

## 動径基底函数を用いた球面螺旋浅水波モデル

### A Shallow-Water Model on Spherical Helix Nodes Using Radial Basis Functions

榎本剛

Takeshi ENOMOTO

#### Synopsis

A shallow-water model on the sphere on spherical helix nodes has been developed using radial basis functions. A simple non-iterative algorithm is available to generate quasi-uniform nodes along a spherical helix on the sphere. The proposed model is verified with the experiments for steady state nonlinear geostrophic flows and for the zonal flow over an isolated mountain from the standard test suite. The model on the spherical helix nodes is found to be as accurate as that on the minimum energy nodes used in the previous studies. In the steady-state tests, the spherical helix model often outperformed the minimum energy model. In the more realistic test cases, the differences are obscure. The shallow-water model using radial basis functions on spherical helix nodes is a viable approach because of efficient node generation and spectral accuracy.

**キーワード:**力学コア, 準一様節点, デカルト座標

**Keywords:** dynamical core, quasi-homogeneous node, Cartesian co-ordinate

#### 1. はじめに

時間刻み幅は最小の格子間隔で決まるので, なるべく一様な格子間隔となるように点を配置することが望ましい. しかしながら, 球面で準一様に点を配置する方法は, 21世紀に残された数学の問題の一つ (Smale, 1998) で, 様々なアルゴリズムが提案されている. 例えば, 球面上に配置された電荷が最小エネルギーをとなる状態を求める (Thomson問題) 方法や正多面体の面を再分割する方法が提案されている. これらの手法は, 準一様な分布を得るために反復法が必要である. 反復を要さない単純で高速な方法として, 球面螺旋を用いたアルゴリズムが提案されている (Rakhmanov et al., 1994; Chukkapalli et al., 1999; Bauer, 2000) .

準一様に配置された点は, 緯度経度のような格子構造を持たないので, 以下「格子点」ではなく「節点」と称することにする. 正多面体の再分割では, 三角形要素が得られる. 最小エネルギー節点や球面

螺旋節点においても, Delaunay三角例分割を行うことで三角形要素を得ることができ, 差分法や有限要素法の適用が可能である. Chukkapalli et al. (1999)は球面螺旋節点から得られる三角形要素に有限要素法を適用すること提案している (実装や結果は示されていない) .

これに変わるメッシュレス計算手法として, 動径基底函数 (Radial Basis Functions, RBF, 放射基底函数) を用いた手法が提案されている. 最小エネルギー節点を用い, Flyer and Wright (2007) は球面2次元移流モデル, Flyer and Wright (2009)は球面浅水波モデルを構築した.

本研究では, 球面螺旋節点を浅水波モデル (Flyer and Wright, 2009) に適用し, 標準実験 (Williamson et al., 1992) により先行研究で用いられた最小エネルギー節点と比較検証する. 本稿の構成は次のとおりである. まず, 第2節に, 球面螺旋に基づく準一様節点生成手法を示す. 第3節にRBFを用いた手法について述べる. 第4節では浅水波モデルを記述し, 第5節に

標準実験の結果を示す。第6節では、この研究をまとめ、計算量の削減や大規模計算を念頭に並列化について議論するとともに、RBFの応用についても触れる。

## 2. 球面螺旋

球面螺旋 (Fig. 1) はRakhmanov et al. (1994)が最小対数エネルギー節点の近似として提案し, generalized spiral pointsと名付けた。詳細は割愛するが, 数学的に等価なものが Chukkapalli et al. (1999)と Bauer (2000) によって提案されている。星図への応用を念頭にしたBauer (2000) の定式化が簡明であるので, これを示す。

球面螺旋は, 北極と南極とを一本の線で結んだ以下の螺旋方程式で表される。

$$\lambda = m\theta \bmod 2\pi \quad (1)$$

ここで $\lambda$ は経度,  $\theta$ は(北極から測った)余緯度で $m = d\lambda/d\theta$ は螺旋の勾配を表す。この勾配の取り方には任意性がある。

