同期現象の数理

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所
千葉 逸人

概要

多数集まった同一の“モノ”たちが相互作用を及ぼし合うことによってその足並みを揃えてしまう現象を同期現象という．古くは壁に掛けた２つの振り子時計の同期が知られているが，今日ではホタルの集団発光，ニューロンの発火，心臓の拍動など，自然界の様々な場面で発見されている．同期現象を説明するための代表的な数理モデルとして蔵本モデルが知られている．講演では「相互作用の大きさがある閾値を超えると同期が起こる」という有名な蔵本予想，およびその証明法を紹介したい．

1　蔵本モデル

近年，グラフ上の力学系の研究が盛んになってきている．次のような常微分方程式系を考えよう．

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \cdots, x_n), \quad i = 1, \cdots, N.$$

ここで $x_i = x_i(t)$ は適当な相空間上を運動するものとする．この力学系に対して次のようなルールで有向グラフを対応させる．頂点の集合を $V = \{v_i\}_{i=1}^N$ とし，もし関数 f_i が x_j に依存するならば，すなわちある瞬間における x_i の速度ベクトルが $x_j(t)$ に依存するならば v_j から v_i への向きを持った辺 e_{ji} を与える．このグラフの構造が力学系の性質にどのように影響するかは興味深い問題である．もちろん，上式は一般の常微分方程式系であるから，もっと問題を絞らなければ言えることはほとんどない．そこで次のような系を考える．

$$\frac{d\theta_i}{dt} = f_i(\theta_1, \cdots, \theta_n), \quad i = 1, \cdots, N. \tag{1.1}$$

ここで従属変数 $\theta_i \in S^1$ は円周上を運動するものとする．したがって系全体の相空間は N-トーラスである．このようなタイプの力学系はしばしば**結合振動子系**と呼ばれ ([15],[16],[18])，次のようにして応用上自然に現れる．今，ある力学系 $dX/dt = h(X)$ が漸近安定な周期軌道を持つとしよう．その N 個の直積 $dX_i/dt = h(X_i)$, $i = 1, \cdots, N$ は N-トーラスを漸近安定な不変多様体に持つ．この直積力学系に微小摂動を与えて結合させる．

$$\frac{dX_i}{dt} = h(X_i) + \varepsilon g_i(X_1, \cdots, X_n), \quad i = 1, \cdots, N. \tag{1.2}$$

不変多様体論によれば，摂動パラメータ ε が十分小さければ，この力学系も漸近安定な不変 N-トーラス $M = M(\varepsilon)$ を持ち，系の長時間挙動は M 上のダイナミクスで十分よく近似できる．そこで系を M 上に制限し，トーラスの自然な座標をとって

やれば，式 (1.2) が式 (1.1) の形に帰着できたことになる (具体的に与えられた問題 (1.2) から関数 f_i を求める手続きを**位相縮約**という).

結合振動子系の中でも，次で定義される系

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \cdots, N \tag{1.3}$$

は**蔵本モデル**と呼ばれ，同期現象の代表的なモデルとして広く知られている [14],[15],[21]. ここで ω_i, K はそれぞれ自然振動数，結合強度と呼ばれる実定数である．結合強度が 0 のときは振動子たちは結合しておらず，自身の角速度 ω_i で円周上を運動する．したがって例えば $\omega_j > \omega_i$ ならば，θ_j は θ_i を何回でも追い越す．ところが K が正のときは相互作用 $\sin(\theta_j - \theta_i)$ を通して θ_i と θ_j の間に引力が働く (ここでは問題の簡単のため cos は除外している). よって K が十分大きければ，θ_i と θ_j の間に周回遅れが生じなくなると期待される．実際，ある閾値 K_c が存在し，$K > K_c$ なるとき次の意味で同期が起こることを数値計算で観察できる．すなわち，自然振動数の平均値 Ω の値に近い ω_i を持つ振動子たちが円周上にクラスターを形成し，周回遅れが生じることなくあたかも大きな振動子のように円周上を運動する (図 1). K が大きくなるにつれ，クラスターに引き込まれる振動子は増えていく.

Figure 1: (左) 同期状態. (右) 非同期状態.

実際に同期が起きているかどうか見るには次で定義される**秩序変数**を導入するのが便利である.

$$\eta := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j(t)}. \tag{1.4}$$

すなわち，η は単位円上に分布している振動子たちの重心の座標を与える．したがって，その絶対値 $r := |\eta|$ が正ならば同期状態であり，ほぼ 0 ならば同期が起きていないと解釈できる．蔵本はこの秩序変数を導入し，物理学者らしい形式的だが巧みな計算で次の予想に到達した.

蔵本予想 [15], [21].

$N \to \infty$ とし，自然振動数 $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ はある確率密度関数 $g(\omega)$ に従って独立に分布しているとする．もし $g(\omega)$ が偶関数かつ単峰型ならば，秩序変数 $r = |\eta|$ の分岐図は図 2 のように与えられる．すなわち，K が $K_c := 2/(\pi g(0))$ よりも小さいとき

は $r = 0$(非同期状態) が漸近安定である．$K = K_c$ において相転移 (分岐) が起き，$K > K_c$ のときは r が正の定数となるような漸近安定な同期解が存在する．分岐点の近傍では r の大きさは $r \sim O(\sqrt{K - K_c})$ で与えられる．

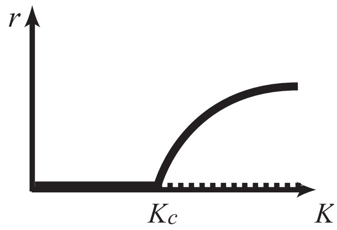

Figure 2: 秩序変数の分岐図.

ここで，適当な座標の平行移動 $\theta_i \mapsto \theta_i + \Omega t$ により，一般性を失うことなく $g(\omega)$ の平均値は 0 としてよい．このとき，$g(\omega)$ が単峰型であるとは $\omega > 0$ のとき狭義単調減少，$\omega < 0$ のとき狭義単調増加であることをいう．値 $K_c := 2/(\pi g(0))$ はしばしば蔵本転移点と呼ばれる．蔵本が行った計算については [21] に詳しい．

次節以降で説明するように，蔵本予想の難しさは，方程式を線形化して得られる線形作用素が連続スペクトルを持つことにある．最近，著者は Gelfand の 3 つ組を用いた線形作用素の一般化スペクトル理論を構築し [5]，連続スペクトルを持つような発展方程式のダイナミクスを調べる一般的な手法を提案した．これを応用することで，$g(\omega)$ が Gauss 分布であるという条件のもとで，蔵本予想を肯定的に解決した [3], [4]. 以下では $h(\theta)$ は時刻 $t = 0$ における $\{\theta_j(0)\}_{j=1}^{\infty}$ の分布 (正確には，後で述べる連続モデルの初期条件) とする．$i = \sqrt{-1}$ であるが，添え字に i が用いられることもある．

定理 1.1. $g(\omega)$ は Gauss 分布とする．$0 < K < K_c$ のとき，ある数 $\delta > 0$ が存在し，$h(\theta)$ が

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{ij\theta} h(\theta) d\theta \right| < \delta, \quad j = 1, 2, \cdots$$

を満たすならば秩序変数 $\eta(t)$ は $t \to \infty$ で指数的に 0 に減衰する．

定理 1.2. $g(\omega)$ は Gauss 分布とする．ある数 $\varepsilon_0, \delta > 0$ が存在し，$h(\theta)$ が

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{ij\theta} h(\theta) d\theta \right| < \delta, \quad j = 1, 2, \cdots$$

を満たすならば，$K_c < K < K_c + \varepsilon_0$ において秩序変数 $\eta(t)$ の絶対値は $t \to \infty$ で

$$|\eta(t)| = \sqrt{\frac{-16}{\pi K_c^4 g''(0)}} \sqrt{K - K_c} + O(K - K_c)$$

に収束する．特に秩序変数の分岐図は図 2 で与えられる．

この論説の目的は，一般化スペクトル理論について解説し，これらの結果の証明の概略を紹介することである．なお，定理は Gauss 分布を含むあるクラスの分布関

数に対して成り立つ．$g(\omega)$ に対する最も本質的な仮定は，実軸の近傍に解析接続を持つことである．例えば実軸上に極を持たない有理関数でも構わない．一方，[7] では Landau 減衰の理論に基づくまったく別の手法で，$g(\omega)$ が C^n 級の場合に蔵本予想が証明されている．この場合は定理 1 における秩序変数の減衰の速さが指数的ではなく $O(t^{-n})$ 程度になり，[3] で用いられた中心多様体縮約のような力学系的な道具は使えなくなると思われる．これから述べる手法は，結合関数が一般の周期関数の場合，例えば $\sin 2(\theta_j - \theta_i)$ のような高調波を含む場合にも拡張できる．その場合の秩序変数の分岐図については [4] を参照せよ．

2　連続極限

蔵本予想は振動子の数が無限に多い場合の予想であるから，まずは N 無限大のモデルを記述するところから始める．蔵本モデル (1.3) に秩序変数 η の定義式を代入すると

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + Kr\sin(\psi - \theta_i)$$

と書けることに注意する．ただし $\eta = re^{i\psi}$ とおいた．この式を念頭において，蔵本モデルの連続極限を

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_t}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial \theta}(v\rho_t) = 0, \\ v := \omega + Kr\sin(\psi - \theta), \\ \eta := re^{i\psi} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(\omega)d\omega \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\rho_t(\theta,\omega)d\theta. \end{cases} \tag{2.1}$$

で定義する．連続極限であるから，無限個の振動子が流体のように円周上を流れており，ρ_t がその分布を表す．正確には，$\rho_t(\theta,\omega)$ は確率測度，あるいは確率密度関数であり，時刻 t において自然振動数 ω を持つ振動子が位置 θ に居る確率を表す．1 行目はこの ρ_t を未知関数とする連続の式 (質量保存則) である．連続の式を定義する速度場 v は 2 行目で定義されるが，これは先ほど書きなおした有限次元モデルの右辺の添え字の i を除けば得られる．3 行目が秩序変数の定義式であり，有限次元モデルの秩序変数の定義において和を測度 $g(\omega)\rho_t(\theta,\omega)d\omega d\theta$ に関して積分に置き換えれば得られる．ただし $g(\omega)$ は与えられた関数であり，この論説では断りがない限り Gauss 分布であると仮定する．この方程式が，与えられた初期条件 $\rho_0(\theta,\omega) = h(\theta,\omega)$ に対して任意の $t > 0$ で弱解を持つことを示すのは難しくない (測度の発展方程式であるから弱解の存在だけ分かれば十分である)．

ρ_t は θ について周期的であるから，まずは Fourier 級数展開しておこう．

$$Z_j(t,\omega) := \int_0^{2\pi} e^{ij\theta}\rho_t(\theta,\omega)d\theta.$$

これを用いて連続極限の方程式を Z_j についての方程式に書き直すと

$$\frac{dZ_1}{dt} = i\omega Z_1 + \frac{K}{2}\eta(t) - \frac{K}{2}\overline{\eta(t)}Z_2,$$

