

# マグマのレオロジーと噴火のダイナミクス

東京大学地震研究所 市原美恵<sup>1</sup>

## 1 はじめに

火山の噴火には、様々な様式が見られる。真っ赤な溶岩が、川のように流れ出したり噴水のように噴き上がる噴火（例えば、伊豆大島 1986 年噴火）、岩山のような溶岩ドームがゆっくりと成長し、時として火砕流を発生させる噴火（例えば、雲仙普賢岳平成噴火）、巨大な噴煙を長時間噴き上げ軽石や火山灰を広範囲にまき散らす噴火（例えば、霧島新燃岳 2011 年噴火）、短時間ではあるが衝撃波を伴うような強い爆発を発生する噴火（例えば、桜島の爆発）などである。一連の噴火の間に、溶岩流出や溶岩ドーム形成のような非爆発的な様式と爆発的な様式の両方が見られる場合も多い。噴火の様式を決める要因と、その遷移条件を明らかにし、予測につなげることは、火山学の主要な課題の一つである。

大きく変化するマグマのレオロジーは、噴火の多様性を生み出す要因の一つである。マグマは、 $\text{SiO}_2$  を主成分とし、液相（メルト）、固相（結晶）、気相（火山ガス）を含む多成分多相の物質である。温度や組成、結晶量などによって粘性率は  $1\text{Pa}\cdot\text{s}$  以下から固体の粘性率まで大きく変化する。また、粘弾性的性質も持ち、流動するマグマであっても、急激な変形を受けると固体のように破壊する。マグマの流動から破壊への遷移の条件、およびその挙動が、噴火様式を決定する鍵であると考えられている。

著者は、約 10 年ほど前、「加速するマグマは硬くなるか軟らかくなるか」と題した短報を本誌に掲載させていただいた [1]。本稿は、それに続く理論的な研究内容について記述する。講義では、実際の噴火現象やアナログ物質を用いた実験についても紹介する予定である。

## 2 火山学におけるマグマの破壊の描像

マグマのレオロジーの研究は、微小振動下での粘弾性応答と、定常変形下での応力歪速度の関係、という二つの極限的な挙動に重点が置かれてきた。

---

<sup>1</sup>E-mail: ichihara@eri.u-tokyo.ac.jp

マグマに微小振動変形を与えて計測される粘弾性の特徴は、一次元線形 Maxwell モデルでよく表現される [2]。全歪  $\varepsilon$  は、弾性要素の歪と粘性要素の歪の和であると仮定する。それぞれの要素にかかる応力は共通で、 $\sigma$  とする。構成方程式は、以下のようになる。

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} = \mu \dot{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{\eta}{\mu}. \tag{1}$$

ここで、 $\mu$  は弾性率、 $\tau$  は緩和時間、 $\eta$  は粘性率である。上付きの  $\cdot$  は、物質に張り付いた時間微分を表し、 $\dot{\varepsilon}$  は全歪速度である。式 (1) に対して、角振動数  $\omega$  で振動する全歪、 $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ 、を与えた時の応力の応答を計算すると、

$$\sigma = (G' + iG'')\varepsilon, \quad \frac{G'}{\mu} = \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad \frac{G''}{\mu} = \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}, \tag{2}$$

$G' + iG''$  は、複素弾性率と呼ばれ、実部である  $G'$  が弾性エネルギーの蓄積を、虚部である  $G''$  が粘性によるエネルギー損失を表す。式 (2) を図で示すと、図 1a のようになる。 $\omega > \tau^{-1}$  では  $G'$  が卓越し、応力と歪が同位相で変化する、すなわち、応答は弾性的になる、一方、 $\omega < \tau^{-1}$  では、 $G''$  が卓越し、応力に対して歪が4分の1波長遅れる。つまり、応力と歪速度が同位相で変化する、応答は粘性的になる。全歪速度が  $\dot{\varepsilon} = i\omega\varepsilon$  であることを考慮して、式 (2) を  $\sigma$  と  $\dot{\varepsilon}$  の関係に書き直すことができ、両者の比として複素粘性率  $\eta^*$  が定義される。その絶対値を  $\omega$  の関数として表すと図 1b のようになり、低周波では  $|\eta^*| \sim \eta$  となり、高周波では周波数に反比例して  $|\eta^*|$  が低下する。

