 主張 (2) が従う. □

## § 14.4. $\xi^M(a,b)$ および Zagier の公式

非負整数 $a,b$ に対し

- $\xi^M(a)=\begin{cases}1, & a=0 \text{ のとき},\\ \zeta^M(\overbrace{2,\ldots,2}^{a\text{ 個}}), & a\geq 1 \text{ のとき},\end{cases}$

- $\xi^M(a,b) = \zeta^M(\overbrace{2,\ldots,2}^{a\text{ 個}},3,\overbrace{2,\ldots,2}^{b\text{ 個}})$

と略記する. $F_1\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ がこれらの元で $\mathbb{Q}$ 上生成されることに注意しておく.

**補題 14.11.**

(1) 任意の非負整数 $a$ に対し, $\xi^M(a)$ は $\zeta^M(2)^a$ の 0 でない有理数倍となる.

(2) 任意の非負整数 $a,b$ に対し, 有理数 $\alpha^1_{a,b},\ldots,\alpha^{a+b+1}_{a,b}$ が存在して,

$$\xi^M(a,b) = \sum_{r=1}^{a+b+1} \alpha^r_{a,b}\zeta^M(2r+1)\xi^M(a+b+1-r)$$

が成り立つ.

(証明). $a$ を非負整数とするとき, 補題 14.6 より任意の奇数 $k \geq 1$ について $D_k(\xi^M(a)) = 0$ である. したがって命題 14.10 (1) より $\xi^M(a)$ は $\zeta^M(2)^a$ の有理数倍となる. 12.6.4 で導入した $\mathbb{Q}$ 代数の準同型 $c:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ による $\xi^M(a)$ の像は $\zeta(\overbrace{2,\ldots,2}^{a\text{ 個}})$ であるが, 後者は 0 でないので, $\xi^M(a)$ も 0 でないことがわかる. したがって主張 (1) が従う.

主張 (2) を $a+b$ についての帰納法で示す. $a=b=0$ のとき主張 (2) は明らかに成り立つ. 整数 $a,b\geq 0$ が $a+b\geq 1$ をみたすとする. $a'+b' < a+b$ をみたす任意の整数 $a',b'\geq 0$ に対し, $\xi^M(a',b')$ についての主張 (2) が成り立つと仮定する. $\xi^M(a',b')$ の $\mathcal{L}_{2(a'+b')+3}$ における像を $\xi^{\mathcal{L}}(a',b')$ で表わす. 公式 (14.1) をよく見ると, $3\leq k<2(a+b)+3$ をみたす各奇数 $k$ に対し $D_k(\xi^M(a,b))$ は $\xi^{\mathcal{L}}(a',b')\otimes\xi^M(a+b-(k-3)/2)$ の形の元 (ここで $a',b'$ は $2(a'+b')+3=k$ をみたす非負整数) の $\mathbb{Q}$ 係数の 1 次結合であることがわかる. 帰納法の仮定と主張 (1) を用い, $\overline{\zeta}^M(2)=0$ であることに注意すると, $\xi^{\mathcal{L}}(a',b')$ は $\zeta^{\mathcal{L}}(k)$ の有理数倍となる. ここで $\zeta^M(k)$ の $\mathcal{L}_k$ における像を $\zeta^{\mathcal{L}}(k)$ で表わした. したがって $D_k(\xi^M(a,b))$ は $\zeta^{\mathcal{L}}(k)\otimes\xi^M(a+b-(k-3)/2)$ の有理数倍となる. そこで $1\leq r<a+b+1$ をみたす各整数 $r$ に対し $D_{2r+1}(\xi^M(a,b)) = \alpha^r_{a,b}\zeta^{\mathcal{L}}(2r+1)\otimes\xi^M(a+b+1-r)$ とおき, $f=\xi^M(a,b)-\sum_{r=1}^{a+b}\alpha^r_{a,b}\zeta^M(2r+1)\xi^M(a+b+1-r)$ とおくと, 補題 14.4 より $3\leq k<2(a+b)+3$ をみたす任意の奇数 $k$ に対し $D_k(f)=0$ となる. $f\in\mathcal{H}_{2(a+b)+3}$ であり, $2(a+b)+3$ は奇数であるから, 命題 14.10 (2) より $f$ は $\zeta^M(2(a+b)+3)$ の有理数倍となり, 主張 (2) が成り立つ. □

補題 14.11 を受けて Zagier [Z2] は $\zeta^M(\Bbbk)$ ではなく $\zeta(\Bbbk)$ に対しては, 補題 14.11 と同様の公式が明示的な係数に対して成り立つことを示した:

**定理 14.12** (Zagier [Z2])**.** 非負整数 $a,b$ に対し

- $\xi(a) = \begin{cases} 1, & a = 0 \text{ のとき}, \\ \zeta(\overbrace{2,\ldots,2}^{a\text{ 個}}) = \frac{\pi^{2a}}{(2a+1)!}, & a \geq 1 \text{ のとき}, \end{cases}$
- $\xi(a,b) = \zeta(\overbrace{2,\ldots,2}^{a\text{ 個}},3,\overbrace{2,\ldots,2}^{b\text{ 個}})$

と略記する．このとき，

$$\xi(a,b) = 2\cdot\sum_{r=1}^{a+b+1}\beta^r_{a,b}\zeta(2r+1)\xi(a+b+1-r)$$

が成り立つ．ここで

$$\beta^r_{a,b} = (-1)^r\left(\binom{2r}{2b+2} - \left(1-\frac{1}{2^{2r}}\right)\binom{2r}{2a+1}\right)$$

である． □

注． 一般化された超幾何級数の変換公式を用いた定理 14.12 の別証明が [Li] にある．

12.6.4 で導入した $\mathbb{Q}$ 代数の準同型 $c:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ による $\xi^M(a)$ の像が $\xi(a)$ に一致する．$\xi(a) = \frac{\pi^{2a}}{(2a+1)!} = \frac{(6\zeta(2))^a}{(2a+1)!}$ であることから，補題 14.11 (1) より $\xi^M(a) = \frac{(6\zeta^M(2))^a}{(2a+1)!}$ であることがわかる．

**命題 14.13.** 補題 14.11 (2) に現れる有理数 $\alpha^r_{a,b}$ を $\alpha^r_{a,b} = 2\beta^r_{a,b}$ ととれる．

(証明)． $a+b$ についての帰納法で示す．$a+b=0$ のときは主張は明らかである．

整数 $a,b\geq 0$ が $a+b\geq 1$ をみたすとする．$a'+b' < a+b$ をみたす任意の整数 $a',b'\geq 0$ に対し，$\xi^M(a',b')$ について主張が成り立つと仮定する．$f = \xi^M(a,b) - 2\sum_{r=1}^{a+b}\beta^r_{a,b}\zeta^M(2r+1)\xi^M(a+b+1-r)$ とおく．帰納法の仮定を用い，少し計算をすると，$3\leq k < 2(a+b)+3$ をみたす任意の奇数 $k$ に対し $D_k(f) = 0$ となることが示せる．$f\in\mathcal{H}_{2(a+b)+3}$ であり，$2(a+b)+3$ は奇数であるから，命題 14.10 (2) より $f$ は $\zeta^M(2(a+b)+3)$ の有理数倍となる．定理 14.12 より $c(f)$ は $\zeta(2(a+b)+3)$ の $2\beta^{a+b+1}_{a,b}$ 倍である．したがって $f$ は $\zeta^M(2(a+b)+3)$ の $2\beta^{a+b+1}_{a,b}$ 倍となり，証明すべき主張が得られる． □