および $j = 2, 3, \cdots$ に対しては

$$\frac{dZ_j}{dt} = ij\omega Z_j + \frac{jK}{2}(\eta(t)Z_{j-1} - \overline{\eta(t)}Z_{j+1}),$$

を得る．ただし Z_0 については $dZ_0/dt = 0$ であり，確率測度の規格化の条件から $Z_0 = 1$ とした．この方程式系は自明な解 $Z_j = 0,\ j = 1, 2, \cdots$ を持つ．このとき $\rho_t = 1/(2\pi)$，つまり円周上の一様分布であり，非同期状態に対応している．以下で非同期状態の線形安定性を調べよう．まず，η は $\eta = \int_{\mathbb{R}} Z_1 g(\omega)d\omega$ と書けるので $\overline{\eta(t)}Z_2$ などの項は非線形項であることに注意する．したがって自明解まわりで方程式を線形化すると

$$\frac{dZ_1}{dt} = T_1 Z_1 := \left(i\mathcal{M} + \frac{K}{2}\mathcal{P}\right) Z_1,$$
$$\frac{dZ_j}{dt} = ij\mathcal{M}Z_j, \quad j = 2, 3, \cdots,$$

を得る．ここで線形作用素 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{P}$ は $\mathcal{M} : f(\omega) \mapsto \omega f(\omega)$，および

$$\mathcal{P}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(\omega)g(\omega)d\omega$$

で定義される．線形化のレベルでは秩序変数 η は Z_1 にしか依存しない．そこで，次節では Z_1 の線形化方程式を定める作用素 $T_1 = i\mathcal{M} + K\mathcal{P}/2$ を重み付き L^2 空間 $L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega)$ 上の作用素だと思ってそのスペクトルを計算する．

3 線形作用素のスペクトル

線形作用素のスペクトルについて簡単におさらいしておこう．簡単に言えば，Banach 空間 X 上の線形作用素 T のスペクトル集合 $\sigma(T)$ とはレゾルベント作用素 $(\lambda - T)^{-1}$ の特異点集合であるが，さらに次の 3 つに分類することができる．

点スペクトル $\sigma_p(T)$．$\lambda - T$ が X 上単射でないような点 λ の全体．

剰余スペクトル $\sigma_r(T)$．$\lambda - T$ が X 上単射であるが，その値域が X の稠密な部分空間でないような点 λ の全体．

連続スペクトル $\sigma_c(T)$．$\lambda - T$ は単射かつ値域が稠密であるが，逆写像 $(\lambda - T)^{-1}$ が X 上の連続作用素にならないような点 λ の全体．

点スペクトルとは T の固有値，すなわち $Tv = \lambda v$ が X の中に $v \neq 0$ なる解 v を持つような点 λ の全体に他ならない．T が有限次元の行列のときには $\lambda - T$ が単射であることと全射であることは同値であるが，無限次元のときには同値にならない．そこで $\lambda - T$ が全射にならないような λ を特別扱いしたいが，実は大抵の場合には $\lambda - T$ は全射になり得ない．そこで条件を少し緩めて，$\lambda - T$ の値域が稠密にならないような λ を特別扱いする．それが剰余スペクトルである．もし λ が点スペクトルでも剰余スペクトルでもなければ，逆写像 $(\lambda - T)^{-1}$ が存在してその定義域は稠密

である．さらに，もし $(\lambda - T)^{-1}$ が連続作用素であれば，定義域を X 全体へと連続に拡張できる．そのように拡張できない λ の全体が連続スペクトルである．

Banach 空間 X 上で定義された線形方程式 $du/dt = Tu,\, x \in X$ を考えよう．よく知られているように，解の $t \to \infty$ における漸近挙動は線形作用素 T のスペクトルによっておおむね特徴づけられる．実際，T に対する適当な条件のもと，その解は Laplace 逆変換の公式を用いて

$$e^{Tt}u_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t}(\lambda - T)^{-1}u_0 d\lambda \tag{3.1}$$

と表される．ここで，a は T のスペクトルよりも右側にある適当な実数である．例えば X が有限次元のときは被積分関数 $(\lambda - T)^{-1}$ の特異点は T の固有値に他ならない．このときは図 3 のように Laplace 逆変換の公式の積分路を変形して留数定理で評価することにより，全ての固有値が左半面に含まれるならば任意の解は $t \to \infty$ で 0 に収束し，1 つでも右半面に固有値があれば一般に解は発散する，というよく知られた事実が証明できる．このことは X が無限次元でも，T が有界作用素や角域作用素で図 3 のような積分路の変形が可能ならば正しい[1]．以上を念頭において，蔵本モデルから得られた線形作用素 $T_1 = i\mathcal{M} + K\mathcal{P}/2$ のスペクトルを計算しよう．

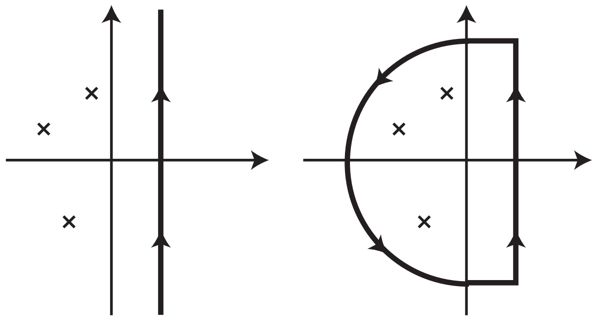

Figure 3: 積分路の変形．× 印は固有値を表す．

命題 3.1. T_1 は $L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega)$ 上稠密に定義された閉作用素であり，
(i) 連続スペクトルは $\sigma_c(T_1) = i \cdot \mathrm{supp}(g)$,
(ii) 剰余スペクトルは空,
(iii) 固有値は方程式

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - i\omega} g(\omega)d\omega = \frac{2}{K}, \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_c(T_1) \tag{3.2}$$

[1]角域作用素とは，雑に言えば左方向に開いた小さな sector の中にスペクトルが含まれるような作用素のこと．角域作用素でない場合には，スペクトルが全て左半面に含まれているにもかかわらず解が指数的に発散するような例が存在する．典型的にはスペクトルが虚軸方向に沿って無限遠に伸びている場合には，スペクトルが解のノルムの挙動を決定しない [12]．困難の本質はスペクトル写像定理が成り立たないことにある．作用素 T が生成する半群を $S(t)$ と表すとき，有界作用素や Hilbert 空間上の自己共役作用素の場合にはスペクトル写像定理 $e^{\sigma(T)t} = \sigma(S(t))$ が成り立つが，一般には $e^{\sigma(T)t} \subset \sigma(S(t))$ である．これは，$S(t)$ の中には $\sigma(T)$ からはうかがい知ることが出来ない情報が含まれうることを示している．非有界作用素 T の定義域 $\mathsf{D}(T)$ は空間 X 全体にはならず，その部分空間であるが，$S(t)$ の定義域は X 全体になる．したがって，$\mathsf{D}(T)$ に含まれない初期値に対する解の情報を T の情報だけから得るのは困難なのだ．逆に言えば，$\mathsf{D}(T)$ に含まれる初期値に制限すれば，解の挙動についてもう少しいいことが言える [12]．

の根で与えられる．

$\mathcal{P}$ がコンパクト作用素であることに注意すると (i),(ii) は作用素の摂動論からただちに従う．g が Gauss 分布ならば $\sigma_c(T_1) = i\mathbb{R}$ は虚軸全体である．固有方程式 (3.2) を導出しよう．$P_0(\omega) \equiv 1$ を定数関数とすると，$L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega)$ 上の内積を用いて $\mathcal{P}f = (f, P_0)P_0$ と書ける．よって

$$\begin{aligned} \lambda v = T_1 v = i\omega v + \frac{K}{2}(v, P_0)P_0 \\ \Longrightarrow \quad v = \frac{K}{2}(v, P_0)(\lambda - i\omega)^{-1}P_0. \end{aligned}$$

両辺と P_0 の内積をとって (v, P_0) で割れば式 (3.2) が得られる．上式から，固有値が存在するとすればその固有関数は

$$v(\omega) = \frac{1}{\lambda - i\omega} \tag{3.3}$$

であることも分かる．

命題 3.2. g が偶かつ単峰型の連続関数ならば
(i) $K > K_c := 2/(\pi g(0))$ のとき正の実軸にただ 1 つの固有値が存在し，
(ii) $K \to K_c + 0$ でそれは原点に収束し，
(iii) $K \leq K_c$ においては固有値は存在しない．

証明. $\lambda = x + iy$ とおいて式 (3.2) を実部と虚部に分けると

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + (\omega - y)^2} g(\omega) d\omega = \frac{2}{K}, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega - y}{x^2 + (\omega - y)^2} g(\omega) d\omega = 0. \end{array} \right.$$

第 2 式は

$$\int_0^\infty \frac{\omega}{x^2 + \omega^2} \left(g(y + \omega) - g(y - \omega) \right) d\omega = 0$$

と書ける．g が偶ならば $y = 0$ はこれを満たすが，単峰型を使うと $y \neq 0$ なる解は存在しないことが分かる．第 1 式より $K > 0$ なら $x > 0$ なので，固有値が存在すればそれは正の実軸上に限る．存在すれば一意であることも第 1 式から従う．$|\lambda|$ が十分大きいときは固有方程式は $1/\lambda + O(1/\lambda^2) = 2/K$ と評価できるので固有値 $\lambda \sim K/2$ が存在する．一方，式 (3.2) の左辺は右半面で有界なので，$K > 0$ が十分小さいときは固有値は存在しない．よって，ある $K_c > 0$ が存在して $K \to K_c + 0$ で $x \to +0$ となる．K_c の値はよく知られた公式

$$\lim_{x \to +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + \omega^2} g(\omega) d\omega = \pi g(0)$$

から従う．□

以上より，$K > K_c$ のときは非同期状態は不安定であることが分かった．ところが固有値は $K = K_c$ で虚軸上の連続スペクトルに吸収されて消えてしまう．$K \leq K_c$ のときは全てのスペクトルが虚軸上にあるので，一見して中立安定に思えるが，蔵本予想は漸近安定だと主張しているので矛盾して見える．また虚軸上のスペクトルが連続スペクトルなので，解の分岐を記述するための標準的な手法である中心多様体論が使えない．これらの問題は一般化スペクトルを導入することで解決される．