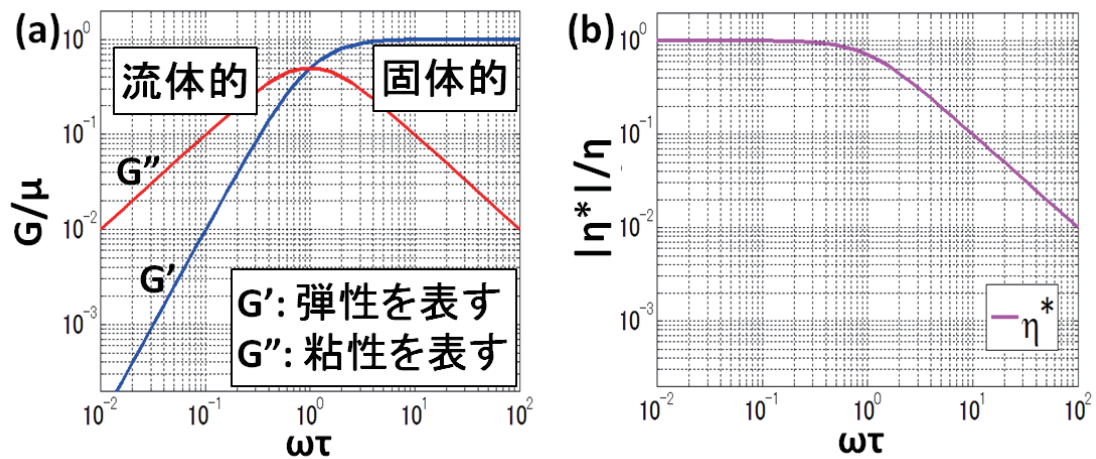


図 1: 一次元線形 Maxwell モデルの周波数と複素弾性率 (a)、および周波数と動的粘性率 (b) の関係。

一方、一定の歪速度  $\dot{\varepsilon}_s$  で変形させるクリープ試験では、定常状態の粘性率  $\eta_s$  が  $\dot{\varepsilon}_s$  の関数として得られる。緩和時間を用いて規格化した歪速度 ( $\dot{\varepsilon}_s \tau$ ) と、十分小さい歪速度に対する値  $\eta$  で規格化した粘性率 ( $\eta_s/\eta$ ) の関係が、微小振動を与えて計測した  $\omega\tau$  と  $|\eta^*|/\eta$

の関係に一致するという性質が、多くのポリマー溶液に共通に見られ、Cox-Merz 則 [3] として知られている。例えば、図1の振動応答を持つ物質に対して、 $\dot{\epsilon}_s \tau$  を横軸に、 $\eta_s/\eta$  縦軸にプロットすると、図1bと同じ曲線が得られるのである。その性質を生み出す要因として、外部から加えられる変形によってポリマー分子が変形される効果と、それがあある時定数を持って緩和することの競合として説明されているが、その性質を表現するモデルは確立されていない [4]。マグマ中の液相であるシリケートメルトも一種のポリマー溶液であり、同様の関係が成り立つことが報告されている [2,5]。そして、 $\dot{\epsilon} \tau$  の大きな値に対して、 $\eta_s$  が減少する傾向が見られる。このような性質は、シアシニングと呼ばれる。シリケートメルトについて、大きな歪速度で計測した粘性率が小さくなるのは、変形による加熱の効果であり、シアシニングは見かけのものであるという考えも出されている [6]。しかし、そうだとすると、Cox-Merz 則が成り立つことが、さらに謎になる。

シリケートメルトの粘性に見られた  $\omega \tau$  と  $\dot{\epsilon}_s \tau$  の対応から、流動するマグマは、歪速度と緩和時間の積がある閾値を超えると、弾性的に振る舞い、脆性破壊を発生すると考えられた [5,7]。それは、冷却等による粘性増加に対応して緩和時間が増加する場合だけでなく、加速によって歪速度が増加する場合も考えられる (図2) [7]。しかし、シアシニングの性質を持つ定常状態の粘性率  $\eta_s$  をそのまま用いると、粘性が低下しつつ破壊に至ると言うことになる。実際にそのようなことが起こるのか、起こるとすれば、それは脆性的な破壊になるのか、冷却等による粘性増加を伴う破壊と同じなのか異なるのか、様々な疑問が浮かぶ。その疑問を提示し、一次元線形 Maxwell モデルに基づく予察的な解析を行ったのが前報 [1] であった。