## §14.5. 証明の完結

$D_k$ が引き起こす準同型 $\mathrm{gr}^F_\ell\mathcal{H}^{\{2,3\}}\to\mathcal{L}_k\otimes_{\mathbb{Q}}\mathrm{gr}^F_{\ell-1}\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ を $\overline{D}_{k,\ell}$ とおく．さらに，整数 $k,\ell\geq 1$ に対し，写像

$$\overline{\partial}_{k,\ell} = \bigoplus_{0<r<\lfloor k/2\rfloor}\overline{D}_{2r+1,\ell}|_{\mathrm{gr}^F_\ell\mathcal{H}^{\{2,3\}}_k} : \mathrm{gr}^F_\ell\mathcal{H}^{\{2,3\}}_k \to \bigoplus_{0<r<\lfloor k/2\rfloor}\mathcal{L}_{2r+1}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathrm{gr}^F_{\ell-1}\mathcal{H}^{\{2,3\}}$$

を考える．合成

$$F_1\mathcal{H}^{\{2,3\}} \hookrightarrow \mathcal{H} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{H}} \twoheadrightarrow \bigoplus_{0<r<\lfloor k/2\rfloor} \overline{\mathcal{H}}_{2r+1} \twoheadrightarrow \bigoplus_{0<r<\lfloor k/2\rfloor} \mathcal{L}_{2r+1}$$

の像を $F_1\mathcal{L}_{\leq k}$ とおく．

**補題 14.14.** $\overline{\partial}_{k,\ell}$ の像は $F_1\mathcal{L}_{\leq k} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}^F_{\ell-1}\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ に含まれる．

(証明). 公式 (14.1) を用いると, 次の主張を示すことに帰着できる: ワード $w \in W_{++}$ が 3 条件

- $w$ の長さは奇数,
- $w$ の綴りにおいて 1 が 2 回連続しない,
- $w$ の綴りにおいて 0 が 2 回連続する箇所は高々 1 箇所,

をみたすならば $I^M(w) \in F_1\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ である．

$w \in W$ が上の 3 条件をみたすとする．このとき $I^M(w) \in F^1\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ であることを示す．$w$ の綴りにおいて 0 が 2 回連続しない場合は $I^M(w) = 0$ であるから, $w$ の綴りにおいて 0 が 2 回連続する箇所が 1 箇所存在すると仮定してよい．$w$ の最初の文字と最後の文字とが一致すれば $I^M(w) = 0$ であるから, $w$ の最初の文字と最後の文字とが異なると仮定してよい．

このとき, $w$ が 00 で始まるか, または 00 で終わる場合を除くと $I^M(w) \in F^1\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ であることは必要ならば 12.6.2 の性質 (3) を用いることにより容易に示せる．$w$ が 00 で始まるか, または 00 で終わると仮定する．$w$ が 00 で始まるときは $w = 00w'1$ の形に書け, $w$ が 00 で終わるときは $w = 1w'00$ の形に書ける．$I^M(0;0;1) = I^M(1;0;0) = 0$ に注意し, シャッフル積公式 (12.6.2 の性質 (4)) をワード 0 と $w'$ に対して用いると, $I^M(w)$ を, 上の 3 条件をみたすが 00 で始まりも 00 で終わりもしないワード $v$ に対する $I^M(v)$ を用いて表せることが分かり, $I^M(w) \in F_1\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ であることが示せる． □

$F_1\mathcal{L}_{\leq k} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{gr}^F_{\ell-1}\mathcal{H}^{\{2,3\}}$ の重さ $k$ 部分を $V_{k,\ell}$ とおく, $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathrm{gr}^F_\ell\mathcal{H}^{\{2,3\}}_k$ の (基底をなすことが期待される) 生成元の個数と $V_{k,\ell}$ の生成元の個数が一致することに注意する．このことより, 定理 12.3 を証明するためには, $\overline{\partial}_{k,\ell}$ が $\mathrm{gr}^F_\ell\mathcal{H}^{\{2,3\}}_k$ から $V_{k,\ell}$ への同型を与えることを示せば十分であることが, $\ell$ についての帰納法によりわかる．最後に係数 $\alpha^r_{a,b}$ の 2 進付値をみる議論により, $\overline{\partial}_{k,\ell}$ を与える行列が可逆であることがわかり, 定理 12.3 の証明が完了する．[14]

[14] 係数の 2 進付値に注目する点は, Deligne [De3] による関連する先行結果と類似している．

# Part IV
# 応用

## §15. Deligne・伊原の予想への応用

定理 12.3 の帰結である系 12.4 より, $\mathcal{H}$ が $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として, $\Bbbk$ を $\zeta^M(\Bbbk)$ に送る写像 $\zeta^M : I^c \to \mathcal{H}$ の像で生成される. これより, 圏 $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の Betti 実現に関する淡中基本群 $\pi_1(\omega_B)$ から副代数群 $\mathrm{Out}\pi_1^{\mathrm{unip}}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_0, t_0)$ への準同型

$$\iota^{\mathrm{unip}} : \pi_1(\omega_B) \to \mathrm{Out}\pi_1^{\mathrm{unip}}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0,1,\infty\}, t_0, t_0)$$

が閉埋め込みであることがわかる. ここで $\pi_1^{\mathrm{unip}}$ は基本群 $\pi_1$ の副巾単完備化, Out は外部自己同型のなす副代数群を表わす. これは準同型 $\iota^{\mathrm{\acute{e}t}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Out}\pi_1^{\mathrm{\acute{e}t}}(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \setminus \{0,1,\infty\}, t_0, t_0)$ の単射性を主張する Belyĭ [Bel] の定理の副代数群版というべき主張であり, [A, p.233] では予想 $(\mathrm{MTM})_?$ という名前でよばれていたものである.

$\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ および素数 $\ell$ を固定する. $\iota^{\mathrm{\acute{e}t}}$ の導く準同型

$$\iota^{\ell} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Out}\pi_1^{\ell}(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \setminus \{0,1,\infty\}, t_0, t_0)$$

を考える. ここで $\pi_1^{\ell}$ は $\pi_1^{\mathrm{\acute{e}t}}$ の最大副 $\ell$ 商を表わす. $\iota^{\ell}$ の像に付随する $\mathbb{Q}_\ell$ 上の次数付き Lie 代数 $L(\ell)$ を以下のようにして構成する. $\pi_1^{\ell} = \pi_1^{\ell}(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \setminus \{0,1,\infty\}, t_0, t_0)$ とおき, $\pi_1^{\ell}$ の降中心列を $L^{\bullet}\pi_1^{\ell}$ で表わす. 定義により $L^1\pi_1^{\ell} = \pi_1^{\ell}$ であり, $d \geq 1$ のとき $L^{d+1}\pi_1^{\ell}$ は $\{[h,g] \mid h \in L^d\pi_1^{\ell}, g \in \pi_1^{\ell}\}$ の生成する $\pi_1^{\ell}$ の閉部分群である. 整数 $d \geq 0$ に対し, $\iota^{\ell}$ の誘導する準同型 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\ell}/L_{d+1}\pi_1^{\ell})$ の核を $I(\ell)_{-d}$ で表わす. $d \leq -1$ に対し, 商 $I(\ell)_d/I(\ell)_{d-1}$ は副 $\ell$ アーベル群となり, したがって $\mathbb{Z}_\ell$ 加群の構造を持つ. $L(\ell)_d = (I(\ell)_d/I(\ell)_{d-1}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ とおくと, 交換子をとる演算 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が $L(\ell) = \bigoplus_{d \leq -1} L(\ell)_d$ 上に $\mathbb{Q}_\ell$ 上の Lie 代数の構造を誘導する. 各 $m \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$ に対し, 伊原は [I1] において, $L(\ell)$ の次数 $m$ の部分 $L(\ell)_m$ に属する元 $\sigma_m$ を構成し, $L(\ell)$ が $\sigma_m$ たちの生成する $\mathbb{Q}_\ell$ 上の自由 Lie 代数であると予想した. この予想を Deligne・伊原の予想とよぶ (いくつかの類似する予想とそれらの関係については [De1], [I2], [F2] を参照のこと).