Bauer (2000)は隣り合う節点の間隔と巻きの間隔が等しくなるように $m$ を定めた。節点数 $n$ が大きいとき, 螺旋の全長は $L \approx 2m$ となるので, 隣り合う節点間の長さは $\Delta s \approx 2m/n$ である。螺旋が一周する間に経度は $2\pi$ の増加するので, 螺旋方程式(1)より, 余緯度 $\Delta\theta = 2\pi/m$ 増加する。 $\Delta\theta = \Delta s$ より

$$m = \sqrt{n\pi} \quad (2)$$

が得られる。

$\Delta s$ をほぼ一定にするには, 回転軸方向に一樣に

$$z_k = 1 - \frac{2k-1}{n} = \cos \theta_k, k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

と取ればよい。この節点配置には極を含まない。極を含めることもできるが, 極付近で一樣性がやや悪化する。

節点数 $n$ が決まれば, 球面螺旋は式(1)~(3)により反復計算なしに得られる。

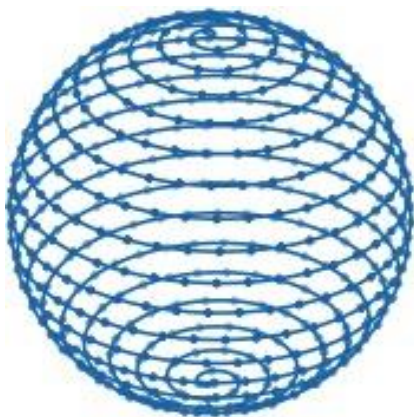


Fig. 1 Spherical helix nodes  $n = 529$

## 3. 動径基底函数

動径基底函数 (RBF) は節点からの距離 $r$ のみに依存する函数 $\phi(r)$ であり, 区分的に滑らかなもの (Fig. 2a) と無限回微分可能なもの (Fig. 2b) とに大別される。 $\varepsilon$ は形状パラメタ (shape parameter) と呼ばれ, 距離に対する振幅の局所性を規定する。ガウス型RBFの場合についてFig. 3に示す。

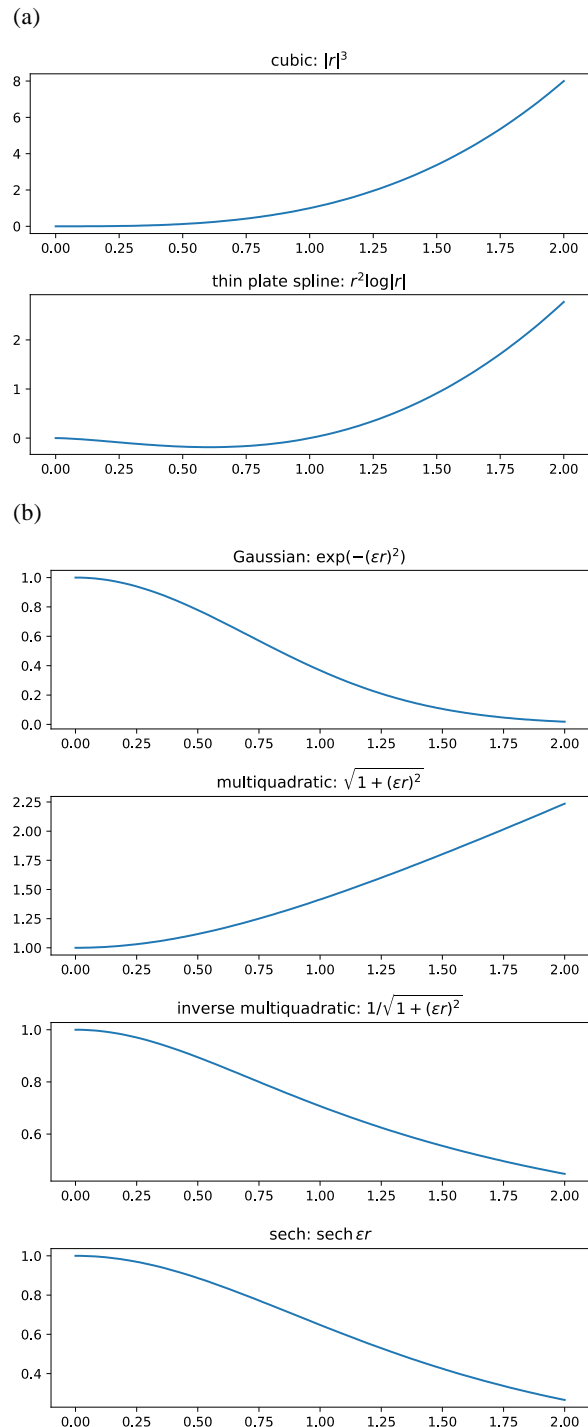


Fig. 2 (a) Piecewise smooth RBFs (b) Infinitely smooth RBFs with  $\varepsilon = 1$