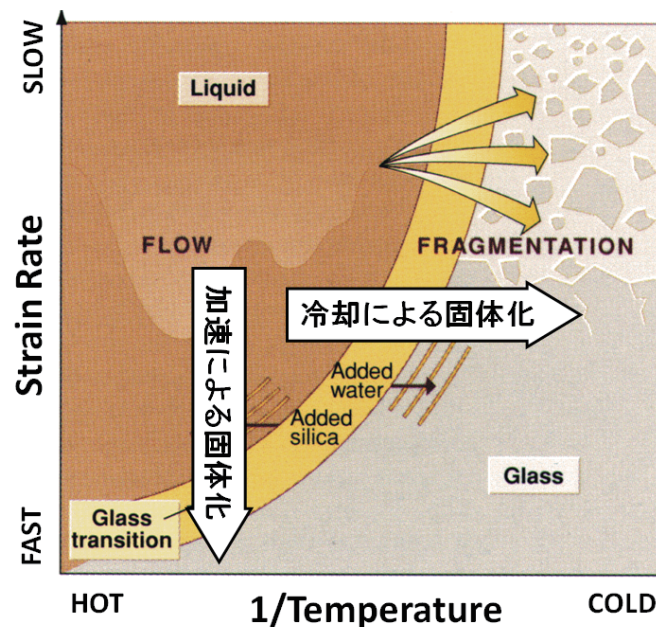


図 2: マグマの流動から破壊への遷移過程の概念。Dingwell [7] の図に加筆。

### 3 破壊の脆性度の指標

固体・流体に関わらず、粘弾性体の破壊に関する多くの研究は、静止状態から出発し、ある歪速度で変形を加えた時に流動したり破壊したりする挙動を、変形開始からの歪をパラメータとして議論している。そして、破壊までの非弾性歪が小さいほど、その破壊は脆性的であるとされる [8]。しかし、火山噴火におけるマグマの破壊のように、流動状態にある物質がある時に固体的に破壊する、という現象において、歪という量を定義することはできない。流動変形に伴う非弾性歪について、「歪ゼロ」の状態に自由度があり、絶対量を測ることができないためである。このことが、破壊という現象に対して、固体と流体を共通の言葉で議論することが難しい原因となっていた。そこで、Ichiara and Rubin [9] は、固体にも流体にも共通に適用することのできる脆性度の指標として、Brittleness ( $\beta$ ) というパラメータを提案した。ここでは、そのパラメータについて説明する。

単位体積当たりの物質に蓄積されている弾性エネルギーを  $E$ 、変形するのに外から加えられる仕事率を  $\Pi_d$ 、非弾性変形によるエネルギー散逸レートを  $D$  とおく。エネルギー保存を考えると、

$$\Pi_d - \dot{E} = D, \quad (3)$$

となる。変形が完全に弾性的であれば、散逸はないので、 $\Pi_d = \dot{E}$  となる。一方、変形が完全に粘性的であれば、弾性エネルギーは蓄積されず、 $\dot{E} = 0$  となる。このことから、まず、 $\dot{E}/\Pi_d$ 、すなわち、加えられた仕事のうちどのくらいが弾性エネルギーとして蓄積されるか、という量を用いて、脆性度が評価できないか考えた。ところが、粘弾性体の重要な挙動の一つに、応力緩和という現象があり、全体としては変形しない状態 ( $\Pi_d = 0$ ) で、弾性エネルギーが減少して行く ( $\dot{E} < 0$ )。この時、 $\dot{E}/\Pi_d \rightarrow -\infty$  となる。評価の指標に、状態によって発散するような量を用いるのは不便である。

変形の状態とその特徴を、 $\dot{E}$  と  $\Pi_d$  の平面上に表すと、図3のようになる。 $D > 0$  であるので、取りうる状態は、 $\dot{E} \leq \Pi_d$  の半無限平面に限られる。この図から、共通の特徴を持つ粘弾性変形状態が、原点から放射状に並んでいることが分かる。そこで、変形状態を特徴づけるパラメータ  $\beta$  を、それぞれの状態と原点をつなぐ直線の角度で数値化することにする。以下のように、角度ゼロの向きを適当に選び、規格化をすることにより、 $\beta$  は、 $[-1, 1]$  の範囲を取るよう定義される：

$$\beta = \frac{2}{\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\dot{E}}{\Pi_d} \right) + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4)$$