伊原は [I2] において, $L(\ell)$ が $\mathbb{Q}_\ell$ 上の自由 Lie 代数であれば Deligne・伊原の予想が正しいことを示し, Hain・松本 [HaMa] は, 各 $m \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$ に対しある $s_m \in L(\ell)_m$ が存在して, $L(\ell)$ が $s_m$ たちで生成されることを示した. これらの結果と $\iota^{\mathrm{unip}}$ が閉埋め込みであることとを合わせると, 次のようにして Deligne・伊原の予想を示すことができる. $U(\omega_\ell)$ を $\pi_1(\omega_\ell)$, の副巾単根基とする. Betti 実現とエタール実現との比較定理, および副 $\ell$ 完備化と副巾単完備化との関係 ([HaMa, Theorem A6] 参照) より, 準同型 $\iota^{\mathrm{unip}}$ の $\ell$ 進エタール実現版

$$\iota_\ell^{\mathrm{unip}} : \pi_1(\omega_\ell) \to \mathrm{Out}\pi_1^{\ell,\mathrm{unip}}$$

も閉埋め込みであることがわかる．ここで $\pi_1^{\ell,\mathrm{unip}}$ は $\pi_1^\ell = \pi_1^\ell(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \setminus \{0,1,\infty\}, t_0, t_0)$ の副巾単完備化である．一方, 準同型 $\iota^\ell$ のかわりに

$$\iota^{\ell,\mathrm{unip}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Out}\pi_1^{\ell,\mathrm{unip}}$$

から出発して, $L(\ell)$ と同様の $\mathbb{Q}_\ell$ 上の Lie 代数を作ることができる．$L(\ell)$ からこの Lie 代数への自然な準同型が作れるが [HaMa, Proposition 8.2] よりこれは同型となる．これより $\mathbb{Q}_\ell$ 上の Lie 代数の準同型 $\mathrm{Lie}\,U(\omega_\ell) \to L(\ell)$ が得られる．$\iota_\ell^{\mathrm{unip}}$ が閉埋め込みであることを用いるとこの準同型が単射であることがわかる．10.4 項の最後に述べた圏 $\mathrm{MT}(\mathbb{Z})$ の抽象的な記述より $\mathrm{Lie}\,U(\omega_\ell)$ は各 $m \in \mathrm{Odd}_{\leq -3}$ に対し, 次数 $m$ に一つずつ生成元をもつ $\mathbb{Q}_\ell$ 上の自由 Lie 代数となるため, $L(\ell)$ は $s_m$ たちで生成される $\mathbb{Q}_\ell$ 上の自由 Lie 代数となる．したがって上述の [I2] の結果より $L(\ell)$ は $s_m$ たちで生成される $\mathbb{Q}_\ell$ 上の自由 Lie 代数となる．以上により, 系 12.4 の帰結として Deligne・伊原の予想が肯定的に解決したことになる．

## § 16. 体 $\Omega$ の具体的生成元への応用

前節と同じく $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ および奇素数 $\ell$ を固定する．$\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ の有限部分集合の族 $\mathbb{S}$ であって, 次の条件をみたす最小のものを考える:

- $\{0,1,\infty\} \in \mathbb{S}$ である．
- $S \in \mathbb{S}$ ならば, $S^{1/\ell} = \{s \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}}) \mid s^\ell \in S\} \in \mathbb{S}$ である．
- $S \in \mathbb{S}$ とし, $a,b,c \in S$ を互いに異なる点とする．$T^{(a,b,c)}$ を $\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$ の自己同型であって, 点 $a,b,c$ をそれぞれ点 0, 1, $\infty$ に送る唯一つのものとすると, $T^{(a,b,c)}(S) \in \mathbb{S}$ である．

$\overline{\mathbb{Q}}$ の元であって, とある $S \in \mathbb{S}$ に属する元のことを高次円単数とよぶ．高次円単数は $\ell$ の外不分岐な $\mathbb{Q}(\mu_\ell)$ の最大副 $\ell$ 拡大体 $\Omega \subset \overline{\mathbb{Q}}$ に含まれる．Anderson・伊原 [AI] の結果と Sharifi [Sh] の結果とを併せると, $\ell$ が正則な奇素数のとき, Deligne・伊原の予想を仮定すると, 体 $\Omega$ が $\mathbb{Q}$ に高次円単数を添加した体に一致することがわかる．従って, Brown の議論によって, $\ell$ が正則な奇素数のとき, 体 $\Omega$ が $\mathbb{Q}$ 上高次円単数で生成されることがわかったことになる．

## § 17. $\mathbb{Q}$ 係数 Drinfeld 結合子の明示的構成への応用

$I_+^{\{2,3\}} = I^{\{2,3\}} \setminus \{\emptyset\}$ は, 2 および 3 のみからなる数字の空でない有限列全体の集合である．集合 $I_+^{\{2,3\}}$ に辞書式順序を入れて全順序集合とみなす．$\mathbb{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in I_+^{\{2,3\}}$ が Lyndon 文字列であるとは, $1 \leq i \leq r$ をみたす任意の整数 $i$ に対し, $(k_i, \ldots, k_r) \geq \mathbb{k}$ が成立することをいう．例えば

$$(2), (3), (2,2,3), (2,2,3,2,3)$$

は Lyndon 文字列であるが,

$$(2,2),(3,2),(3,3),(2,3,2,3)$$

は Lyndon 文字列でない. $I_+^L \subset I_+^{\{2,3\}}$ を Lyndon 文字列の全体とする. 集合 $I_+^L$ を変数とする $\mathbb{Q}$ 上の多項式環を $\mathbb{Q}\langle I_+^L\rangle$ で表わす. $\Bbbk$ を $\zeta^M(\Bbbk)$ に送る写像 $\zeta^M : I^c \to \mathcal{H}$ を $I_+^L$ に制限することにより $\mathbb{Q}$ 代数の準同型 $\varphi : \mathbb{Q}\langle I_+^L\rangle \to \mathcal{H}$ が得られる. [Br1] で言及されているように, $D_k$ を用いた議論により, この準同型 $\varphi$ が同型になることが示せる.

多重ゼータ値のある種の母関数は Drinfeld 結合子とよばれるものを与える. 通常の多重ゼータ値ではなく $\zeta^M(\Bbbk)$ についてもそれは同様で, $(\zeta^M(\Bbbk))_{\Bbbk\in I^c}$ のある種の母関数は $\mathcal{H}$ に値をもつ Drinfeld 結合子を与える. $\varphi$ が同型であるとすると, 勝手な写像 $I_+^L \to \mathbb{Q}$ が $\mathcal{H}$ から $\mathbb{Q}$ への準同型を与える. 従って, 写像 $I_+^L \to \mathbb{Q}$ として特別なもの, 例えば $(2) \in I_+^L$ を 1 に送り, その他の $I_+^L$ の元を 0 に送るものを選べば, 対応する準同型 $\mathcal{H} \to \mathbb{Q}$ で $\mathcal{H}$ に値をもつ Drinfeld 結合子を送ることにより, $\mathbb{Q}$ 係数の Drinfeld 結合子を明示的に作ることが原理的に可能である.

# Part V
# できていないこと

## § 18. 残された問題

### § 18.1. 多重ゼータ値のいろいろな関係式系

**18.1.1. 関係式系の定義** 収束インデックスの集合 $I^c$ を基底とする $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathbb{Q}[I^c]$ を考える. インデックスの重さにより, ベクトル空間 $\mathbb{Q}[I^c]$ に次数が入り, 各次数の部分が $\mathbb{Q}$ 上有限次元となる. $\Bbbk \in I^c$ を実数 $\zeta(\Bbbk) \in \mathbb{R}$ に送ることにより, $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の準同型 $\zeta(-) : \mathbb{Q}[I^c] \to \mathbb{R}$ を得る. $I^c$ を変数の集合とする $\mathbb{Q}$ 上の可換多項式環を $\mathrm{Pol}_{\mathbb{Q}}[I^c]$ で表わす. $\mathbb{R}$ は可換 $\mathbb{Q}$ 代数であるから, $\zeta(-)$ は $\mathbb{Q}$ 代数の準同型 $\zeta^{\mathrm{Pol}}(-) : \mathrm{Pol}_{\mathbb{Q}}[I^c] \to \mathbb{R}$ を誘導する. 定義から $\zeta(-)$ および $\zeta^{\mathrm{Pol}}(-)$ の像はともに $Z$ に一致する. $\zeta(-)$ (resp. $\zeta^{\mathrm{Pol}}(-)$) の核に属する元のことを多重ゼータ値の線形関係式 (resp. 多重ゼータ値の関係式) といい, $\zeta(-)$ (resp. $\zeta^{\mathrm{Pol}}(-)$) の核の部分集合のことを多重ゼータ値の線形関係式系 (resp. 多重ゼータ値の関係式系) という. 同次の元からなる多重ゼータ値の線形関係式系 (resp. 関係式系) を多重ゼータ値の同次線形関係式系 (resp. 同次関係式系) とよぶ.