4 Gelfandの3つ組

虚軸上の連続スペクトルに起因する困難を解決するために，Gelfandの3つ組に基づく一般化スペクトル理論を構築したい．この節では，どのようにしてGelfandの3つ組が自然に現れるかを説明する．例として $L^2(\mathbb{R})$ 上の掛け算作用素 $\mathcal{M}: f(x) \mapsto xf(x)$ を考えよう．連続スペクトルは実軸全体である．実際，レゾルベントは

$$(\lambda - \mathcal{M})^{-1} f(x) = \frac{1}{\lambda - x} f(x)$$

で与えられ，$\lambda \in \mathbb{R}$ なるときこれは $L^2(\mathbb{R})$ に入らない．ところが，$L^2(\mathbb{R})$ よりも大きいある線形空間が存在して，そこでは $\lambda \in \mathbb{R}$ でもレゾルベントが確定することを示そう．そのために適当な関数 ϕ, ψ との内積

$$((\lambda - \mathcal{M})^{-1}\phi, \psi^*) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - x} \phi(x)\psi(x) dx$$

を考える．ここで $\psi^*(x) := \overline{\psi(\overline{x})}$ は右辺に複素共役が現れるのを避けるために導入した．上式は領域 $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$ で一価正則である．次に，λ を下から実軸に近づける．

$$\lim_{\mathrm{Im}(\lambda) \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - x} \phi(x)\psi(x) dx.$$

$1/(\lambda - x)$ という因子のため被積分関数は発散するが，ϕ と ψ が $\mathbb{R}$ 上連続ならば，広義積分として確定し，かつ $\lambda \in \mathbb{R}$ について連続になることが知られている．さらに λ を上半面に向かって動かそう．ϕ と ψ が実軸を含む領域 Ω で正則ならばそれは存在して

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - x} \phi(x)\psi(x) dx + 2\pi i \phi(\lambda)\psi(\lambda), \quad \lambda \in \Omega \cap \{\mathrm{Im}(\lambda) > 0\}$$

で与えられる．以上より，ϕ と ψ が正則関数ならば，λ の関数 $((\lambda - \mathcal{M})^{-1}\phi, \psi^*)$ は実軸上の連続スペクトルを越えて下半面から上半面への解析接続を持つことが分かった．それを

$$R(\lambda; \phi, \psi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - x} \phi(x)\psi(x) dx, & \mathrm{Im}(\lambda) < 0 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - x} \phi(x)\psi(x) dx + 2\pi i \phi(\lambda)\psi(\lambda), & \mathrm{Im}(\lambda) > 0 \end{cases}$$

と表す．今，X を $L^2(\mathbb{R})$ の稠密な部分空間で，あるクラスの正則関数からなるものとし，X' を X の双対空間，すなわち X 上の連続線形汎関数全体がなすベクトル空間とする．写像 $\phi \mapsto R(\lambda; \phi, \psi)$ は X 上の線形汎関数を定める．この線形汎関数を $R(\lambda; \bullet, \psi) \in X'$ と表す．X の位相はこの線形汎関数が連続であるように選ばれているものとする．すると，写像 $\psi \mapsto R(\lambda; \bullet, \psi)$ は X から X' への線形写像 $\mathcal{R}_\lambda$ を定め，しかも λ について適当な領域で正則である．定義の仕方から λ が下半面にあるときは $\mathcal{R}_\lambda = (\lambda - \mathcal{M})^{-1}$ である．そこで，$\mathcal{R}_\lambda$ を $\mathcal{M}$ の一般化レゾルベントと呼ぶ．今示したことをまとめよう：

$\mathcal{M}$ のレゾルベント $(\lambda - \mathcal{M})^{-1}$ は，$L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ への作用素だと思うと連続スペクトルのため実軸上で発散するが，X から X' への作用素だと思うと下半面か

物性研究・電子版 Vol. 7, No. 2, 072207〈2018年11月号〉

ら上半面への解析接続 $\mathcal{R}_\lambda$ を持ち，X'-値の正則関数である．X は $L^2(\mathbb{R})$ の稠密な部分空間であり，その埋め込みは連続であるとすると，$L^2(\mathbb{R})$ の双対空間は X' に連続的に埋め込める．ところが $L^2(\mathbb{R})$ は Hilbert 空間なので自分自身の双対と同型である．その同型対応を通して，

$$X \subset L^2(\mathbb{R}) \subset X' \tag{4.1}$$

なる空間の 3 つ組が得られる．これを Gelfand の 3 つ組，あるいは rigged Hilbert space という．

スペクトルの概念は次のようにして一般化される．一般に，$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，T をその上の線形作用素とする．T のスペクトルとは，レゾルベント $(\lambda - T)^{-1}$ の特異点集合のことであった．T は連続スペクトルを持つと仮定しよう．上と同様の手続きにより，うまい空間 $X \subset \mathcal{H}$ を見つけることができて，X から X' への作用素としては $(\lambda - T)^{-1}$ が連続スペクトルを越えて解析接続 $\mathcal{R}_\lambda$ を持つことが示せたとする．一般に，$\mathcal{R}_\lambda$ の Riemann 面は非自明になり得る．するとこの解析接続 $\mathcal{R}_\lambda$ が，最初の複素平面とは異なる Riemann 面のシート上に新たな特異点を持つかもしれない．これを一般化スペクトルと呼ぶことにする．定義上，一般化スペクトルは固有値とは異なるが，固有値と近い働きをすると考えられる．これが，通常のスペクトル理論では分からなかった情報を提供してくれるのである．

特に，蔵本モデルの解の挙動へは次のようにして応用される．線形作用素 T が生成する半群は Laplace 逆変換の公式 (3.1) で表されることを思い出そう．T が有限次元の行列や有界作用素の場合には，積分路を図 3 のように変形させることができ，解の漸近挙動を評価できる．ところが蔵本モデルから得られた作用素 T_1 のように虚軸全体がスペクトルの場合は，虚軸全体が被積分関数 $e^{\lambda t}(\lambda - T_1)^{-1}$ の特異点なのだから，これを越えて積分路を変形することができない．ここで，ある部分空間 $X \subset L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega)$ が存在して，レゾルベント $(\lambda - T_1)^{-1}$ を X から X' への作用素だと思えば虚軸上の連続スペクトルを越えて右半面から左半面への解析接続 $\mathcal{R}_\lambda$ を持つとしよう．そこで，Laplace 逆変換の公式を

$$e^{Tt} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-iy}^{a+iy} e^{\lambda t}\mathcal{R}_\lambda d\lambda \tag{4.2}$$

と解釈し直す．そうすれば，積分路を左半面 (正確には $\mathcal{R}_\lambda$ の 2 枚目の Riemann 面) へと伸ばすことができる．一般化レゾルベントの特異点のことを一般化スペクトルと呼ぶのであった．そこで一般化スペクトルまわりの留数を拾いこむことにより，解の漸近挙動を評価できるようになる．実際，$K > K_c$ のとき右半面に存在していた固有値は $K \to K_c + 0$ で虚軸上の連続スペクトルに吸収されて消えてしまったように見えるが，実は図 4 のように T_1 の一般化レゾルベントの 2 枚目の Riemann 面のほうに潜り込んでいる．虚軸 = branch cut をまたいだ後は一般化固有値であり，したがって通常の Hilbert 空間論では観察できないのである．そこで Laplace 逆変換の公式において積分路を 2 枚目の Riemann 面のほうに変形させて留数定理を用いると，線形化方程式 $dZ_1/dt = T_1 Z_1$ の解が X' の位相において指数的に減衰することが示せる．これは普通のスペクトル理論では分からなかったことである．また，一般化固有値が虚軸をまたぐときに X' において中心多様体が存在して解の分岐が起こることも示せる．

次の節から，以上のアイデアを一般的な設定で定式化する．省いた証明は全て Chiba [5] を参照せよ．この論説を通して $\mathsf{D}(\cdot)$ と $\mathsf{R}(\cdot)$ はそれぞれ作用素の定義域，値域を表すものとする．

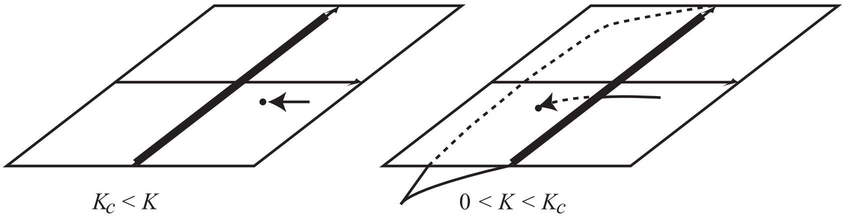

Figure 4: パラメータ K を減らしていったときの固有値の動き．$K > K_c$ のときは普通の意味での固有値として存在しているが，$0 < K < K_c$ のときは複素平面とは異なる Riemann 面のシート上にあり，一般化固有値になる．

5 一般化スペクトル理論

X を $\mathbb{C}$ 上の局所凸 Hausdorff 線形位相空間，X' をその双対空間とする．X' は X 上の連続な歪線形汎関数の全体がなすベクトル空間である．$\mu \in X'$ と $\phi \in X$ に対し，$\mu(\phi)$ を Dirac の記法を用いて $\langle \mu \,|\, \phi \rangle$ と表すことにする．任意の $a, b \in \mathbb{C}$, $\phi, \psi \in X$ と $\mu, \xi \in X'$ に対し，等式

$$\langle \mu \,|\, a\phi + b\psi \rangle = \overline{a}\langle \mu \,|\, \phi \rangle + \overline{b}\langle \mu \,|\, \psi \rangle,$$
$$\langle a\mu + b\xi \,|\, \phi \rangle = a\langle \mu \,|\, \phi \rangle + b\langle \xi \,|\, \phi \rangle,$$

が成り立つ．双対空間 X' にはいくつかの位相の入れ方があり，最もよく使われるのは弱位相 (弱*位相) と強位相 (強*位相) である．各 $\phi \in X$ に対して $\langle \mu_j \,|\, \phi \rangle \to \langle \mu \,|\, \phi \rangle$ が成り立つとき，点列 $\{\mu_j\} \subset X'$ は $\mu \in X'$ に弱収束すると言う．一方，X の任意の有界集合上で一様に $\langle \mu_j \,|\, \phi \rangle \to \langle \mu \,|\, \phi \rangle$ であるとき，$\{\mu_j\} \subset X'$ は $\mu \in X'$ に強収束すると言う．

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間，$(\cdot\,,\cdot)$ をその上の内積とする．X は $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間であって $\mathcal{H}$ への埋め込みは連続であるとする．このとき，双対をとれば $\mathcal{H}'$ が X' に連続に埋め込まれることが分かるが，Hilbert 空間は自分自身の双対と同型であるから，その同型対応を通して $\mathcal{H} \subset X'$ とできる．

定義 5.1. 局所凸 Hausdorff 線形位相空間 X が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間であり，X の位相が $\mathcal{H}$ の位相よりも強いとき，3 つ組

$$X \subset \mathcal{H} \subset X'$$

を **rigged Hilbert space**，あるいは **Gelfand の 3 つ組**という．

自然な埋め込み $i : \mathcal{H} \to X'$ は次のように定義される; $\psi \in \mathcal{H}$ に対して $i(\psi)$ を $\langle \psi|$ と書くことにし，それは

$$i(\psi)(\phi) = \langle \psi \,|\, \phi \rangle = (\psi, \phi), \quad \phi \in X$$

によって定義される．

埋め込み $i : \mathcal{H} \to X'$ が単射であるための必要十分条件は X が $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間であることであり，また i が (弱位相でも強位相でも) 連続であるための必要十分条件は X の位相が $\mathcal{H}$ の位相よりも強いことである (Tréves [22])．したがって定義 5.1 の状況では i は連続かつ単射である．Gelfand の 3 つ組は，Schwartz 超関数の理論を一般化する目的で Gelfand によって導入された [9]．実際，$X = C_0^\infty(\mathbb{R}^m), \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^m)$ のときには Gelfand の 3 つ組は普通の Schwartz 超関数の理論に帰着される．

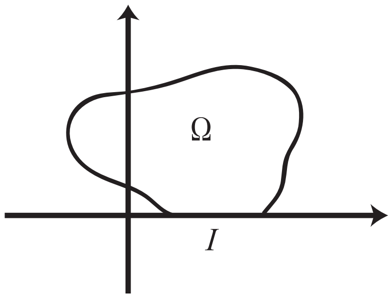

Figure 5: $E[\psi,\phi](\omega)$ が正則であるような領域 Ω.