$\beta = 1$  が完全弾性载荷、 $\beta = 0.5$  が完全粘性変形、 $\beta = -0.5$  が応力緩和、 $\beta = -1$  が完全弾性応力解放と言うように、変形の状態を  $-1 \leq \beta \leq 1$  の値として表現することができる。 $\beta = 0$  は、加えた仕事率の2倍の大きさで散逸が起こっている状態であり、倍散逸 (Double Dissipation) と呼ぶことにする。仮説として、脆性破壊は、 $\beta = 1$  に近い状態で発生し、 $\beta = -1$  に近い状態を発生しつつ進行すると考えている。

具体的に  $\beta$  を計算するためには、物質内の応力、歪速度、弾性エネルギーの分布とその時間変化を知る必要がある。それらを直接計測することは難しいが、物質の構成方程式が分かっているならば、境界での計測値から内部の分布を推定することができるだろう。そのためには、適切な物質の構成方程式が必要となり、前節に述べたシヤアシニングの問題も関わってくる。

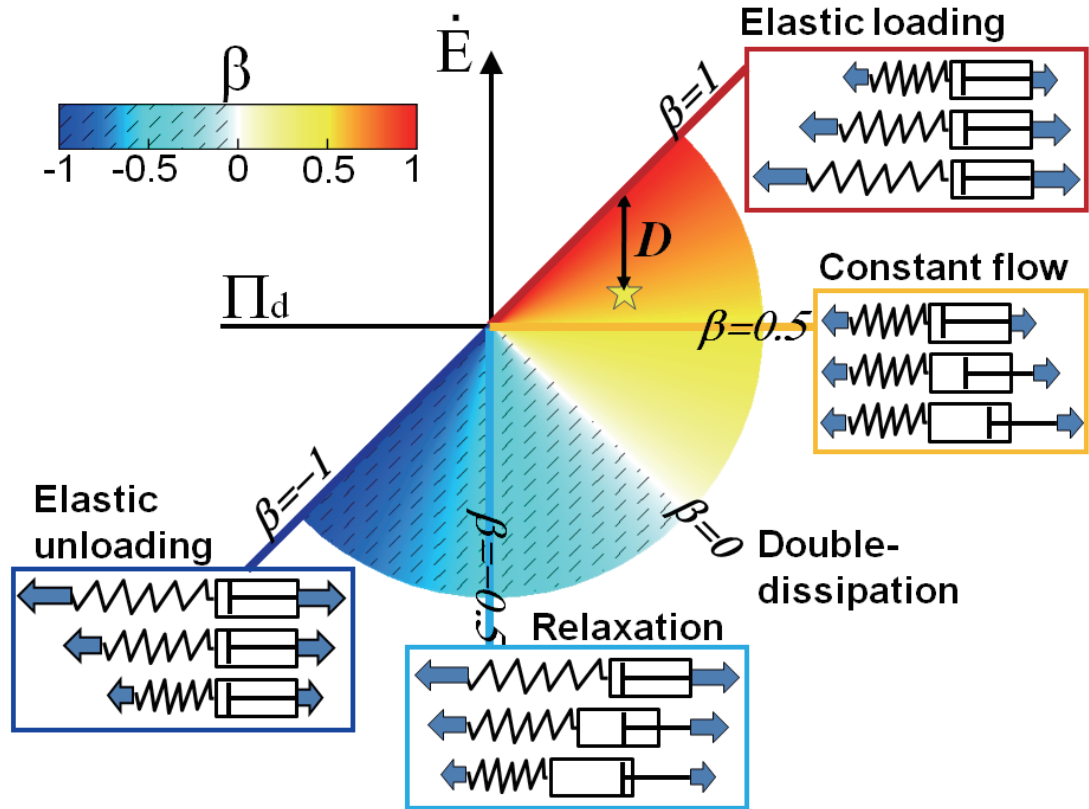


図 3: 粘弾性流体の変形状態における仕事率と弾性エネルギー変化率の関係。D は非弾性変形によるエネルギー散逸レート。変形の脆性度  $\beta$  は、各状態と原点をつなぐ直線の方角で定義される。