**18.1.2. モチヴィック関係式系** 準同型 $\zeta(-)$ は, $\Bbbk \in I^c$ を $\zeta^M(\Bbbk)$ に送る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の準同型 $\zeta^M(-) : \mathbb{Q}[I^c] \to \mathcal{H}$ と $c : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ との合成に等しいので, $\zeta^M(-)$ の核に属する元は多重ゼータ値の線形関係式となる. $\zeta^M(-)$ の核に属する $\mathbb{Q}[I^c]$ の同次元全体のなす集合を多重ゼータ値のモチヴィック関係式系とよぶ. $\zeta^M(-)$ は次数を保つ準同型であ

るから, $\zeta^M(-)$ の核は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間として多重ゼータ値のモチヴィック関係式系で生成される.

**18.1.3. 基本的な問題** $c: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ は単射であると予想されているため, モチヴィック関係式系は $\zeta(-)$ の核を生成すると予想される. これが正しいとすると, モチヴィック関係式系は多重ゼータ値の基本関係式系を与えることになる. 問題はこのモチヴィック関係式系はかなり複雑な形をしているということである. 例えば, モチヴィック関係式系のすべての生成元を具体的に書き下すことはなされていない. 多重ゼータ値の間には双対性, 和公式 ([Gran]), Hoffman の関係式 ([Hof1]), 大野の関係式 ([O]), 導分関係式 ([Hof2], [IKZ]), Le・村上の関係式 ([LM]), 有限 2 重シャッフル関係式 ([AK]), 正規化された 2 重シャッフル関係式 ([IKZ]), 結合子関係式 (18.1.5 を参照), 柏原・Vergne 関係式系 ([AT]) など具体的な関係式系がいろいろと知られている. モチヴィック関係式系と, こういったより具体的な形で与えられる別の関係式系とを比較する, という問題が重要かつ基本的な問題となっている.

**18.1.4. 2 重シャッフル関係式系** $\Bbbk \in I^c$ をワード $w(\Bbbk)$ に送る写像は全単射 $I^c \to {}_0W_1$ を与える. これを $\mathbb{Z}$ 線形にのばして得られるアーベル群の同型 $\mathbb{Z}[I^c] \to \mathbb{Z}[{}_0W_1]$ を $\psi$ で表わすことにすると, 6.2 項で述べたことにより, $\mathbb{Z}[I^c]$ の部分集合

$$\{\Bbbk * \Bbbk' - \psi^{-1}(\psi(\Bbbk) \sqcup\!\sqcup \psi(\Bbbk')) \mid \Bbbk, \Bbbk' \in I^c\}$$

は多重ゼータ値の同次線形関係式系となる. これを多重ゼータ値の 2 重シャッフル関係式系とよぶ. この関係式系を $\Bbbk$ が必ずしも収束しないインデックスの場合に拡張することによって, 正規化された 2 重シャッフル関係式系とよばれる多重ゼータ値の同次線形関係式系が得られる ([AK] 参照).

**18.1.5. 結合子関係式系** $c: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を 12.6.4 で導入した $\mathbb{Q}$ 代数の準同型とする. $\mathbb{R}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ を $A, B$ を変数とする $\mathbb{R}$ 上の非可換形式巾級数環とする. ワード $w \in W$ に対し, $w$ の綴りに現れる文字 0 を $A$, 文字 1 を $-B$ に置き換えることによって得られる $\mathbb{R}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ の単項式を $m(w)$ とおくことにする. $\mathbb{R}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ の元 $\Phi_{KZ} = \sum_{w \in W} c(I^M(1; w; 0))m(w)$ を KZ 結合子, あるいは (定冠詞付きの) Drinfeld 結合子とよぶ. Drinfeld [Dr] は, 各可換 $\mathbb{Q}$ 代数 $R$ に対し $R^\times \times R\langle\langle A, B\rangle\rangle$ のとある部分集合 $M(R)$ を導入し, $(2\pi\sqrt{-1}, \Phi_{KZ})$ が $M(\mathbb{C})$ に属する, という主張と実質的に同等の主張 (ただし, 当時は多重ゼータ値の概念が導入されておらず, 多重ゼータ値を用いた述べ方はしていない) を示した. 古庄 [F3] の結果を用いると $M(R)$ は次の 4 条件をみたす組 $(\lambda, \Phi) \in R^\times \times R\langle\langle A, B\rangle\rangle$ 全体のなす集合に等しい:

(1) 次数 2 以上の部分を法として $\Phi \equiv 1$ である.

(2) $\Phi$ における $AB$ の係数は $\lambda^2/24$ に等しい.

(3) 4 変数非可換多項式環 $\mathbb{R}\langle A, B, A', B'\rangle$ を基本関係式 $[A, A'] = [A, B'] = [B, A'] = [B, B'] = 0$ で割って得られる剰余環を次数で完備化した環において $\Phi(A+A', B+B') = \Phi(A, B)\Phi(A', B')$ が成り立つ.

(4) 5 変数非可換多項式環 $\mathbb{R}\langle X_i; i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\rangle$ を基本関係式 $[X_i, X_{i+2}] = 0$ $(i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ および $\sum_{i\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}[X_i, X_{i+1}] = 0$ で割って得られる剰余環を次数で完備化した環において $\Phi(X_0, X_1)\Phi(X_1, X_2)\Phi(X_2, X_3)\Phi(X_3, X_4)\Phi(X_4, X_0) = 1$ が成り立つ.

$(2\pi\sqrt{-1}, \Phi_{KZ}) \in M(\mathbb{C})$ という主張 (から上の条件 (2) を除外したもの) を $M(\mathbb{C})$ の定義に戻って言い換えると多重ゼータ値の関係式系が得られる. この関係式系を結合子関係式系とよぶ. 結合子関係式系は, 群的関係式, 双対関係式, 6 角形関係式, 5 角形関係式という 4 種類の関係式系からなる. これらは非線形な同次関係式系である. 群的関係式はシャッフル積公式と同値である. 4 種類の関係式系のうち最も複雑かつ最も重要なものは 5 角形関係式である. 古庄 [F3] は群的関係式と 5 角形関係式から他の 2 種類の結合子関係式系が導かれることを示した. 奥田・上野 [OU] による大野の関係式の別証明により, 結合子関係式系のうち 5 角形関係式を除く他の 3 種類から大野の関係式が導かれることが分かる. 特に和公式や Hoffman の関係式もその 3 種類の関係式系から導かれる.

## § 18.2. 示されていること

$R, R' \subset \mathrm{Ker}\zeta(-)$ を多重ゼータ値の 2 つの線形関係式系とする. 関係式系 $R$ が関係式系 $R'$ を導くとは, $R$ の生成する $\mathbb{Q}[I^c]$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間が $R'$ を含むことを言う. 関係式系 $R$ と関係式系 $R'$ とが同等であるとは, $R$ が $R'$ を導き, かつ $R'$ が $R$ を導くこと, 言いかえれば $R$ の生成する $\mathbb{Q}[I^c]$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間が $R'$ の生成する部分 $\mathbb{Q}$ 空間と一致することを言う.