5.1 一般化固有値

$\mathcal{H}$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間，H を $\mathcal{H}$ 上で稠密に定義された自己共役作用素とし，$\{E(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$ をそのスペクトル測度とする：すなわち，H は $H=\int_{\mathbb{R}}\omega dE(\omega)$ とスペクトル表現できる．K を $\mathcal{H}$ 上稠密に定義された作用素とする．ここでの目的は作用素 $T:=H+K$ の性質を調べることである．蔵本モデルの場合は (定数倍を除いて)$H=\mathcal{M}$, $K=\mathcal{P}$ であり，Schrödinger 作用素に応用したいときは H はラプラシアン，K はポテンシャルだと思えばよい [6]．$\Omega\subset\mathbb{C}$ を上半面に含まれる単連結領域とし，その閉包と実軸の共通部分を $\tilde{I}$ とする (簡単のため $\tilde{I}$ は連結な区間であるとする)．$\tilde{I}$ から端点を除いて得られる開区間を I とする (図 5)．与えられた作用素 $T=H+K$ に対し，以下の条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の局所凸線形位相空間 $X(\Omega)$ が存在すると仮定する．

(X1) $X(\Omega)$ は $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間である.
(X2) $X(\Omega)$ の位相は $\mathcal{H}$ の位相よりも強い.
(X3) $X(\Omega)$ は準完備樽型空間である.

仮定 (X1), (X2) より，Gelfand の 3 つ組

$$X(\Omega)\subset\mathcal{H}\subset X(\Omega)'$$

が定義できる．樽型空間の定義は難しいのでここでは述べないが (線形位相空間の用語については Tréves [22] を参照せよ)，任意の Fréchet 空間，Banach 空間，Hilbert 空間は樽型である．Fréchet 空間以外では，核型空間や Montel 空間も樽型である [2]．樽型空間においては Banach-Steinhaus の定理 [3] が成り立ち，特に樽型空間に値をと

[2]線形位相空間が樽型かつ「任意の有界閉集合はコンパクト」という性質をもつとき，これを Montel 空間という．Montel 空間においては弱収束する点列が自動的に強収束するなど，位相的に著しく良い性質を多く持っている．例として，C^∞ 関数の空間，コンパクト台を持つ C^∞ 関数の空間，急減少 C^∞ 関数の空間，開集合上の正則関数の空間，およびこれらの強双対空間などは Montel 空間である．与えられた空間が Montel であることの十分条件については [10],[13] などが参照できる．

[3]**Banach-Steinhaus の定理.**
X を樽型空間，X' をその双対空間とする．X' の部分集合 A について，以下の 4 条件は同値である．
(i) A は弱位相に関して有界.
(ii) A は強位相に関して有界.
(iii) A は写像の族として同程度連続.
(iv) A は弱位相に関して相対コンパクト.
ここで紹介した以外にもいくつかのバージョンがある．Tréves [22] を参照せよ．X が Banach 空間の場合には，特に一様有界性定理と呼ばれる．

る正則関数に対しては通常の函数論の道具はそのまま使える [5].

次に，H のスペクトル測度 $E(B)$ に対して次の正則性条件を課す.

(X4) 任意の $\phi \in X(\Omega)$ に対してスペクトル測度 $(E(B)\phi, \phi)$ は区間 I 上で絶対連続であり，その密度関数を $E[\phi, \phi](\omega)$ と表すとき，これは領域 $\Omega \cup I$ への解析接続を持つ.

(X5) 各 $\lambda \in I \cup \Omega$ に対し，双線形形式 $E[\cdot, \cdot](\lambda) : X(\Omega) \times X(\Omega) \to \mathbb{C}$ は各個連続である.

仮定 (X4) と偏極恒等式から，任意の $\phi, \psi \in X(\Omega)$ に対して $(E(B)\phi, \psi)$ が I 上絶対連続であることが分かるので，その密度関数を $E[\phi, \psi](\omega)$ と書く：

$$d(E(\omega)\phi, \psi) = E[\phi, \psi](\omega)d\omega, \quad \omega \in I.$$

このとき，関数 $E[\phi, \psi](\omega)$ は $\omega \in I \cup \Omega$ について正則である．絶対連続であることは I 上でしか仮定しないが，簡単のため上式の記法を任意の $\omega \in \mathbb{R}$ に対して用いる.

$iX(\Omega)$ を $X(\Omega)$ の $X(\Omega)'$ への埋め込みとする．線形作用素 $A(\lambda) : iX(\Omega) \to X(\Omega)'$ を

$$\langle A(\lambda)\psi \,|\, \phi \rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \omega} E[\psi, \phi](\omega)d\omega + 2\pi i E[\psi, \phi](\lambda) & (\lambda \in \Omega), \\ \displaystyle\lim_{y \to -0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x + iy - \omega} E[\psi, \phi](\omega)d\omega & (\lambda = x \in I), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \omega} E[\psi, \phi](\omega)d\omega & (\mathrm{Im}(\lambda) < 0), \end{cases} \tag{5.1}$$

によって定義すると，λ についての関数 $\langle A(\lambda)\psi \,|\, \phi \rangle$ は領域 $\{\mathrm{Im}(\lambda) < 0\} \cup \Omega \cup I$ で正則であることが示せる．特に $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$ なるときは $\langle A(\lambda)\psi \,|\, \phi \rangle = ((\lambda - H)^{-1}\psi, \phi)$ であるから，$A(\lambda)$ は普通の意味での H のレゾルベントと一致している．したがって $A(\lambda)$ は，$X(\Omega)'$ に値をとる作用素として，レゾルベント $(\lambda - H)^{-1}$ を下半面から Ω へ解析接続したものになっている．たとえ H が実軸上に連続スペクトルを持っていてもこれが可能であることに注目しよう．$X(\Omega)'$ に弱位相を入れたとき，$A(\lambda) \circ i : X(\Omega) \to X(\Omega)'$ は連続作用素になる [4].

最後の仮定を述べるための記号の準備をしよう．Q を $X(\Omega)$ 上稠密に定義された線形作用素とする．その双対作用素 $Q' : \mathsf{D}(Q') \to X(\Omega)'$ は次のように定義される；Q' の定義域 $\mathsf{D}(Q')$ は $X(\Omega)$ から $\mathbb{C}$ への写像 $\phi \mapsto \langle \mu \,|\, Q\phi \rangle$ が連続になるような $\mu \in X(\Omega)'$ の全体であり，その作用は $\langle Q'\mu \,|\, \phi \rangle = \langle \mu \,|\, Q\phi \rangle$ で定義される．次に，Q が $\mathcal{H}$ 上稠密に定義された作用素のとき，Hilbert 空間の意味での Q の共役作用素 Q^* は $(Q\phi, \psi) = (\phi, Q^*\psi)$ で定義される．もし Q^* が $X(\Omega)$ 上稠密に定義されているならば，その双対 $(Q^*)'$ が定義できるので，これを $Q^\times$ と書く．このとき $Q^\times = (Q^*)'$ は $i \circ Q = Q^\times \circ i|_{\mathsf{D}(Q)}$ を満たし，Q の自然な拡張になっている．便宜上，$Q^\times$ のことを単に双対作用素と呼ぶ．作用素 H と K に対しては次を仮定する.

(X6) H は $X(\Omega)$ 上稠密に定義された作用素である．すなわち，$X(\Omega)$ の稠密な部分空間 Y が存在して $HY \subset X(\Omega)$ が成り立つ.

---

[4] $X(\Omega)$ は Banach 空間とは限らないから，連続作用素と有界作用素の間にはギャップがあることを念のため注意しておく．Banach 空間以外で両者の概念が同値になるための条件はかなり複雑である [1].

(X7) K は H-有界であり，かつ K^* は $X(\Omega)$ 上稠密に定義された作用素である．
(X8) 任意の $\lambda \in \{\mathrm{Im}(\lambda) < 0\} \cup I \cup \Omega$ に対して $K^\times A(\lambda) iX(\Omega) \subset iX(\Omega)$ ．

仮定 (X6) と (X7) より，$H^\times, K^\times, T^\times$ が $X(\Omega)'$ 上で稠密に定義できることが示せる．特に $\mathsf{D}(H^\times)$ は $i\mathsf{D}(H)$ を含む．K, T に対しても同様．もし H, K が $X(\Omega)$ 上の連続作用素ならば，$H^\times, K^\times$ および $T^\times$ は $X(\Omega)'$ 上の連続作用素になるが，一般にはこれは仮定しない．K が H-有界であるとは，$\lambda \notin \sigma(H)$ のとき $K(\lambda - H)^{-1}$ が $\mathcal{H}$ 上の有界作用素であることをいう．$A(\lambda)$ は $(\lambda - H)^{-1}$ の解析接続であったから，(X8) はある意味において (X7) の解析接続バージョンだと言える．

以上の準備のもと，まずは T の一般化固有値を定義しよう．普通の意味での T の固有値，固有関数は $(\lambda - T)v = 0$ で定義されるが，$T = H + K$ であるからこれは $(id - (\lambda - H)^{-1}K)v = 0$ と変形できる．$X(\Omega)'$ における $(\lambda - H)^{-1}$ の解析接続が $A(\lambda)$ であったことに注意して，次の定義を設ける．