#### 4 マグマの非定常レオロジーのモデル化

流動から破壊への遷移過程を扱うためには、非定常かつ三次元の大変形・高歪速度に対応できる構成方程式が必要となる。簡単のため、体積変形のない場に議論を限ることとする。テンソルは成分表記とし、添え字に対してはアインシュタインの規約を用いる。

Rubin and Ichihara [10] は、弾性体の大変形で用いられる構成方程式を拡張した粘弾性流体の構成方程式 [11] を出発点として、以下の近似式を導出した。これをモデルAと

呼ぶ。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\varepsilon_{ij}^e}{\tau} = D_{ij} + L_{ik}\varepsilon_{kj}^e + \varepsilon_{ik}^e L_{kj}^T - \frac{2}{3}(\varepsilon_{lm}^e D_{lm})I_{ij}, \quad (5)$$

$$E = \mu\varepsilon_{ij}^e\varepsilon_{ij}^e, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[ \varepsilon_{ij}^e + 2\varepsilon_{ik}^e\varepsilon_{kj}^e - \frac{2}{3}(\varepsilon_{lm}^e\varepsilon_{ml}^e)I_{ij} \right]. \quad (7)$$

ここで、 $\varepsilon_{ij}^e$  は弾性歪テンソル、 $\sigma_{ij}$  は応力テンソル、 $I_{ij}$  は単位行列である。 $L_{ij}$  は速度勾配テンソルで、対称成分  $D_{ij}$  を変形速度テンソル、反対称成分  $W_{ij}$  を回転速度テンソルと呼ぶ。添え字  $T$  は転置を表す。体積変化のない場を考えているので、 $\varepsilon_{ii}^e = 0$ 、および、 $D_{ii} = 0$  である。式 (5) において、右辺第一項までは、一次元線形 Maxwell 方程式 (1) と同じ形をしている。右辺第二項以降は、有限変形による物質に張り付いた座標の伸長や回転の効果を表す。式 (5) から、 $\varepsilon_{ij}^e$  と  $D_{ij}$  を掛け合わせた項を全て無視すると、

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\varepsilon_{ij}^e}{\tau} = D_{ij} + W_{ik}\varepsilon_{kj}^e + \varepsilon_{ik}^e W_{kj}^T, \quad (8)$$

また、式 (7) から非線形項を無視して、

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}^e. \quad (9)$$

式 (8)、(9) と、弾性エネルギーの式 (6) を、モデル B と呼ぶ。

モデル A と B のいずれの場合にも、弾性エネルギーの変化率と、外から与えられる仕事率は以下ようになる。

$$\dot{E} = 2\mu\varepsilon_{ij}^e\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \sigma_{ij}D_{ij} - 2\mu\Gamma\varepsilon_{ij}^e\varepsilon_{ij}^e, \quad (10)$$

$$\Pi_d = \sigma_{ij}D_{ij}. \quad (11)$$

式 (10) と (11) を (4) に代入することにより、 $\beta$  を計算することが出来る。

式 (5) や (8) のような非線形 Maxwell 方程式において、 $L_{ij}$  や  $W_{ij}$  が入った非線形項の形については、様々なものが提案されている [4]。この項は、歪速度のオーダーを持っており、歪速度が  $\tau^{-1}$  に近づくかそれ以上になると、左辺第二項に対して無視できなくなる。つまり、破壊が発生する条件と考えられているような大きな歪速度の現象を扱うためには、この非線形項を適切にモデル化する必要がある。Rubin and Ichihara [10] は、固体力学の構成方程式から出発したモデルを用いたため、変形勾配テンソルの時間微分から自然に出て来た項の近似形として式 (5) や (8) が得られた。しかし、ポリマー流体の場合は、それだけでは物質の性質を十分に表現できず、ミクロな構成物（ポリマー分子や懸濁粒子）の変形や移動と媒質流体の相互作用を考慮しなければならないことが指摘されている [4]。マグマやシリケートメルトに対しては、そのようなモデルを構築するための十分な物性試験が行われていない。そこで、本稿では、モデル A および B を用いて、非定常な変形場における応力や  $\beta$  を計算し、非線形項の適切なモデル化の必要性を示したい。

速度勾配テンソルが以下の式で表される単純せん断の場合を考える。 $f$ が、 $\tau^{-1}$ で規格化された歪速度 ( $\dot{\varepsilon}\tau$ ) に相当する。

$$L = \frac{f}{\tau} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{f}{\tau} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \frac{f}{\tau} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