Deligne-Goncharov [DG] はモチヴィック関係式系が結合子関係式系を導くことを示した. 古庄 [F4] は, 結合子関係式系が正規化された 2 重シャッフル関係式系を導くことを示した. 本稿で紹介した Brown による定理 7.1 により, $\mathbb{Q}[I^c]$ をモチヴィック関係式系で割って得られる次数付き $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の各次数 $k$ 部分の次元が $d_k$ であることが分かった.

## § 18.3. 残された問題

モチヴィック関係式系, 結合子関係式系, および正規化された 2 重シャッフル関係式系はすべて同等な関係式系であると期待されている. 従ってこの期待は次の問題に集約される:

**問題 18.1.** $\mathbb{Q}[I^c]$ を正規化された 2 重シャッフル関係式系で割って得られる次数付き $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の各次数 $k$ 部分の次元が $d_k$ となるか?

注. 他に柏原・Vergne 関係式系という関係式系が提案されており, 問題 18.1 における「正規化された 2 重シャッフル関係式」を「柏原・Vergne 関係式系」に置き換えるとさらに強い問になる ([Sch] を参照) が, これについては本稿では説明しない.

モチヴィック関係式系や結合子関係式系は, 素朴かつ自然な着眼に基づいて定まる関係式であり, それゆえ対称性の極めて高いものとなっている. しかし具体的に書こうとすると複雑になり取扱いが難しい. 一方, 正規化された 2 重シャッフル関係式はより対称性は低いが具体的に記述する際には便利である.[15]

## §19. Goncharov, 井原・金子・Zagier によるアプローチ

問題 18.1 に対する井原・金子・Zagier の取り組み [IKZ] について述べる. 以下に述べる枠組みは [IKZ] が導入したものであるが, この枠組みの主要部分は [IKZ] よりも前に Goncharov [Go2] によって導入されていたことに注意しておく.[16]

### §19.1. 空間 $\mathrm{Sh}_n(V)$

$n \geq 2$ を整数とする. $\mathfrak{S}_n$ を $n$ 次対称群とする. $j = 2, \ldots, n$ に対し $c_j \in \mathfrak{S}_n$ を $j$ 次巡回置換 $c_j = (12 \cdots j)$ とする. 群環 $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ の元 $z_n$ を

$$z_n = \frac{1}{n}(1 - c_2) \cdots (1 - c_n)$$

で定める. $z_n$ は $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ のべき等元となる. 右 $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ 加群 $V$ に対し, $\mathrm{Sh}_n(V) = V z_n$ とおく. $\zeta_n \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 $n$ 乗根とすると, $\mathrm{Sh}_n(V)$ は $\{v \in V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \mid v c_n = \zeta_n v\}$ と次元が等しいことが知られている.

### §19.2. 非可換描像

以下では, 主に $n$ 変数多項式の空間 $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ を, 変数の置換 $(f \cdot \sigma)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$ によって右 $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$ 加群とみなしたものに対する $\mathrm{Sh}_n(\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n])$ を考察する. この空間 $\mathrm{Sh}_n(\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n])$ は, 次の段落で述べるように, 非可換な描像に移行するとより自然な見方ができる.

直和 $\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ を, 可算無限個の変数 $y_0, y_1, y_2, \ldots$ についての $\mathbb{Q}$ 係数非可換多項式のなす空間 $\mathbb{Q}\langle y_0, y_1, \ldots \rangle$ と同一視することができる. $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ の単項式 $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ を単項式 $y_{m_1} \cdots y_{m_n}$ とみなすのである. さらに $\mathbb{Q}\langle y_0, y_1, \ldots \rangle$ は, $y_0, y_1, \ldots$ の生成する $\mathbb{Q}$ 上の自由 Lie 代数 $L$ の包絡代数 $\mathrm{U}L$ と同一視できる. この同一視

$$\mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n] \cong \mathrm{U}L$$

のもと, 左辺の部分空間 $\bigoplus_{n \geq 1} \mathrm{Sh}_n(\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n])$ は $L$ を $\mathrm{U}L$ の部分空間と見たものに対応する.

---

[15] この意味で, 正規化された 2 重シャッフル関係式がモチヴィック関係式あるいは結合子関係式を導くかという予想は, 体 $k$ の代数的 $K$ 群 $K_2(k)$ の関係式が, 定義そのものよりも非対称であるがより簡単な形をした関係式だけで生成される, という松本の定理 ([Matsum], [Mi] を参照) を連想させる.

[16] 論文 [Go2] には時代を先取りした観察が多く含まれており, その多くについては, 現在でも十分な意味づけを与えられていないように思われる.

### § 19.3. 空間 $\mathrm{DSh}_n(V)$

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を置換行列に送ることより $\mathfrak{S}_n$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ の部分群とみなす. 右 $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})]$ 加群 V に対し,

$$\mathrm{DSh}_n(V) = \{(v, w) \in \mathrm{Sh}_n(V) \times \mathrm{Sh}_n(V) \mid w = vQ\}$$

とおく. ここで

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

上では一般の右 $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})]$ 加群 $V$ に対して $\mathrm{DSh}_n(V)$ を定義したが, 以下に述べる予想の主張には, 次の段落で定義を与える右 $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})]$ 加群 $V = V_{n,d}$ に対してだけ $\mathrm{DSh}_n(V)$ を定義すれば十分である. $V_{n,d}$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\mathrm{GL}_n$ の有限次元代数的表現から得られるものなので, 代数群 $\mathrm{GL}_n$ の表現論を用いた見方をすべきなのかもしれない.

### § 19.4. 井原・金子・Zagier の予想

$n$ 個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ についての $\mathbb{Q}$ 係数多項式のなす環 $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ を考える. $g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ に対し

$$(f \cdot g)(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} g_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} g_{nj}x_j\right)$$

とおくことによりこれは右 $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})]$ 加群となる. また $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ の作用を部分群 $\mathfrak{S}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ に制限したものは 19.2 項の冒頭で与えた作用と一致する. $d \geq 1$ に対し, 次数 $d$ の同次多項式全体のなす $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ の部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $V_{n,d}$ で表わす. $V_{n,d}$ は $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ の部分右 $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})]$ 加群となる. $\mathrm{DSh}_n(d) = \mathrm{DSh}_n(V_{n,d})$ とおく. 今まで $n \geq 2$ としてきたが, $n = 1$ のときは,

$$\mathrm{DSh}_1(d) = \begin{cases} \mathbb{Q} \cdot x_1^d, & d \text{ が偶数のとき}, \\ 0, & d \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

であると約束する. Broadhurst・Kreimer の予想 [BK] に基づいて, 井原・金子・Zagier [IKZ] は次を予想した.

**予想 19.1.** $\mathrm{DSh}_n(d)$ の次元の母関数として与えられる 2 変数 $s, t$ についてのべき級数 $\sum_{n,d \geq 1} \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{DSh}_n(d) \frac{ns^d t^n}{1 - s^d t^n}$ は

$$\frac{s^2 t \left(\frac{1}{1-s^2} - \frac{2s^8 t - 4s^6 t^3}{(1-s^4)(1-s^6)}\right)}{1 - s^2 t \left(\frac{1}{1-s^2} - \frac{s^8 t - s^6 t^3}{(1-s^4)(1-s^6)}\right)}$$

に等しい.

予想 19.1 を仮定すると問題 18.1 の答えは肯定的となる.

$n \leq 3$ のときには, Zagier・Goncharov によって予想 19.1 が正しいことが証明されている. $n=4$ のときにすでに予想 19.1 は知られていない. この場合は $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ のいろいろな有限部分群に関する相対不変式と関係がある ([Y]). また [Hor] によると, $n=4$ の場合のこの問題と $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})]$ 加群 $V_{4,d} \otimes \det$ の群コホモロジーとを関連付ける, Goncharov による未発表の仕事があるらしい.