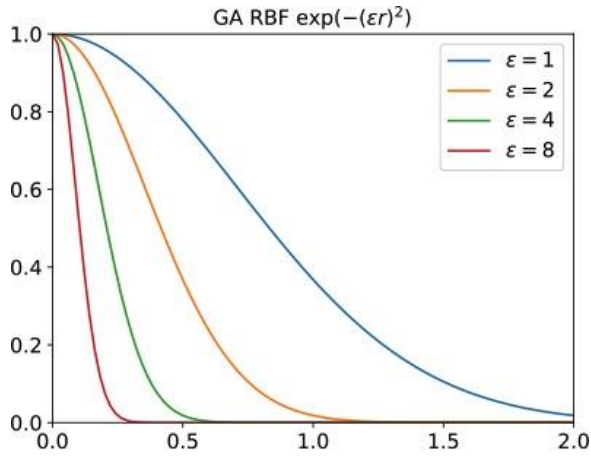


Fig. 3 Gaussian RBF with  $\epsilon = 1, 2, 4, 8$

$n$ 個の節点 $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$ においてスカラー函数 $f(\mathbf{x})$ の値 $\{f_j\}_{j=1}^n$ が得られているとする．ここで座標を表す長さ $n$ のベクトルである．任意の点 $\mathbf{x}$ における内挿値はRBF $\phi(r)$ を用いると次のように表すことができる．

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \phi(r_j), r_j \equiv \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \quad (4)$$

展開係数 $\{c_j\}_{j=1}^n$ を求めるには、選点法を用いる．節点において残差が0となる ( $\underline{f} = s(\underline{\mathbf{x}})$ ) 条件を行列形式で表すと次のようになる．

$$A\underline{c} = \underline{f} \quad (5)$$

ここで $A$ を内挿行列と呼び、その要素はRBFで $A_{j,k} = \phi(r_{j,k}), r_{j,k} \equiv \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|$ である．式(5)から展開係数を求めることができる．

$$\underline{c} = A^{-1}\underline{f} \quad (6)$$

2次元平面でのRBFの概念図をFig. 4に示す．曲面上で値の標本化を行い、標本をとった節点においてRBFを考える．節点以外での値は、RBFと展開係数から内挿して求める．

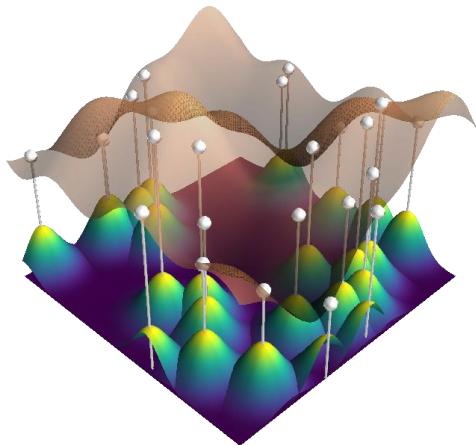


Fig. 4 Schematic illustration of 2D RBF interpolation

#### 4. 浅水波モデル

浅水波方程式は、波長と比較して深さが十分浅く流速が一定とみなせるとき水面波を記述するもので、津波や火砕流 (Shimizu et al., 2017) のシミュレーションに適用されている．気象学においても、浅水波方程式は熱帯における熱源に対する大気の定常応答の理論解を得るために用いられる (Gill, 1980)．また、球面上の浅水波モデルは、大気大循環モデルのプロトタイプとされている．

ここでは、ベクトル量である風を緯度経度で表現すると極で特異性を持つことから、3次元デカルト座標での浅水波方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - f(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) - g \nabla h + \mu \mathbf{x} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h \mathbf{u}) \quad (7b)$$