式(12)をモデルAの(5)に代入して、弾性歪のテンソルの各成分に対して以下の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tau \dot{\varepsilon}_{11}^e &= -\varepsilon_{11}^e - \frac{2}{3}f\varepsilon_{12}^e \\ \tau \dot{\varepsilon}_{12}^e &= -\varepsilon_{12}^e + f\varepsilon_{11}^e + \frac{f}{2} \\ \varepsilon_{22}^e &= -2\varepsilon_{11}^e = -2\varepsilon_{33}^e \\ \varepsilon_{13}^e &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(13)の定常解は以下のようになる。

$$\varepsilon_{12}^e = \frac{\frac{f}{2}}{1 + \frac{2}{3}f^2}, \quad \varepsilon_{11}^e = \varepsilon_{33}^e = -\frac{1}{2}\varepsilon_{22}^e = -\frac{\frac{f^2}{3}}{1 + \frac{2}{3}f^2}. \quad (14)$$

一方、モデルBの(8)を用いると。

$$\left. \begin{aligned} \tau \dot{\varepsilon}_{11}^e &= -\varepsilon_{11}^e - f\varepsilon_{12}^e = -\tau \dot{\varepsilon}_{22}^e \\ \tau \dot{\varepsilon}_{12}^e &= -\varepsilon_{12}^e + f\varepsilon_{11}^e + \frac{f}{2} \\ \varepsilon_{13}^e &= \varepsilon_{23}^e = \varepsilon_{33}^e = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

定常解は以下のようになる。

$$\varepsilon_{12}^e = \frac{\frac{f}{2}}{1 + f^2}, \quad \varepsilon_{11}^e = -\varepsilon_{22}^e = -\frac{\frac{f^2}{3}}{1 + f^2}. \quad (16)$$

定常解として得られた、式(14)と(16)を見ると、弾性歪のせん断成分  $\varepsilon_{12}^e$  が、 $f$ の大きいところで  $f$ とともに小さくなるのが分かる。実際、式(14)と(16)を、それぞれ、式(7)と(9)に代入して対応する  $\sigma_{12}$  を計算し、 $\eta_{12} = \sigma_{12}\tau/f$  を実効粘性率とすると、シアニングの傾向は表現されている。

同じく、式(12)の変形速度場を仮定し、 $f$ の時間変化を図4のように与える。これに対して、モデルAを計算する。得られた解を用いて、実効粘性率  $\eta_{12}/\eta$ 、せん断応力  $\sigma_{12}/\mu$ 、および、脆性度  $\beta$  を計算すると、図4aのようになる。一方、同じ変形速度場に対して、モデルBを用いると、図4bが得られる。与えられた歪速度の大きさによる応答の違いが、二つのモデルで異なっており、両者の違いは、 $f > 1$ 、すなわち、歪速度が  $\tau^{-1}$  より大きくなると顕著になることがわかる。いずれのモデルでも、歪速度が大きい領域では、粘性率の低下が見られるが、初期には、やや大きくなる。このとき、応力にはオーバーシュートが見られる。応力が増加するところでは、脆性度には歪速度依存性があまり見られない。

応力のオーバーシュートは、シアニングをする流体が脆性破壊を起こす重要な要因と考えおり、前報[1]では、粘性低下の時間遅れがそれを生み出すのではないかと提案し

た。今回のモデルでは、そのような時間遅れは含まれていないが、Maxwellモデルの非線形項から同じような振る舞いが得られることが分かった。しかし、モデルによってその挙動は異なり、また、今回用いたモデルは、歪速度が $\tau^{-1}$ より大きくなるような領域での信頼性は保証されていない。非定常、大変形、高歪速度を含むマグマの変形試験を行い、モデルを確立する必要がある。