## § 20. Brown による予想 19.1 の解釈

本節では井原・金子・Zagier による上記予想 19.1 の根拠を説明するための, Brown [Br4] の試みを紹介する. Brown [Br4] では, 実際にはモチヴィックな話をしているが, ここではモチヴィックな部分を除いて紹介する.

### § 20.1. Goncharov・Brown の 2 項演算

伊原 bracket のアイディアを用いて, Brown [Br4] は空間 $\bigoplus_{n,d\geq 1} \mathrm{DSh}_n(d)$ に $\mathbb{Q}$ 双線形な 2 項演算 $\{\ ,\ \}$ を導入した (ただし Brown [Br4] より以前に, Goncharov [Go2] も双対版ではあるが類似のものを導入しており, 両者は実質的に同等のものであるように思われる). 2 項演算 $\{\ ,\ \}$ の定義をつぎの段落で述べる.

$n_1, n_2, d_1, d_2 \geq 1$ を整数とする. $f_1 \in V_{n_1,d_1}, f_2 \in V_{n_2,d_2}$ に対し, まず $f_1 \underline{\circ} f_2 \in V_{n_1+n_2, d_1+d_2}$ を次で定める:

$$
\begin{aligned}
&f_1 \underline{\circ} f_2(x_1, \ldots, x_{n_1+n_2}) \\
= &-f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}) f_2(x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}) \\
&-\sum_{i=1}^{n_2} f_1(x_{i+1}-x_i, \ldots, x_{i+n_1}-x_i) f_2(x_1, \ldots, x_i, x_{i+n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}) \\
&-(-1)^{n_2} \sum_{i=0}^{n_2-1} f_1(x_{i+n_1+1}-x_{i+n_1}, \ldots, x_{i+n_1+1}-x_{i+1}) f_2(x_1, \ldots, x_i, x_{i+n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}).
\end{aligned}
$$

これを用いて $\{f_1, f_2\} = f_1 \underline{\circ} f_2 - f_2 \underline{\circ} f_1$ と定める. 天下り的に $\{f_1, f_2\}$ を定義したため説明の見通しが悪くなってしまったが, この定義は群 $GRT$ の Lie 代数における積構造を参考にして与えられており, その立場に立てば自然な形の定義とみなすことができる.[17]

Racinet [Rac] のアイディアを用いて, Brown [Br2] は次を示した:

[17] [IKZ] の枠組みでは多重ゼータ値を, 重さの低い多重ゼータ値を法として考察しているが, これは関係する群 $\pi_1(\omega_{\mathrm{dR}})$ や $GRT$ から Lie 代数に移行して考察することにほぼ対応する. また $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{DSh}_n(d)$ は, $n$ 変数の多項式のまま扱うよりも, 敢えて 1 変数増やし $x_1, \ldots, x_{n+1}$ についての多項式 $f(x_1 - x_{n+1}, \ldots, x_n - x_{n+1})$ として扱ったほうが記述がきれいになることが多く, 上に与えた $\{f_1, f_2\}$ の定義も 1 変数増やして記述したほうが少し分かりやすい形に書ける.

**定理 20.1.** $n_1, n_2, d_1, d_2 \geq 1$ を整数とする. $f_1 \in \mathrm{DSh}_{n_1}(d_1)$, $f_2 \in \mathrm{DSh}_{n_2}(d_2)$ ならば $\{f_1, f_2\} \in \mathrm{DSh}_{n_1+n_2}(d_1+d_2)$ である. さらに $\{\ ,\ \}$ により, $\mathrm{DSh} = \bigoplus_{n,d\geq 1} \mathrm{DSh}_n(d)$ は 2 重次数付き Lie 代数の構造を持つ.

## § 20.2. DSh の構造についての予想

$n \geq 1$ に対し, $\mathrm{DSh}_n = \bigoplus_{d\geq 1} \mathrm{DSh}_n(d)$ とおく.

どうやら, DSh は Lie 代数としてほとんど $\mathrm{DSh}_1$ で生成されているが, わずかながら生成されていない部分がある. 実際 $n \geq 3$ のとき, $\mathrm{DSh}_n$ は $\mathrm{DSh}_1$ で生成されており, $n = 4$ のとき生成されていない部分があるようである.

## § 20.3. 空間 $S_d$

$d \geq 2$ に対し, 部分空間 $S_d \subset V_{2,d-2}$ を以下で定義する:

$$S_d = \{f(x_1, x_2) \in V_{2,d-2} \mid f \text{ は以下の条件 (1), (2), (3), (4) を満たす }\}$$

(1) $f(x_2, x_1) = -f(x_1, x_2)$,

(2) $f(-x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$,

(3) $f(x_1, x_2) + f(x_2 - x_1, x_1) + f(x_2, x_2 - x_1) = 0$,

(4) $f(x_1, 0) = 0$.

定義から $d$ が奇数のとき $S_d = 0$ である. $d$ が偶数のとき, 標準的な同型

$$S_d \cong H^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}^*, IC(\mathrm{Symm}^{d-2}L))^+ \tag{20.1}$$

が存在する. ここで $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ は複素上半平面, $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ したがって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}^*$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ のコンパクト化, $L$ は オービフォールド $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$ 上階数 2 の局所系であって $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のスタンダードな 2 次元表現に伴うもの, $IC(\mathrm{Symm}^{d-2}L) = {}^p j_{!*}\mathrm{Symm}^{d-2}L$ (ここで $j : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}^*$ とおいた) は係数付きの交叉複体である. また $+$ は $\tau \mapsto -\overline{\tau}$ の引き起こす $\mathfrak{H}$ の対合で固定される部分を表わす. この同型は例えば, $\mathfrak{H}^*$ の標準的な胞体分割 (Voronoi 胞体分割) を用いることによって証明できる. Eichler・志村の理論により, (20.1) の右辺は, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $d$ の尖点形式のなす複素ベクトル空間の $\mathbb{Q}$ 構造を与えていることに注意しておく. 定義から任意の $d \geq 0$ に対し $S_d$ に属する元は $f_\Delta = x_1^2 x_2^2 (x_1^2 - x_2^2)^3$ で割り切れることがわかる一方, よく知られているように $d = 12$ のとき (20.1) の右辺は 1 次元である. したがって $S_{12}$ も 1 次元とならなければならない. このことから $f_\Delta$ が $S_{12}$ の基底となることがわかる.

### § 20.4. モジュラー元

各整数 $d > 4$ に対し, Brown [Br4] は $\mathbb{Q}$ 線形写像

$$S_d \to \mathrm{DSh}_4(d-4)$$

を構成した. この写像による $f \in S_d$ の像を $e_f$ とおくと, $e_f$ は次の記述を持つ: $f \in S_d$ であることから, $f(x_1, x_2)$ は $x_1^2 x_2^2 (x_1^2 - x_2^2)^3$ で割り切れ, 特に $x_1 x_2 (x_1 - x_2)$ で割り切れる. $f = x_1 x_2 (x_1 - x_2) f_0$ とおき, さらに $f_1 = (x_1 - x_2) f_0$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&e_f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
&= f_1(x_4 - x_3, x_2 - x_1) + f_1(-x_4, x_3 - x_2) + f_1(x_1, x_4 - x_3) \\
&\quad + f_1(x_2 - x_1, -x_4) + f_1(x_3 - x_2, x_1) \\
&\quad - x_1 f_0(x_2 - x_3, x_4 - x_3) + (x_1 - x_2) f_0(x_3 - x_4, -x_4) + (x_2 - x_3) f_0(x_4, x_1) \\
&\quad + (x_3 - x_4) f_0(-x_1, x_2 - x_1) + x_4 f_0(x_1 - x_2, x_3 - x_2)
\end{aligned}$$

である.

このようにして与えた $e_f$ が $\mathrm{DSh}_4(d-4)$ に属していることは自明ではなく, かなりハードな直接計算によりわかる.