定義 5.2. ある $\lambda \in \Omega \cup I \cup \{\lambda \,|\, \mathrm{Im}(\lambda) < 0\}$ に対して方程式

$$(id - A(\lambda)K^\times)\mu = 0 \tag{5.2}$$

が非自明な解 $\mu \in X(\Omega)'$ を持つとき，λ を T の**一般化固有値**，μ をその**一般化固有関数**という．

上式に $K^\times$ を作用させると

$$(id - K^\times A(\lambda))K^\times \mu = 0 \tag{5.3}$$

を得る．もし $K^\times \mu = 0$ ならば (5.2) より $\mu = 0$ なので，λ が一般化固有値であるための必要十分条件は $id - K^\times A(\lambda)$ が $iX(\Omega)$ 上単射でないことである．ここで，仮定 (X8) より作用素 $K^\times A(\lambda)$ が $iX(\Omega)$ 上で well-defined であることに注意せよ．蔵本モデルへの応用に興味がある方は，この時点でこの節の残りを飛ばして 6 節に行っても差し支えない．

定理 5.3. λ を T の一般化固有値，μ をその一般化固有関数とするとき，

$$T^\times \mu = \lambda \mu$$

が成り立つ．

証明の概略． 作用素解析により，$\mathsf{D}(\lambda - H^\times) \supset \mathsf{R}(A(\lambda))$ かつ $(\lambda - H^\times)A(\lambda) = id : iX(\Omega) \to iX(\Omega)$ が示せる．したがって

$$(\lambda - H^\times)(id - A(\lambda)K^\times)\mu = (\lambda - H^\times - K^\times)\mu = (\lambda - T^\times)\mu = 0$$

を得る．□

この定理より，λ は双対作用素 $T^\times$ の普通の意味での固有値であることが分かる．ただし，一般に一般化固有値の集合は $T^\times$ の固有値の集合よりも真に小さい．双対空間 $X(\Omega)'$ はあまりに大きすぎるため，典型的には $\mathbb{C}$ 全体が $T^\times$ の固有値になり得る．一般化固有値の集合は，T のスペクトルよりは情報を多く持っているが $T^\times$ のスペクトルほど荒っぽくない，ちょうど良い集合になっている．

5.2 $A(\lambda)$ の性質

さらに詳しい議論をする前に，$A(\lambda)$ の性質を詳しく見ておくと都合が良い．$n = 1, 2, \cdots$ に対し，線形作用素 $A^{(n)}(\lambda) : iX(\Omega) \to X(\Omega)'$ を

$$\langle A^{(n)}(\lambda)\psi \,|\, \phi\rangle = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\lambda-\omega)^n} E[\psi,\phi](\omega)d\omega + 2\pi i \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big|_{z=\lambda} E[\psi,\phi](z), \ (\lambda \in \Omega), \\ \displaystyle\lim_{y\to -0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x+iy-\omega)^n} E[\psi,\phi](\omega)d\omega, \quad (\lambda = x \in I), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\lambda-\omega)^n} E[\psi,\phi](\omega)d\omega, \quad (\mathrm{Im}(\lambda) < 0) \end{cases}$$

で定義する．部分積分により，$\langle A^{(n)}(\lambda)\psi \,|\, \phi\rangle$ は $((\lambda - H)^{-n}\psi, \phi)$ の下半面から Ω への解析接続になっていることを示すのは容易である．$A^{(1)}(\lambda)$ はこれまで通り $A(\lambda)$ とも書く．

命題 5.4. 任意の自然数 $j \geq n \geq 0$ に対し，作用素 $A^{(j)}(\lambda)$ は次を満たす．

(i) $(\lambda - H^\times)^n A^{(j)}(\lambda) = A^{(j-n)}(\lambda)$，ただし $A^{(0)}(\lambda) := id$.

(ii) $A^{(j)}(\lambda)(\lambda - H^\times)^n = A^{(j-n)}(\lambda)$.
特に $(\lambda - H^\times)\mu \in iX(\Omega)$ なるとき $A(\lambda)(\lambda - H^\times)\mu = \mu$.

(iii) $\displaystyle\frac{d^j}{d\lambda^j}\langle A(\lambda)\psi \,|\, \phi\rangle = (-1)^j j! \langle A^{(j+1)}(\lambda)\psi \,|\, \phi\rangle,\ j = 0, 1, \cdots.$

(iv) 任意の $\psi \in X(\Omega)$ に対し，$A(\lambda)\psi$ は

$$A(\lambda)\psi = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j A^{(j+1)}(\lambda_0)\psi, \tag{5.4}$$

と展開され，右辺は $X(\Omega)'$ の強位相で収束する．

証明の概略． (i),(ii) は作用素解析を用いて示せ，(iii) は $A(\lambda)$ の定義から直接確認できる．

$\langle A(\lambda)\psi \,|\, \phi\rangle$ は正則なので，(iii) より

$$\langle A(\lambda)\psi \,|\, \phi\rangle \ = \ \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j \langle A^{(j+1)}(\lambda_0)\psi \,|\, \phi\rangle, \tag{5.5}$$

と展開できるが，これは $A(\lambda)\psi$ が弱正則であることを意味する．ところが $X(\Omega)$ は樽型空間であるから，Banach-Steinhaus の定理を用いれば任意の弱正則関数は強正則であることが示せて，(iv) が従う．□

一般化固有値の固有空間と重複度を定義しよう．普通のスペクトル理論では，固有値 λ の固有空間は方程式 $(\lambda - T)^n v = 0$ の解の全体として定義される．例えば $n = 2$ のときは，これは

$$(\lambda - H - K)(\lambda - H - K)v = (\lambda - H)^2 (id - (\lambda - H)^{-2} K (\lambda - H)) \circ (id - (\lambda - H)^{-1} K)v = 0$$

と整理される．$(\lambda - H)^2$ で割ると

$$(id - (\lambda - H)^{-2} K (\lambda - H)) \circ (id - (\lambda - H)^{-1} K)v = 0.$$

ここで $(\lambda - H)^{-n}$ の解析接続が $A^{(n)}(\lambda)$ であったから，発見的には次の方程式

$$(id - A^{(2)}(\lambda)K^{\times}(\lambda - H^{\times})) \circ (id - A(\lambda)K^{\times})\,\mu = 0$$

を考えたくなる．そこで，線形作用素 $B^{(n)}(\lambda) : \mathsf{D}(B^{(n)}(\lambda)) \subset X(\Omega)' \to X(\Omega)'$ を

$$B^{(n)}(\lambda) = id - A^{(n)}(\lambda)K^{\times}(\lambda - H^{\times})^{n-1} \tag{5.6}$$

で定義しよう．このとき，上の方程式は $B^{(2)}(\lambda)B^{(1)}(\lambda)\mu = 0$ と書ける．ここで $B^{(n)}(\lambda)$ の定義域は $A^{(n)}(\lambda)K^{\times}(\lambda - H^{\times})^{n-1}$ の定義域である．次の等式

$$(\lambda - H^{\times})^k B^{(j)}(\lambda) = B^{(j-k)}(\lambda)(\lambda - H^{\times})^k, \quad j > k \tag{5.7}$$

は容易に示すことができる．このようにして次の定義に到達する．

定義 5.5. T の一般化固有値 λ に従属する**一般固有空間**を

$$V_\lambda = \bigcup_{m \geq 1} \mathrm{Ker}\, B^{(m)}(\lambda) \circ B^{(m-1)}(\lambda) \circ \cdots \circ B^{(1)}(\lambda)$$

で定義し，$\mathrm{dim} V_\lambda$ を λ の**重複度**という．

特に $\mathrm{Ker}\, B^{(1)}(\lambda)$ の元は定義 5.2 で定義した一般化固有関数である．定理 5.3 と同様にして次が示せる．

定理 5.6. 任意の $\mu \in V_\lambda$ に対してある自然数 M が存在して $(\lambda - T^{\times})^M \mu = 0$.

一般には V_λ は普通の意味での固有空間 $\bigcup_{m\geq 1} \mathrm{Ker}\,(\lambda - T^{\times})^m$ の部分空間である．双対空間 $X(\Omega)'$ は大きすぎるため，典型的には $\bigcup_{m \geq 1} \mathrm{Ker}\,(\lambda - T^{\times})^m$ は無限次元であるが，後で分かるように V_λ は有限次元になることが多い．

5.3 一般化レゾルベント

$R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}$ を，作用素 T のレゾルベントとする．簡単な計算から

$$R_\lambda \psi = (\lambda - H)^{-1} \left(id - K(\lambda - H)^{-1}\right)^{-1} \psi \tag{5.8}$$

が分かるが，$X(\Omega)'$ における $(\lambda - H)^{-1}$ の解析接続が $A(\lambda)$ であったから，次の定義を得る．以下では $\hat{\Omega} = \Omega \cup I \cup \{\lambda \,|\, \mathrm{Im}(\lambda) < 0\}$ とおく．

定義 5.7. 逆写像 $(id - K^{\times}A(\lambda))^{-1}$ が存在するとき，T の**一般化レゾルベント** $\mathcal{R}_\lambda : iX(\Omega) \to X(\Omega)'$ を

$$\mathcal{R}_\lambda = A(\lambda) \circ (id - K^{\times}A(\lambda))^{-1} = (id - A(\lambda)K^{\times})^{-1} \circ A(\lambda), \quad \lambda \in \hat{\Omega} \tag{5.9}$$

で定義する．

2 番目の等式は $(id - A(\lambda)K^{\times})A(\lambda) = A(\lambda)(id - K^{\times}A(\lambda))$ から従う．ここで $id - K^{\times}A(\lambda)$ が $iX(\Omega)$ 上単射であることと $id - A(\lambda)K^{\times}$ が $\mathsf{R}(A(\lambda))$ 上で単射であることは同値であることに注意しよう．$A(\lambda)$ は連続でないから $\mathcal{R}_\lambda$ も連続でないが，$A(\lambda) \circ i$ は連続であったから $\mathcal{R}_\lambda \circ i : X(\Omega) \to X(\Omega)'$ が連続かどうか問うことには意味がある．

定義 5.8. 次の 2 条件を満たす $\lambda \in \hat{\Omega}$ の全体を一般化レゾルベント集合 $\hat{\varrho}(T)$ という；λ のある近傍 $V_\lambda \subset \hat{\Omega}$ が存在して

(i) 任意の $\lambda' \in V_\lambda$ に対して $\mathcal{R}_{\lambda'} \circ i$ は稠密な定義域を持つ $X(\Omega)$ から $X(\Omega)'$ への連続作用素である．ただし $X(\Omega)'$ には弱位相を入れる．
(ii) 各 $\psi \in X(\Omega)$ に対し，集合 $\{\mathcal{R}_{\lambda'} \circ i(\psi)\}_{\lambda' \in V_\lambda}$ は $X(\Omega)'$ の有界集合である [5]．

集合 $\hat{\sigma}(T) = \hat{\Omega} \backslash \hat{\varrho}(T)$ を T の**一般化スペクトル**という．**一般化点スペクトル** $\hat{\sigma}_p(T)$ を $id - K^\times A(\lambda)$ が単射でないような $\lambda \in \hat{\sigma}(T)$ の全体とする (これは一般化固有値の全体である)．**一般化剰余スペクトル** $\hat{\sigma}_r(T)$ を $\mathcal{R}_\lambda \circ i$ の定義域が $X(\Omega)$ の稠密な部分空間にならないような $\lambda \in \hat{\sigma}(T)$ の全体とする．**一般化連続スペクトル**を $\hat{\sigma}_c(T) = \hat{\sigma}(T) \backslash (\hat{\sigma}_p(T) \cup \hat{\sigma}_r(T))$ で定義する．

定義より $\hat{\varrho}(T)$ は開集合となる．$\hat{\varrho}(T)$ の定義の仕方は普通のスペクトル理論より複雑に見えるが，これは $X(\Omega)$ が Banach 空間でないことに起因するものである．普通のスペクトル理論においても，空間が Banach でないときにはレゾルベント集合は上と同様のやり方で定義される [23], [17]．$X(\Omega)$ が Banach 空間のときには $\hat{\varrho}(T)$ の定義は慣れ親しんだものと一致するであろう．

定理 5.9. (i) 任意の $\psi \in X(\Omega)$ に対し，$\mathcal{R}_\lambda i\psi$ は $\hat{\varrho}(T)$ において $X(\Omega)'$-値の正則関数である．
(ii) $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$ のとき $\mathcal{R}_\lambda \circ i = i \circ (\lambda - T)^{-1}$.