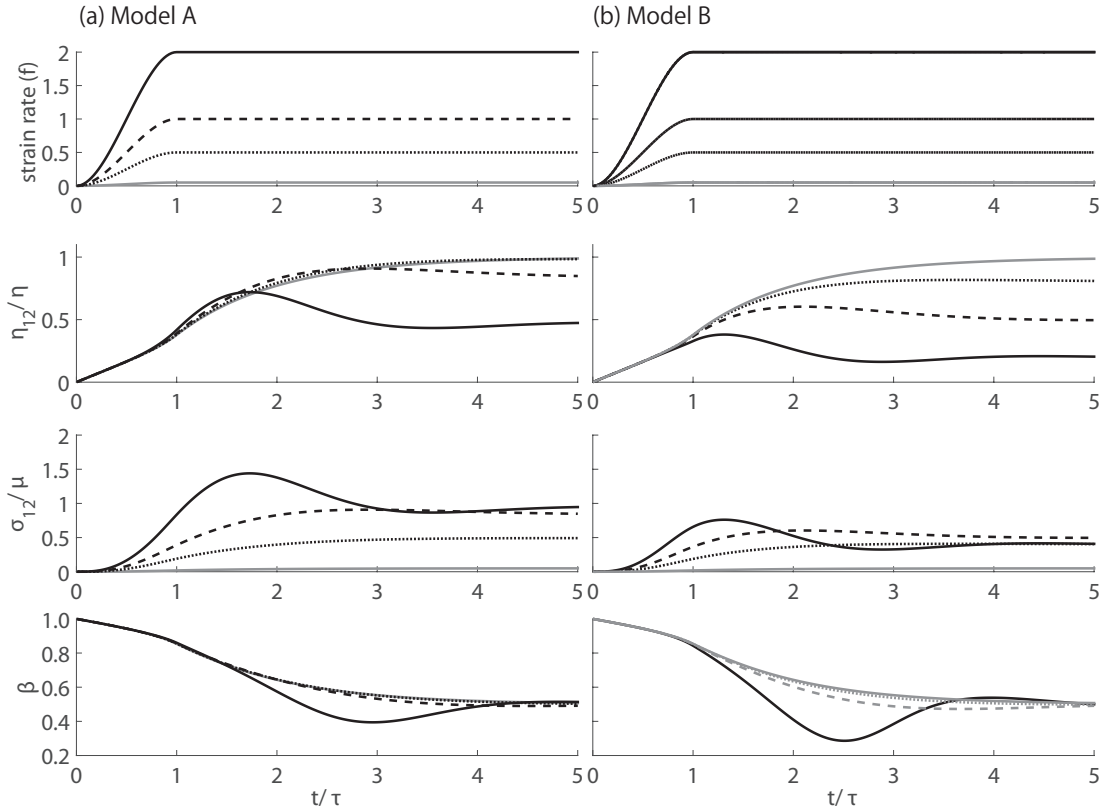


図 4: 非定常な歪速度を与えた時の、モデルAの応答 (a) と、モデルBの応答 (b)。 $\tau^{-1}$  で規格化した歪速度 ( $f$ ) の振幅は、0.05 (灰色)、0.5 (点線)、1 (破線)、2 (実線)。対応する解は、同じ線種で表示している。

## 5 おわりに

火山噴火におけるマグマのダイナミクスをモデル化する上で、マグマのレオロジーについて多くの課題が残されている。これを解決していくためには、マグマの物性試験や噴火のモデリングだけでなく、ソフトマター物理学等、広い分野の知見が必要である。本講義をきっかけとして、物性科学分野の若手の皆様がマグマや火山に興味を持って頂ければ、大変うれしく思う。



## 謝辞

本研究は、JSPS 科研費 16H04039、および、東京大学地震研究所共同利用 2017B01 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- 1) 市原美恵、物性研究 **88** (2007), 234.
- 2) S. L. Webb, Rev. Geophys. **35** (1997), 191.
- 3) W. P. Cox and E. H. Merz, J. Polym. Sci. **28** (1958), 619.
- 4) P. Oswald, Rheophysics, (Cambridge University Press, New York, 2009).
- 5) S. L. Webb and D. B. Dingwell, Phys. Chem. Minerals **17** (1990), 125.
- 6) B. Cordonnier, S. M. Schmalholz, K.-U. Hess, and D. B. Dingwell, J. Geophys. Res. **117** (2012), doi:10.1029/2010JB007982.
- 7) D. B. Dingwell, Science **273** (1996), 1054.
- 8) F. A. McClintock and A. S. Argon, Mechanical Behavior of Materials, (Addison-Wesley, Reading, Mass.1966).
- 9) M. Ichihara and M. B. Rubin, J. Geophys. Res. **115** (2010), doi:10.1029/2010JB007820.
- 10) M. B. Rubin and M. Ichihara, Int. J. Engineering Sci. **48** (2010), 1534.
- 11) C. Eckart, Phys. Rev. **73** (1948) 373.