### § 20.5. 予想

**予想 20.2.**

(1) DSh は Lie 代数として, $\mathrm{DSh}_1$ と $\{e_f \mid f \in S_d, d > 4\}$ で生成される.

(2) (1) の生成元の間の関係式は, $\mathrm{DSh}_1 \wedge \mathrm{DSh}_1 \to \mathrm{DSh}_2$ に現れる関係式で尽くされる.

この予想を認めると, 予想 19.1 が従うことが確かめられる.

### 謝辞

本稿を書く機会を与えてくださいました代数的整数論とその周辺のオーガナイザーの皆様に感謝いたします. 井原健太郎氏は原稿の内容について詳しいコメントをお寄せくださいました. 筆者はこの原稿を十分見直さずに投稿したため, 初期の原稿には数多くの誤りがありました. そのため編集委員の皆様に多大なご迷惑を掛けてしまいました. それにもかかわらず編集委員の皆様は, おそらく筆者以上に真剣に原稿を精読し, 数多くの誤りや改良すべき点をとても親切にご指摘くださいました. また, 本稿の査読者および寺杣友秀氏からも有益なコメントを賜りました.

2014 年 5 月に, 本稿の内容と関係の深い講演を國家理論科學研究中心 (國立清華大學, 台湾) で行いました. その準備のため本稿の内容を見直したところ, 重要な間違いが原稿中にいくつか見つかりました. この講演をすることがなければ, 間違いを含んだままの原稿が世に出てしまい, 取り返しのつかない事態になっていたと思います. 講演の機会を与えてくださいました張介玉氏に感謝いたします.

初期の原稿の出来は決してよいものではありませんでした. あまりの出来の悪さのため, 原稿ファイルを完全消去してしまいたい衝動に執筆中に何度も襲われました. それにもかかわらず本稿の掲載になんとかこぎつけることができたのは, 上記の皆様を代表する方々の温かいサポートに恵まれたからに他なりません. 関係者の皆様全員に深く感謝いたします.

本稿をほぼ書き終えた後現在までの間に, 筆者は本稿の内容と関連する新しい知識や知見を得ました. 原稿を読み返してみると, より適切な説明の仕方があるのではないかと思う箇所や, 全面的に書きなおしたいと思う箇所が随所にあります. また, 本稿の内容と関連するであろうと思われるにも関わらず, 筆者が不勉強のため全く説明をすることができず, 割愛せざるを得なかった項目もいくつかあります. このように本稿には至らぬ点がいろいろとあり, それらはひとえに筆者の不勉強によるものです. 読者の皆様からの御叱責をお願いしたく思います.

## References


[AI] Anderson, G., Ihara, Y.: *Pro-l branched coverings of $\mathbb{P}^1$ and higher circular units.* Ann. of Math. **128**, 55–72 (1988)

[A] André, Y.: Une introduction aux motifs. Panoramas et Synthèses **17**. Soc. Math. de France (2004)

[AK] 荒川恒男, 金子昌信 : 多重ゼータ値入門. MI レクチャーノート **23**. マス・フォア・インダストリ, 福岡 (2010)

[AT] Alekseev, A., Torossian, C.: *The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators.* Ann. of Math. **175**, 415–463 (2012)

[Bei] Beilinson, A. A.: *Higher regulators and values of L-functions.* Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. **24**, 181–238 (1984); English translation: J. Soviet Math. **30**, 2036–2070 (1985)

[BBD] Beilinson, A. A., Bernstein, J. N., Delinge, P.: *Faiseaux pervers.* Astésique **100**. Soc. Math. de France (1982)

[Bel] Belyĭ, G. V.: *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field (Russian).* Izv. Akad. Nauk SSSR **9**, 267–276 (1979); English translation: Math. USSR Izvestiya **14**, 247–256 (1980)

[Bl1] Bloch, S.: *Algebraic cycles and higher K-theory.* Adv. in Math. **61**, no. 3, 267–304 (1986)

[Bl2] Bloch, S.: *The moving lemma for higher Chow groups.* J. Alg. Geom. bf 3, no. 3, 537–568 (1994)

[Bon] Bondarko, M. V.: *Differential graded motives: weight complex, weight filtrations and spectral sequences for realizations; Voevodsky versus Hanamura.* J. Inst. Math. Jussieu **8**, Issue 01, 39–97 (2009)

[Bor1] Borel, A.: *Stable real cogomology of arithmetic groups.* Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **7**, 235–272 (1974)

[Bor2] Borel, A.: *Cohomologie de $SL_n$ et valeurs de fonctions zêta.* Ann. Sc. Norm. Sup. **4**, 613–636 (1977)

[BS] Borel, A., Serre, J.-P.: *Corners and arithmetic groups.* Comment. Math. Helv. **48**, 436–491 (1973)

[BW] Borel, A., Wallach, N.: *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Second edition.* Mathematical Surveys and Monographs **67**. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1999)

[BK] Broadhurst, D. J., Kreimer, D.: *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to* 9 *loops.* Phys. Lett. B **393**, 403–412 (1997)

[Br1] Brown, F.: *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$. Ann. of Math. **175**, no. 2, 949–976 (2012)

[Br2] Brown, F.: *Decomposition of motivic multiple zeta values.* In: Galois-Teichmüller theory and arithmetic grometry, Adv. Stud. Pure Math. **63**, 31–58. Math. Soc. of Japan, Tokyo (2012)

[Br3] Brown, F.: *Dedekind zeta motives for totally real number fields.* Invent. Math. **194**, 257–311 (2013)

[Br4] Brown, F.: *Depth graded motivic multiple zeta values.* Preprint (2012)

[Br5] Brown, F.: *Single-valued periods and multiple zeta values.* Preprint (2013)

[Cha] Chang, C.-Y.: *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic.* Preprint, arXiv:math/1207.2326 (2012)

[Che] Chen, K.-T.: *Integration of paths – a faithful representations of paths by noncommutative formal power series.* Trans. Amer. Math. Soc. **89**, 395–407 (1958)

[De1] Deligne, P.: *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points.* In: Galois groups over $\mathbb{Q}$, MSRI Publ. **16**, 79–313. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1989)

[De2] Deligne, P.: *Catégories tannakiennes.* In: Grothendieck Festschrift **2**. Progr. Math. **87**, 111-195. Birkhäuser, Boston, MA (1990)

[De3] Deligne, P.: *Le groupe fondamental unipotent motivique de* $\mathbb{G}_m - \mu_N$*, pour* $N = 2, 3, 4, 6$ *ou* 8. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **112**, No. 1, 101–141 (2010)

[DG] Deligne, P., Goncharov, A. B.: *Groupes fonamentaux motivique de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **38**, 1–56 (2010)

[DT] Deligne, P., Terasoma, T.: *Harmonic double shuffle relation for associators.* Preprint.

[Dr] Drinfeld, V. G.: *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Algebra i Analiz **2**, 149–181 (1990); English translation: Leningrad Math. J. **2**, no. 4, 829–860 (1991)

[vE] van Est, W. T.: *On the algebraic cohomology concepts in Lie groups II.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, **58**, 286–294 (1955)

[F1] Furusho, H.: *p-adic multiple zeta values I.* Invent. Math. **155**, 253–286 (2004)

[F2] Furusho, H.: *Multiple zeta values and Grothendieck-Teichmüller groups.* In Kohno, T., Morishita, M. (ed.): Primes and Knots, Contemporary Math. **416**, 49–82. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006)

[F3] Furusho, H.: Pentagon and hexgon equations. Ann. of Math. **171**, 545–556 (2010)

[F4] Furusho, H.: *Double shuffle relation for associators.* Ann. of Math. **174**, 341–360 (2011)

[Ge] Gersten, S. M.: *Higher $K$-theory of rings.* In Bass, H. (ed.): Algebraic $K$-Theory I, Proc. Conf. Battelle Inst. 1972. Lect. Notes Math. bf 341, 3–42. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

[Gi] Gil, J. B.: The regulators of Beilinson and Borel. CRM Monograph **15**. American Mathematical Society, Providence RI (2002)

[Go1] Goncharov, A. B.: *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives.* Preprint, arXiv:math/0103059v3 (2001)

[Go2] Goncharov, A. B.: *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes.* Math. Res. Lett. 1998, no. 4, 497–516 (1998)

[Go3] Goncharov, A. B.: *Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry.* Duke Math. J. **128**, No. 2, 209–284 (2005)

[Gran] Granville, A.: *A decomposition of Riemann' s zeta-function.* In Motohashi, Y. (ed.): Analytic number theory, London Math. Soc. Lecture Note **247**, 95–101. Cambridge University Press, Cambridge (1997)

[Gray] Grayson, D.: *Higher algebraic $K$-theory: II.* In Stein, M. R. (ed.): Algebraic $K$-Theory, Proc. Conf. Evanston 1976. Lect. Notes Math. **551**, 217-240. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976).