定理の (ii) は，$\mathrm{Im}(\lambda) < 0$ のとき任意の $\psi, \phi \in X(\Omega)$ に対して $\langle \mathcal{R}_\lambda \psi \,|\, \phi \rangle = ((\lambda - T)^{-1}\psi, \phi)$ が成り立つことを意味している．したがって $\langle \mathcal{R}_\lambda \psi \,|\, \phi \rangle$ は $((\lambda - T)^{-1}\psi, \phi)$ の下半面から上半面への解析接続を与える．

証明の概略. $\psi_\lambda = i^{-1}(id - K^\times A(\lambda))^{-1} i(\psi)$ とおく．簡単な計算から

$$\mathcal{R}_{\lambda+h} i(\psi) - \mathcal{R}_\lambda i(\psi) = (A(\lambda+h) - A(\lambda)) i(\psi_\lambda) + \mathcal{R}_{\lambda+h} i \circ i^{-1} K^\times (A(\lambda+h) - A(\lambda)) i(\psi_\lambda)$$

が分かる．まず，$h \to 0$ でこれが $X(\Omega)'$ の弱位相で 0 に収束することを示したい．$A(\lambda) \circ i$ は λ について正則であったから第 1 項は難しくない．第 2 項を評価するために $\mathcal{R}_{\lambda+h} i$ と $i^{-1} K^\times A(\lambda) i$ の評価が必要である．前者について，一般化レゾルベント集合の定義における (ii) の性質と Banach-Steinhaus の定理を用いれば，写像の族 $\{\mathcal{R}_{\lambda'} \circ i\}_{\lambda' \in V_\lambda}$ が同程度連続であることが示せる．したがって $\mathcal{R}_{\lambda+h} i$ は $h \to 0$ で悪さをしない．一方，$A(\lambda)$ の正則性から $i^{-1} K^\times A(\lambda) i$ が $X(\Omega)$ の位相で正則であることが示せる．したがって $\mathcal{R}_{\lambda+h} i(\psi)$ は $\mathcal{R}_\lambda i(\psi)$ に弱位相で収束することが分かる．上式を h で割った後に同様の議論を繰り返せば，$\mathcal{R}_\lambda i(\psi)$ が弱位相で正則であることが示せる．ところが $X(\Omega)$ が樽型空間なので弱正則関数は自動的に強正則になる．□

命題 5.10. 一般化レゾルベントは次の性質を持つ．
(i) $(\lambda - T^\times) \circ \mathcal{R}_\lambda = id|_{iX(\Omega)}$
(ii) $\mu \in X(\Omega)'$ が $(\lambda - T^\times)\mu \in iX(\Omega)$ を満たすときは $\mathcal{R}_\lambda \circ (\lambda - T^\times)\mu = \mu$.
(iii) $T^\times \circ \mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}_\lambda \circ T^\times$.

この命題は命題 8 から容易に従う．正確には (iii) は，両辺の作用素が well-defined であるような定義域において成り立つ．

5.4 一般化射影

$\Sigma \subset \hat{\sigma}(T)$ を一般化スペクトルの有界な部分集合であって，単純閉曲線 $\gamma \subset \Omega \cup I \cup \{\lambda \,|\, \mathrm{Im}(\lambda) < 0\}$ によって残りの一般化スペクトルと分離できるものとしよう．作用

[5] Banach-Steinhaus の定理より弱有界集合は強有界なので，位相を特定する必要はない．

素 $\Pi_\Sigma : iX(\Omega) \to X(\Omega)'$ を

$$\Pi_\Sigma \phi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathcal{R}_\lambda \phi \, d\lambda, \quad \phi \in iX(\Omega), \tag{5.10}$$

で定義する．ここで積分は Pettis 積分として定義する [6]．合成 $\Pi_\Sigma \circ \Pi_\Sigma$ が定義できないので Π_Σ は普通の意味での射影作用素ではないが，以下の一連の定理により，Π_Σ を Σ に対する**一般化射影**と呼んでも差支えないであろう．

命題 5.11. $\Pi_\Sigma(iX(\Omega)) \cap (id - \Pi_\Sigma)(iX(\Omega)) = \{0\}$ であり，ベクトル空間の直和は

$$iX(\Omega) \subset \Pi_\Sigma(iX(\Omega)) \oplus (id - \Pi_\Sigma)(iX(\Omega)) \subset X(\Omega)'$$

を満たす．特に，任意の $\phi \in X(\Omega)$ に対してある $\mu_1, \mu_2 \in X(\Omega)'$ が存在して ϕ は

$$i(\phi) = \langle \phi| = \mu_1 + \mu_2, \quad \mu_1 \in \Pi_\Sigma(iX(\Omega)),\ \mu_2 \in (id - \Pi_\Sigma)(iX(\Omega)) \tag{5.11}$$

と一意に分解される．

命題 5.12. Π_Σ は $T^\times$-不変である: $\Pi_\Sigma \circ T^\times = T^\times \circ \Pi_\Sigma$.

定理 5.13. λ_0 を孤立した一般化固有値とし，Π_0 を λ_0 に対する一般化射影，V_0 を λ_0 の一般固有空間とする (定義 5.5)．もし $\Pi_0 iX(\Omega)$ が有限次元ならば $\Pi_0 iX(\Omega) = V_0$.

通常のスペクトル理論においては，これらの性質は射影の性質 $\Pi \circ \Pi = \Pi$ やレゾルベント方程式を用いて比較的容易に示すことができる．我々の場合には Π 同士や $\mathcal{R}_\lambda$ 同士の合成が定義できない (したがってレゾルベント方程式も成り立たない) ので，証明は極めてテクニカルで煩雑になる．ここでは定理 5.13 の証明法について少しだけコメントを残すに留める．一般化レゾルベントの λ_0 まわりの Laurent 展開を $\mathcal{R}_\lambda = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^j E_j$ とおく．留数定理から $E_{-1} = -\Pi_0$ である．これを等式 $id = (\lambda - T^\times) \circ \mathcal{R}_\lambda$ に代入すれば，$\{E_j\}_j$ に関する連立方程式を得る．これを整理することで E_{-1} が満たすべき性質を導いていく．

5.5 一般化スペクトルの性質

空間 $X(\Omega)$ の選び方を強調したいときは一般化スペクトル集合 $\hat{\sigma}(T)$ を $\hat{\sigma}(T; X(\Omega))$ と書くことにする．今，2 つの線形位相空間 $X_1(\Omega)$ と $X_2(\Omega)$ が仮定 (X1)〜(X8) を満たすとしよう．このとき，2 つの一般化スペクトル $\hat{\sigma}(T; X_1(\Omega)), \hat{\sigma}(T; X_2(\Omega))$ が定義される．

命題 5.14.[[6]] $X_2(\Omega)$ は $X_1(\Omega)$ の稠密な部分空間であり，$X_2(\Omega)$ の位相は $X_1(\Omega)$ の位相よりも強いとする．このとき，
(i) $\hat{\sigma}(T; X_2(\Omega)) \subset \hat{\sigma}(T; X_1(\Omega))$.
(ii) Σ を $\hat{\sigma}(T; X_1(\Omega))$ の有界な部分集合であって，単純閉曲線 γ によって $\hat{\sigma}(T; X_1(\Omega))$ の残りの部分と分離されるようなものとする．このとき，γ に囲まれた領域に $\hat{\sigma}(T; X_2(\Omega))$ の点が存在する．特に，もし λ が $\hat{\sigma}(T; X_1(\Omega))$ の孤立点ならば $\lambda \in \hat{\sigma}(T; X_2(\Omega))$.

---

[6] 一般に，X を線形位相空間，X' をその強双対空間，S をコンパクト Hausdorff 空間，μ を S 上の有限 Borel 測度とする．写像 $f : S \to X'$ について，もし任意の $\phi \in X$ に対して

$$\langle I(f) \,|\, \phi \rangle = \int_S \langle f \,|\, \phi \rangle d\mu$$

を満たす $I(f) \in X'$ が存在するならば f は Pettis 積分可能であるといい，$I(f) = \int_S f d\mu$ を f の Pettis 積分という．X が樽型かつ f が正則ならば Pettis 積分可能である [5].

