

(続紙 1)

京都大学	博士 (理 学)	氏名	杉山 登志
論文題目	The Moduli Space of Polynomial Maps and Their Fixed-Point Multipliers		

(論文内容の要旨)

時間発展の数学的モデルを研究する力学系の理論は、個々の力学系の軌道や不変集合の構造を研究すると共に、力学系を変化させたときの挙動の変化 (構造安定性や分岐) について研究するものである。力学系はそれが簡単な式で定義されているものであっても、軌道の再帰的構造の影響により非常に複雑な構造を相空間およびパラメータ空間に生じさせ、そのために研究が今案になる場合が多い。その中でも複素力学系はパワフルな複素解析の手法を使うことが可能になり、非常に詳しい研究が可能になる例を与えている。複素力学系の研究においては、メビウス変換あるいはアファイン写像で共役な写像は同一視されるため、共役関係で割った商空間であるモデュライ空間を定義し、その上で写像を変化させたときの構造安定性やそうでないときの分岐現象を考察するのが基本的である。 $d(> 1)$ 次多項式 $f(z)$ のモデュライ空間は $d-1$ 次元の複素多様体 (厳密には軌道体) になる。一方、複素力学系の不動点における微分係数 (multiplier) は正則共役の不変量であり、不動点の近傍での挙動を決定づける基本的な量であり、例えば $d(> 1)$ 次多項式 $f(z)$ が d 個の相異なる不動点 z_1, \dots, z_d をもつとき、それらの multiplier $\lambda_j = f'(z_j)$ は正則指数公式

$$\sum_{j=1}^d \frac{1}{1-\lambda_j} = 0$$

をみताす。従って、 d 個の内到一个の関係式があることになり、 $d-1$ 個のパラメータをもつことになるので、multiplier の組 (d 次対称群 \mathfrak{S}_d の作用で割ったもの) でモデュライ空間を記述できるかどうかに興味ある問題となる。実際、2 次多項式のときは自明であるが、John Milnor は 3 次多項式 (および 2 次の有理関数) については正則指数公式をみताす multiplier の組とモデュライ空間の間に一対一の関係があることを示し、それを出発点としてモデュライ空間内で分岐現象の研究を行った。ここから始まって多くの研究者がモデュライ空間の multiplier 座標を用いて研究を行っている。3 より高い次数については、藤村らの研究により一対一の関係はないことはわかっていたが、その関係をよりはっきりさせたのが、主論文の結果である。主論文の結果を述べるためにいくつかの記号と定義を準備する。 $d > 1$ を整数とし、 MP_d を複素数係数 1 変数 d 次多項式のモデュライ空間とする。多項式 $[f(z)] \in MP_d$ に対し、その不動点 z_1, \dots, z_d の multiplier の組 $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ は $\Lambda_d = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{C} \mid \sum_{i=1}^d \prod_{j \neq i} (1 - \lambda_j) = 0\}$ に属するの

で, $\tilde{\Lambda}_d = \Lambda_d / \mathfrak{S}_d (\subset \mathbb{C} / \mathfrak{S}_d)$ と定義すると,

$$\Phi_d : MP_d \rightarrow \tilde{\Lambda}_d, \quad [f(z)] \mapsto [(\lambda_1, \dots, \lambda_d)]$$

が定義される. Milnor の結果は $d = 2$ のとき Φ_3 が同型であることを意味し, 藤村の結果は, $d \geq 4$ では Φ_d が全射でないことを示すと共に, ジェネリックなファイバー $\Phi_d^{-1}(\bar{\lambda})$ の個数は $(d-2)!$ であることを示し, $d = 4$ のときに, ファイバーの個数 $\#\Phi_4^{-1}(\bar{\lambda})$ を決定している. 杉山登志による主論文の結果は, d が 5 以上で $\bar{\lambda}$ が 1 を含まない (すなわち重複不動点をもたない) ときに, ファイバーの個数 $\#\Phi_d^{-1}(\bar{\lambda})$ を決定し, それを計算するアルゴリズムを与えている. すべての主張を書くことは出来ないがその最初の部分のみ抜粋すると,

主定理 I. $\bar{\lambda} \in \tilde{\Lambda}_d$ で 1 を含まないものに対し, $0 \leq \#\Phi_d^{-1}(\bar{\lambda}) \leq (d-2)!$ であり, その値は, 次の二つの集合のみから決定される.

$$\mathcal{I}(\lambda) := \left\{ I \subsetneq \{1, \dots, d\} \mid \sum_{i \in I} 1/(1 - \lambda_i) = 0 \right\},$$

$$\mathcal{K}(\lambda) := \left\{ K \subseteq \{1, 2, \dots, d\} \mid \begin{array}{l} K \neq \emptyset, \\ i, j \in K \text{ ならば } \lambda_i = \lambda_j \end{array} \right\}.$$

実際には, $\#\Phi_d^{-1}(\bar{\lambda})$ に関するこれより詳しい情報を主論文では与えている.

証明の手法は, 多項式を相異なる不動点 ζ_1, \dots, ζ_d を用いて

$$f(z) = z + \rho(z - \zeta_1) \dots (z - \zeta_d)$$

と表現するとき, 1 を含まない $\bar{\lambda} \in \Lambda_d$ に対し, $f'(\zeta_j) = \lambda_j$ ($j = 1, \dots, d$) となることと,

$$\sum_{j=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_j} \zeta_j^k = \begin{cases} 0 & (1 \leq k \leq d-2) \\ -\frac{1}{\rho} & (k = d-1) \end{cases}$$

となることが同値であるという補題による. さらに, 論文では, $\#\Phi_d^{-1}(\bar{\lambda})$ を上記 $\mathcal{I}(\lambda), \mathcal{K}(\lambda)$ から出発して計算するアルゴリズムを与えている. (定理 III)

(続紙 3)

(論文審査の結果の要旨)

杉山登志氏の論文博士号申請に対し、2018年5月22日に公開講演および調査委員会を行った。

力学系の理論では、力学系全体の空間を共役による同値関係で割ったモデュライ空間を考察することが重要であり、その空間の上で構造安定性や分岐を研究することになる。学位申請者 杉山氏の研究は、複素力学系の理論において重要である d 次多項式のモデュライ空間 MP_d を個々の多項式の不動点の不変量である multiplier の組の空間 $\tilde{\Lambda}_d$ との対応関係 $\Phi_d : MP_d \rightarrow \tilde{\Lambda}_d$ を通して調べたものである。彼は、各 $\bar{\lambda} \in \tilde{\Lambda}_d$ に対し、そのファイバーの個数を $\#\Phi_d^{-1}(\bar{\lambda})$ を重複不動点をもたない場合に決定した。これは、多項式の定義する複素力学系を研究する上で、その基礎となるモデュライ空間の記述を与えたという意味で重要である。

本論文は数学雑誌「Advances in Mathematics」において2017年に出版されている。

以上の理由により、調査委員会は、杉山登志氏の研究成果は理学（博士）の称号を授与するに十分であると認定した。

尚、今回は論文博士の申請であるが、杉山氏は本学大学院博士後期課程を平成19年11月26日に研究指導認定退学しているため、学識確認は免除した。

要旨公開可能日： _____ 年 _____ 月 _____