[Gro] Grothendieck, A.: *On the de Rham cohomology of algebraic varieties.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **29**, 95–103 (1966)

[HaMa] Hain, R., Matsumoto, M.: *Weighted completion of Galois groups and Galois actions on the fundamental group of* $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Compos. Math. **139** no. 2, 119–167 (2003)

[Ha1] Hanamura, M.: *Mixed motives and algebraic cycles I.* Math. Res. Lett. **2**, no. 6, 811–821 (1995)

[Ha2] Hanamura, M.: *Mixed motives and algebraic cycles II.* Invent. Math. **158**, no. 1, 105–179 (2004)

[HoMo] Hochschild, G., Mostow, G. D.: *Cohomology of Lie groups.* Illinois J. Math. **6**, 367–401 (1962)

[Hof1] Hoffman, M. E.: *Multiple harmonic series.* Pacific J. Math. **152**, No. 2, 275–290 (1992)

[Hof2] Hoffman, M. E.: *The algebra of multiple harmonic series.* J. of Algebra **194**, 477–495 (1997)

[Hor] Horozov, I.: *Cohomology of* $\mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$ *with non-trivial coefficients.* Preprint, arXiv:math.NT/0611847

[Hu1] Huber, A.: *Realization of Voevodsky's motives.* J. Alg. Geom. **9**, 755–799 (2000).

[Hu2] Huber, A.: *Corrigendum to "Realization of Voevodsky's motives".* J. Alg. Geom. **13**, 195–207 (2004)

[IKZ] Ihara, K., Kaneko, M., Zagier, D.: *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values.* Compos. Math. **142**, 307–338 (2006)

[I1] Ihara, Y.: *The Galois represenation arising from* $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. In: Galois group over $\mathbb{Q}$, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **16**, 299–313. Springer-Verlag, New York (1989)

[I2] Ihara, Y.: *Some arithmetic aspects of Galois actions of the pro-p fundamental group of* $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Proc. Sympos. Pure Math. **70**, 247–273 (2002)

[K] 河野俊丈: **反復積分の幾何学**. シュプリンガー現代数学シリーズ **14**. シュプリンガー・ジャパン, 東京 (2009)

[La] Lang, S.: *Introduction to transcendental numbers.* Addison-Wesley Series in Mathematics VI. Addison-Wesley Publishing Co. (1966)

[LM] Le, T. Q. T., Murakami, J.: *Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions.* Topology and its Applications **62**, 193–206 (1995)

[Le1] Levine, M.: *Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic $K$-theory.* In: Algebraic $K$-theory and algrbaic topology, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. **407**, 167–188. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1993)

[Le2] Levine, M.: *Bloch's higher Chow groups revisited.* In: K-theory, Strasbourg, 1992, Astérisque **226**, 235–320. Soc. Math. France, Paris (1994)

[Le3] Levine, M.: *Mixed Motives.* American Mathematical Society, Providence RI (1998)

[Li] Li, Z.-H.: *Another proof of Zagier's evaluation formula of the multiple zeta values* $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$. Preprint, arXiv:1204.2060v2 (2012)

[Matsum] Matsumoto, H.: *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* Ann. Sci. École Norm. Sup. $4^e$ ser. **2**, 1–62 (1969)

[Matsus] Matsushima, Y.: *On Betti numbers of compact, locally symmetric Riemanninan manifolds.* Osaka Math. J. **14**, 1–20 (1962)

[MaMu] Matsushima, Y., Murakami, S.: *On certain cohomology groups attached to hermitian symmetric spaces.* Osaka Math. J. **14**, 1–20 (1962)

[May] May, J. P.: *Simplicial objects in algebraic topology.* Chicago Lectures in Math. The Universoty of Chicago Press (1967)

[MVW] Mazza, C., Voevodsky, V., Weibel, C.: *Lecture notes on motivic cohomology.* Clay Mathematics Monographs **2**. American Mathematical Society, Providence, RI (2006)

[Mi] Milnor, J.: *Introduction to algebraic $K$-theory.* Ann. of Math. Stud. **72**. Princeton University Press, Princeton, NJ (1971)

[MiMo] Milnor, J., Moore, J.: *On the structure of Hopf algebras.* Ann. of Math. **81**, 211–264 (1965)

[MV] Morel, F., Voevodsky, V.: *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **90**, 45–143 (1999)

[O] Ohno, Y.: *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values.* J. Number Theory **74**, 39–43 (1999)

[OU] Okuda, J., Ueno, K.: *Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **40**, 537–564 (2004).

[Q1] Quillen, D.: *Higher algebraic $K$-theory: I.* In Bass, H. (ed.): Algebraic $K$-Theory I, Proc. Conf. Battelle Inst. 1972. Lect. Notes Math. bf 341, 85–147. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

[Q2] Quillen, D.: *On the cohomology and $K$-theory of general linear group over a finite field.* Ann. of Math. **96**, 552–586 (1972)

[Rac] Racinet, G: *Doubles mélanges des ploulogarithmes multiples aux racines de l'unité.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **95**, 185–231 (2002)

[Rap] Rapoport, M.: *Comparison of the regulators of Beilinson and of Borel.* In: Beilinson's conjectures on special values of $L$-functions, 169–192. Academic Press, San Diego, CA (1988)

[Ree] Ree, R.: *Lie elements and an algebra associated with shuffles.* Ann. of Math. **68**, 210–220 (1958)

[Sch] Schneps, L.: *Double shuffle and Kashiwara-Vergne Lie algebra.* J. Algebra **367**, 54–74 (2012)

[Sh] Sharifi, R. T.: *Relationships between conjectures on the structure of pro-$p$ Galois groups unramified outside $p$.* Proc. Sympos. Pure Math. **70**, 275–284 (2002)

[Su] Suslin, A. A.: *Higher Chow groups and etale cohomology.* In: Friedlander, Suslin, Voevodsky, V: Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud. **143**, 239-254. Princeton University Press, Princeton, NJ (2000)

[Te] Terasoma, T.: *Mixed Tate motives and multiple zeta values.* Invent. Math. **149**, 339–369 (2002)

[Th] Thakur, D. S.: *Function Field Arithmetic.* World Scientific Publ., Singapore (2004)

[V1] Voevodsky, V.: *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory.* Proceedings of the International Congress of

Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998). Doc. Math. Extra Vol. I, 579–604 (1998)

[V2] Voevodsky, V.: *Triangulated categories of motives over a field.* In: Friedlander, Suslin, Voevodsky, V: Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud. **143**, 188-238. Princeton University Press, Princeton, NJ (2000)

[Y] Yasuda, S.: $W(F_4)$*-symmetry and the linearized double shuffle spaces of depth four.* Preprint (2012)

[Z1] Zagier, D.: *Values of zeta functions and their applications.* In: First European Congress of Mathematics, Vol. II, 497–512. Birkhäuser, Boston, MA (1994)

[Z2] Zagier, D.: *Enumeration of the multiple zeta values* $\zeta(2,\dots,2,3,2\dots,2)$. Ann. of Math. **175**, no. 2, 977-1000 (2012)