証明の概略. 位相に関する仮定から，一般化レゾルベント $\mathcal{R}_\lambda$ を $X_1(\Omega)$ から $X_1(\Omega)'$ への作用素とみたときよりも $X_2(\Omega)$ から $X_2(\Omega)'$ への作用素とみたときのほうが性質がよい．これから (i) が従う．(ii) について，Π_Σ を一般化射影とすると，仮定から $\Pi_\Sigma i X_1(\Omega) \neq \{0\}$．$X_2(\Omega)$ は $X_1(\Omega)$ で稠密であることから $\Pi_\Sigma i X_2(\Omega) \neq \{0\}$ が示せる．□

この定理より，孤立した一般化固有値に関しては，その存在は $X(\Omega)$ の選び方にそれほど依らないことが分かる．歴史的には一般化固有値は様々なやり方で定義されてきたが[7]，定義の仕方に依存せずに同じ結果が得られるのは背景にこの定理があるからであろう．

次の定理を述べるために言葉の準備をしておく．線形位相空間 X_1 から X_2 への線形作用素 L が有界作用素であるとは，原点のある近傍 $U \subset X_1$ が存在して $LU \subset X_2$ が有界集合になることである．$L = L(\lambda)$ がパラメータ λ に依存しているとき，$L(\lambda)$ が λ に関して一様に有界作用素であるとは，近傍 U として λ に依存しないものがとれることをいう．定義域 X_1 が Banach 空間のときは，$L(\lambda)$ が各 λ に対して連続作用素であれば $L(\lambda)$ は λ に関して一様に有界である (U として単位球をとればよい)．また，L がコンパクト作用素であるとは，原点のある近傍 $U \subset X_1$ が存在して $LU \subset X_2$ が相対コンパクト集合になることである．$L = L(\lambda)$ がパラメータ λ に依存しているとき，$L(\lambda)$ が λ に関して一様にコンパクト作用素であるとは，近傍 U として λ に依存しないものがとれることをいう．定義域 X_1 が Banach 空間のときは，$L(\lambda)$ が各 λ に対してコンパクト作用素であれば (特に単位球を相対コンパクト集合に写す写像であれば)$L(\lambda)$ は λ に関して一様にコンパクトである．もし X_2 が Montel 空間ならば，Montel 空間の任意の有界集合は相対コンパクトであるから，(一様に) 有界な作用素は自動的に (一様に) コンパクト作用素になる．

多くの応用において，$i^{-1}K^\times A(\lambda)i$ は有界作用素になる．このとき，次の命題は一般化スペクトルを計算するのに役に立つであろう．

命題 5.15. $\lambda \in \hat{\Omega}$ を固定する．そのある近傍 $U_\lambda \subset \hat{\Omega}$ が存在して $i^{-1}K^\times A(\lambda')i : X(\Omega) \to X(\Omega)$ が $\lambda' \in U_\lambda$ に関して一様に有界作用素であると仮定する．このとき，もし $id - i^{-1}K^\times A(\lambda)i$ が $X(\Omega)$ 上連続な逆を持つならば，$\lambda \notin \hat{\sigma}(T)$．

証明の概略. 一般化レゾルベントは $\mathcal{R}_\lambda \circ i = A(\lambda)\circ i \circ (id - i^{-1}K^\times A(\lambda)i)^{-1}$ と書ける．$A(\lambda)\circ i$ は連続だったので，λ のある近傍 V_λ が存在して集合 $\{(id - i^{-1}K^\times A(\lambda')i)^{-1}\psi\}_{\lambda' \in V_\lambda}$ が $X(\Omega)$ で有界であることを示せばよい．そのためには，写像 $\lambda' \mapsto (id - i^{-1}K^\times A(\lambda')i)^{-1}\psi$ が $\lambda' \in V_\lambda$ について連続であることを示せば十分である．$id - i^{-1}K^\times A(\lambda)i$ は λ について連続である．逆写像も λ について連続であることを示すには，$X(\Omega)$ が Banach 空間の場合には Neumann 級数を使えばよいことはよく知られた議論であるが，Banach 空間でない場合にも本質的に同じ議論をやればよい．一般の局所凸空間における線形作用素の Neumann 級数の存在について，Bruyn [2] を参照せよ．□

この命題の系として，$X(\Omega)$ が Banach 空間かつ $i^{-1}K^\times A(\lambda)i$ が $X(\Omega)$ 上の連続作用素ならば，$\lambda \in \hat{\varrho}(T)$ であるのは $id - i^{-1}K^\times A(\lambda)i$ が $X(\Omega)$ 上連続な逆を持つときに限ることが分かる．したがって一般化レゾルベント集合の定義は通常のスペクトル理論でよく知られたものに帰着されるのである．さらに $i^{-1}K^\times A(\lambda)i$ がコンパクトであることを仮定すれば，より強いことが言える．

定理 5.16. 作用素 $i^{-1}K^\times A(\lambda)i : X(\Omega) \to X(\Omega)$ が $\lambda \in \hat{\Omega}$ について一様にコンパクト作用素であるとき，次が成り立つ．

---

[7]Schrödinger 作用素の文脈では一般化固有値は共鳴極 (resonance pole) という名で呼ばれており，散乱行列の解析接続 [19] や complex deformation の方法 [11] など，様々なやり方で定義，研究されてきた．

(i) 任意のコンパクト集合 $D \subset \hat{\Omega}$ に対し，D に含まれる一般化固有値の数は有限である．特に，$\hat{\sigma}_p(T)$ は高々可算であって集積するとすれば $\hat{\Omega}$ の境界か無限遠点のみである．
(ii) 任意の一般化固有値の重複度は有限であり，したがって定理 17 が成立する．
(iii) $\hat{\sigma}_c(T) = \hat{\sigma}_r(T) = \emptyset$.

この種の結果は，$X(\Omega)$ が Banach 空間のときには Riesz-Schauder 理論としてよく知られている．$X(\Omega)$ が Banach でない一般の局所凸空間のときにも Riesz-Schauder 理論はほとんどそのまま成り立つことが知られており [20]，これを応用して定理を示すことができる．この定理は埋蔵固有値問題に応用できる．T を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素としよう．T のスペクトルは実軸上にしかないが，一般には連続スペクトルの中に埋蔵した固有値が存在し，そのような固有値を見つけるのは極めて難しい問題である．ところが上の定理が成り立つとき，一般化連続スペクトルは空なのだから，一般化スペクトル理論の範疇では埋蔵固有値はもはや埋蔵しておらず，孤立している．したがって一般化射影を用いて固有値を見つけることができる．

5.6 半群

作用素 $iT = i(H+K)$ は $\mathcal{H}$ 上の C^0-半群 e^{iTt} を生成すると仮定する (ここでは i は埋め込みではなく $\sqrt{-1}$)．Laplace 逆変換の公式よりこれは

$$(e^{iTt}\psi, \phi) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{x\to\infty}\int_{-x-iy}^{x-iy} e^{i\lambda t}((\lambda - T)^{-1}\psi, \phi)d\lambda, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{5.12}$$

で与えられる．ここで積分路は T のスペクトルよりも下方にある水平線である．一般には T は実軸上に連続スペクトルを持っており，これを越えて積分路を変形することはできないため，半群の $t \to \infty$ での漸近挙動を調べることは困難である．ところが定理 5.9 より，積分路が下半面に含まれているときには，$\phi, \psi \in X(\Omega)$ に対しては

$$(e^{iTt}\psi, \phi) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{x\to\infty}\int_{-x-iy}^{x-iy} e^{i\lambda t}\langle \mathcal{R}_\lambda \psi \,|\, \phi\rangle d\lambda,$$

と書くことができる．多くの場合，$\langle \mathcal{R}_\lambda \psi \,|\, \phi\rangle$ の特異点は離散的な一般化固有値のみからなるので，上式を留数定理を用いて評価することができる．留数の計算は一般化射影 Π_0 を用いてできる．例えば λ_0 が重複度 M の一般化固有値ならば，そのまわりの留数は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} e^{i\lambda t}\langle \mathcal{R}_\lambda \psi \,|\, \phi\rangle d\lambda = \sum_{k=0}^{M-1} e^{i\lambda_0 t}\frac{(-it)^k}{k!}\langle (\lambda_0 - T^\times)^k \Pi_0 \psi \,|\, \phi\rangle,$$

で与えられる．ここで γ_0 は λ_0 を囲む単純閉曲線．図 6 も参照．特に λ_0 が上半面の点ならば，この項は指数的に 0 に収束する．したがって，たとえ T が上半面に普通の意味での固有値を持たなくても (iT が左半面に固有値を持たなくても)，一般化スペクトルの存在により $(e^{iTt}\psi, \phi)$ が指数的に減衰することは可能である．ただし $e^{iTt}\psi$ そのものが $\mathcal{H}$ の位相で減衰するとは限らないことに注意しよう．一般化固有値により引き起こされるこの種の指数的減衰は，プラズマ物理では Landau 減衰として古くから知られている他 [8]，Schrödinger 方程式でもしばしば観察される [11, 19].

一般には減衰は過渡状態においてのみ起こる．そのことを見るために，λ_0 を一般化固有値，$\mu_0 \in X(\Omega)'$ をその一般化固有関数とする．$(e^{iTt})^\times = ((e^{iTt})^*)'$ を半群の双対作用素としよう．このとき $(e^{iTt})^\times \mu_0 = e^{i\lambda_0 t}\mu_0$ が成り立つので，μ_0 を初期値にとれば解は本当に指数的に減衰するが，一般には μ_0 は双対空間の元のため，初期値の候補として適当でないかもしれない．ところが $X(\Omega)$ は $X(\Omega)'$ の稠密な部分空間であったから，任意の $\tau > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対してある関数 $\phi_0 \in X(\Omega)$ が存在して，$0 \leq t \leq \tau$ においては

$$|\langle (e^{iTt})^\times \phi_0 \,|\, \psi\rangle - \langle (e^{iTt})^\times \mu_0 \,|\, \psi\rangle| < \varepsilon,$$

が成り立つ．これはある有限の時間 $0 \leq t \leq \tau$ においては

$$(e^{iTt}\phi_0, \psi) \sim e^{i\lambda_0 t}\langle \mu_0 \,|\, \psi\rangle,$$

が成り立つことを意味しているため，一般化固有値が解の過渡状態を与えることが分かる．

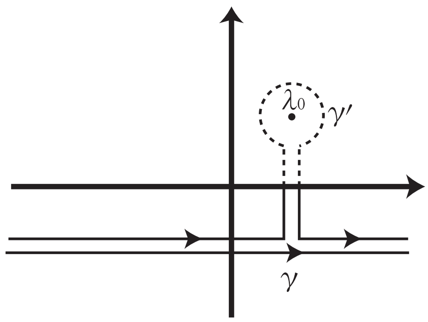

Figure 6: 積分路の変形．γ は Laplace 逆変換の公式におけるオリジナルの積分路であり，γ' は変形した積分路を表す．点線は，積分路が 2 枚目のシートに入ったことを意味している．

6　蔵本モデルへの応用

6.1　非同期状態の漸近安定性

5 節の結果を，蔵本モデルを線形化して得られる作用素 $T_1 = i\mathcal{M} + K\mathcal{P}/2$ に応用しよう．ただし自己共役作用素 $\mathcal{M}$ に i が乗じられているので，下半面は右半面に，上半面は左半面に置き換え，公式や定義も便宜修正してから適用する．

T_1 は虚軸全体を連続スペクトルに持ち，そのため通常の理論では非同期状態の安定性が判定できないのであった．そこで Gelfand の 3 つ組 $X \subset L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega) \subset X'$ をうまく定義し，レゾルベント $(\lambda - T_1)^{-1}$ を X から X' への作用素だとみなせば連続スペクトルを越えて右半面から左半面への解析接続を持つようにしたい．レゾルベントを具体的に書き下してみると，

$$((\lambda - T_1)^{-1}\phi, \psi^*) = D[\phi,\psi](\lambda) + \frac{K}{2 - KD[P_0,P_0](\lambda)} D[\phi,P_0](\lambda)\cdot D[P_0,\psi](\lambda),$$

$$D[\phi,\psi](\lambda) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - i\omega}\phi(\omega)\psi(\omega)g(\omega)d\omega.$$

ここで，$D[\phi,\psi](\lambda)$ の右半面から左半面への解析接続が存在するとすれば，それは

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - i\omega}\phi(\omega)\psi(\omega)g(\omega)d\omega + 2\pi\phi(-i\lambda)\psi(-i\lambda)g(-i\lambda)$$

で与えられる．これが存在して正則であるためには，ϕ と ψ が上半面で正則であればよい (g は Gauss 分布なので整関数である)．そこで，X として上半面の近傍で正則かつ実軸上で $L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega)$ に入るものをとる (実際には，非線形解析を行うために，遠方での増大度と位相に関する複雑な条件も必要となる．詳細は原論文 [3] を参照されたい)．このとき，T_1 と $X \subset L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega) \subset X'$ は前節の (X1)∼(X8)，および定理 5.16 のコンパクト性の仮定を全て満たす．特に連続スペクトルは消失し，一般化スペクトルは離散的となる．

一般化固有値を計算するために式 (5.2) を書き下してもよいが，もっと簡便な方法がある．普通の意味の固有値は式 (3.2) の根であった．この方程式の右半面から左半面への解析接続

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - i\omega} g(\omega)d\omega + 2\pi g(-i\lambda) = \frac{2}{K}, \quad (\mathrm{Re}(\lambda) < 0)$$

の根が一般化固有値を与える．g が Gauss 分布であることを考慮するとその位置を見積もることができ，特に左半面に無限個，離散的に存在することが分かる．また $K > K_c$ のとき唯一右半面に存在していた固有値 $\lambda_0 = \lambda_0(K)$ は，$K \leq K_c$ では上式の根となる．したがって $K = K_c$ において branch cut である虚軸をまたいで，2 枚目の Riemann シートに移り，一般化固有値に化けたのである (図 4)．一般化固有関数も次のように計算できる．$K > K_c$ のとき右半面に存在する固有値の固有関数 v は式 (3.3) で与えられるのだった．これを包含 $i : L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega) \to X'$ で X' の元とみなしたものを μ_λ と書くと，その X への作用は

$$\langle \mu_\lambda \,|\, \phi \rangle = (v, \phi^*) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - i\omega}\phi(\omega)g(\omega)d\omega$$

となる．左半面にある一般化固有値 λ の一般化固有関数 μ_λ はこれの解析接続，すなわち

$$\langle \mu_\lambda \,|\, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - i\omega}\phi(\omega)g(\omega)d\omega + 2\pi\phi(-i\lambda)g(-i\lambda)$$

で与えられる．これはもはや内積の形で書けず，$L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega)$ に入らない X' の元になっている．

今，$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ をそれぞれ一般化固有値とそれに従属する一般化固有関数の全体とする．λ_0 を最も右端にあるものとすると，これだけが $K > K_c$ のとき右半面にあって普通の意味の固有値である．レゾルベントが右半面から左半面への解析接続を持ち，その特異点である一般化固有値は離散的であることが分かったので，Laplace 逆変換の積分路を図 3 のように変形して留数定理を用いることで次が示せる．

定理 6.1.[スペクトル分解] $\forall \phi \in X$ に対して T_1 が生成する半群 $e^{T_1 t}$ の双対作用素は

$$(e^{T_1 t})^\times \phi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \mu_n \,|\, \phi \rangle \mu_n \tag{6.1}$$

と展開でき，右辺は X' で強収束する．特に $0 < K < K_c$ ならば任意の n について $\mathrm{Re}(\lambda_n) < 0$ であり，$(e^{T_1 t})^{\times}\phi$ は $t \to \infty$ で X' の位相において 0 に収束する．

T_1 は自己共役でもコンパクトでもないので，Hilbert 空間論の範疇ではスペクトル分解できないことに注意しよう．$e^{T_1 t}$ は X の元を X に写すことは簡単に示せるので，上式の左辺は X の元であるが，右辺の無限和の収束は X' の位相においてであることに注意されたい．定理 1.1 はこれを用いて示すことができる (ここまでででただちに分かることは線形安定性のみである．実際には非線形項の処理も必要だが，ここでは割愛する).

6.2 同期解の分岐

蔵本予想のうち，残された問題は $K = K_c$ において起こる非同期状態から同期状態への分岐である．力学系の解の分岐は中心多様体縮約を用いて次元の低い問題に帰着させるのが常套手段であるが，今の場合，連続スペクトルが虚軸上に乗っているため中心部分空間が定義できない．そこで，やはり一般化固有値を用いて，一般化された意味での中心部分空間 $\mathbf{E}^c$ を

$$\mathbf{E}^c := \mathrm{span}\{\mu_n \,|\, \lambda_n \in i\mathbb{R}\}$$

で定義する．定理 20 のコンパクト性の条件が満たされるときはこれは有限次元となる．蔵本モデルの場合には，$K = K_c$ のときに一般化固有値 λ_0 が虚軸上に乗っており，その重複度は 1 であるので，$\mathbf{E}^c$ は 1 次元空間である．その元 (λ_0 の一般化固有関数) を μ_0 とする．さらに $\mathbf{E}^c$ に接する 1 次元の中心多様体が双対空間 X' の中に存在することも示せる．ここが一番ハードな非線形の解析が必要な部分であるが，それさえできれば，残りの計算は通常の中心多様体縮約と同様である．

2 節で，連続極限のモデルを Fourier 係数 Z_j についての方程式系に書きなおした．例えば Z_1 についての方程式は

$$\frac{dZ_1}{dt} = i\omega Z_1 + \frac{K}{2}\eta(t) - \frac{K}{2}\overline{\eta(t)}Z_2 = T_1 Z_1 - \frac{K}{2}(P_0, Z_1)Z_2$$

であった．$Z_2, Z_3, \cdots$ の方程式も同時に見る必要があるがここでは省略する．これは $L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega)$ 上の発展方程式を定めるが，この空間の上で見ると T_1 が虚軸上に連続スペクトルを持つのであった．そこで，自然な包含 $i : L^2(\mathbb{R}, g(\omega)d\omega) \to X'$ を用いて，上式を X' 上の発展方程式とみなす．そのためには作用素 T_1 はその双対作用素に，Hilbert 空間の内積 (P_0, Z_1) はブラケットに置き換えればよい：

$$\frac{dZ_1}{dt} = T_1^{\times} Z_1 - \frac{K}{2}\langle P_0 \,|\, Z_1\rangle Z_2.$$

双対空間の上では連続スペクトルは存在せず，中心多様体が定義できるので都合がよい．今，α を中心部分空間上の座標とし，未知関数 Z_1 を中心部分空間の方向とその補空間の方向に $Z_1 = \alpha(t)\mu_0 + Y_1$ と分解する．ここで $\mathbf{E}^c$ への射影作用素 (5.4 節) を Π_0 とするとき $Y_1 = (id - \Pi_0)Z_1$ である．Y_1 と $Z_2, Z_3, \cdots$ は中心部分空間の外側の方向であるから $O(\alpha^2)$ と仮定して $Z_1 = \alpha(t)\mu_0 + Y_1$ を方程式に代入し，やや長い計算を行うと [4]，最終的に中心多様体上の力学系として 1 次元の方程式

$$\frac{d}{dt}\alpha = (K - K_c)p_1\alpha + p_3\alpha|\alpha|^2 + O(\alpha^5) \tag{6.2}$$

を得る．ただし p_1 と p_3 は

$$p_1 = \frac{D_0}{K_c}, \quad p_3 = \frac{\pi D_0 K_c^3 g''(0)}{16}$$

で定義される定数で，D_0 は λ_0 まわりの留数に起因するある定数である．これはピッチフォーク分岐の標準形であり，$-p_1/p_3 > 0$ かつ $K > K_c$ のとき

$$|\alpha| = \sqrt{\frac{-p_1}{p_3}}\sqrt{K - K_c} + O(K - K_c)$$

なる漸近安定な不動点を持つ．$r = |\alpha| + O(\alpha^2)$ に注意すると，これで定理 1.2 が証明できたことになる．

References

[1] J. Bonet, On the identity $L(E,F) = LB(E,F)$ for pairs of locally convex spaces E and F, Proc. Amer. Math. Soc. 99 (1987), no. 2, 249-255.

[2] G. F. C. de Bruyn, The existence of continuous inverse operators under certain conditions, J. London Math. Soc. 44 (1969), 68-70.

[3] H. Chiba, A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite dimensional Kuramoto model, Ergo. Theo. Dyn. Syst, 35, 762-834, (2015).

[4] H.Chiba, I.Nishikawa, Center manifold reduction for a large population of globally coupled phase oscillators, Chaos, 21, 043103 (2011).

[5] H. Chiba, A spectral theory of linear operators on rigged Hilbert spaces under analyticity conditions, Adv. in Math. 273, 324-379, (2015).

[6] H. Chiba, A spectral theory of linear operators on rigged Hilbert spaces under analyticity conditions II : applications to Schrodinger operators, Kyushu Journal of Math. (2018).

[7] B. Fernandez, D. Gerard-Varet, G. Giacomin, Landau damping in the Kuramoto model, arXiv:1410.6006.

[8] J. D. Crawford, P. D. Hislop, Application of the method of spectral deformation to the Vlasov-Poisson system, Ann. Physics 189 (1989), no. 2, 265–317.

[9] I. M. Gelfand, N. Ya. Vilenkin, Generalized functions. Vol. 4. Applications of harmonic analysis, Academic Press, New York-London, 1964.

[10] A. Grothendieck, Topological vector spaces, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1973.

[11] P. D. Hislop, I. M. Sigal, Introduction to spectral theory. With applications to Schrodinger operators, Springer-Verlag, New York, 1996.

[12] W. Kerscher, R. Nagel, Asymptotic behavior of one-parameter semigroups of positive operators, Acta Appl. Math. 2 (1984), 297-309.

[13] H. Komatsu, Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan, 19, (1967), 366–383.

[14] Y. Kuramoto, Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, pp. 420–422. Lecture Notes in Phys., 39. Springer, Berlin, 1975.

[15] Y. Kuramoto, Chemical oscillations, waves, and turbulence, Springer Series in Synergetics, 19. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[16] 蔵本由紀, 河村洋史, 同期現象の数理 -位相記述によるアプローチ-, 培風館 (2010).

[17] F. Maeda, Remarks on spectra of operators on a locally convex space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 47, (1961).

[18] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[19] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics IV. Analysis of operators, Academic Press, New York-London, 1978.

[20] J. R. Ringrose, Precompact linear operators in locally convex spaces, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957), 581-591.

[21] S. H. Strogatz, From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, Phys. D 143 (2000), no. 1-4, 1–20.

[22] F. Tréves, Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, New York-London, 1967.

[23] L. Waelbroeck, Locally convex algebras: spectral theory, Seminar on Complex Analysis, Institute of Advanced Study, 1958.