を用いる．太字はデカルト座標の3成分からなるベクトルを表す．

位置ベクトル $\mathbf{x}$ は単位球面 ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) 上にとり、距離はデカルト距離

$$r_{j,k} = \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2} \\ = \sqrt{2(1 - \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k)} \quad (8)$$

を用いる．

球面上のベクトルは球面に接しているので、運動方程式におけるベクトルに対する微分演算子を球面に投影する必要がある．任意のベクトル $\mathbf{v}$ の単位球面上の位置ベクトル $\mathbf{x}$ に鉛直な成分は $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x}$ なので、接平面成分は $\mathbf{v} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x}$ である．従って $3 \times 3$ 行列

$$P \equiv I - \mathbf{x}\mathbf{x}^T \quad (9)$$

を $\nabla$ に左から作用させた $P\nabla$ が球面上の微分演算子である． $\mu$ はLagrangeの未定乗数で運動方程式の時間変化傾向 $\partial \mathbf{u} / \partial t$ が球面に接するように定める (Côté, 1988)．オイラー移流の場合は、 $\mathbf{x} \cdot \partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ より

$$\mu = \mathbf{x} \cdot \{(\mathbf{u} \cdot P\nabla) \mathbf{u}\} \quad (10)$$

となる．これは

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = P\{- (\mathbf{u} \cdot P\nabla) \mathbf{u} - f(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) - g \nabla h\} \quad (11)$$

と等価である．

式(4)を微分し球面に投影し式(6)を用いると、 $x$ 方向の微分演算子は $D^x = B^x A^{-1} / a$  ( $a$ は地球半径)と表すことができる．ここで $B^x$ の要素は

$$B_{j,k}^x = [x_j \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k - x_k] \frac{\phi'_k(r(\mathbf{x}_j))}{r(\mathbf{x}_j)} \quad (12)$$

で与えられる． $y, z$ についても同様に $D^y = B^y A^{-1} / a, D^z = B^z A^{-1} / a$ であり、

$$B_{j,k}^y = [y_j \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k - y_k] \frac{\phi'_k(r(\mathbf{x}_j))}{r(\mathbf{x}_j)} \quad (13)$$

$$B_{j,k}^z = [z_j \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k - z_k] \frac{\phi'_k(r(\mathbf{x}_j))}{r(\mathbf{x}_j)} \quad (14)$$

で与えられる．結局離散化形は

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix} = -P \left\{ \begin{bmatrix} \underline{u} \circ D^x \underline{u} + \underline{v} \circ D^y \underline{u} + \underline{w} \circ D^z \underline{u} \\ \underline{u} \circ D^x \underline{v} + \underline{v} \circ D^y \underline{v} + \underline{w} \circ D^z \underline{v} \\ \underline{u} \circ D^x \underline{w} + \underline{v} \circ D^y \underline{w} + \underline{w} \circ D^z \underline{w} \end{bmatrix} \right. \\ \left. + f \begin{bmatrix} \underline{y} \circ \underline{w} - \underline{z} \circ \underline{v} \\ \underline{z} \circ \underline{u} - \underline{x} \circ \underline{w} \\ \underline{x} \circ \underline{v} - \underline{y} \circ \underline{u} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} D^x \underline{h} \\ D^y \underline{h} \\ D^z \underline{h} \end{bmatrix} \right\} \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{h} = -\{\underline{u} \circ D^x \underline{h} + \underline{v} \circ D^y \underline{h} + \underline{w} \circ D^z \underline{h} \\ + \underline{h} \circ (D^x \underline{u} + D^y \underline{v} + D^z \underline{w})\} \quad (16)$$

となる．ここで $\circ$ はHadamard積（要素毎の積）を表す．

$D^x, D^y, D^z$ は節点とRBFで決まるので，時間積分の前にあらかじめ計算しておくことができる．

## 5. 標準実験

本節では浅水波モデルの動作を確認するため，標準実験 (Williamson et al. 1992) により検証を行った．RBFは多重二乗 (Multiquadratic)

$$\phi(r) = \sqrt{1 + (\epsilon r)^2} \quad (17)$$

を用い，時間積分は4次のルンゲクッタ法を用いた．

### 5.1 定常非線型地衡流

定常非線型地衡流の実験は，回転軸を90度転倒した剛体回転 (case 2) や，回転軸を60度転倒したジェットのある地衡流 (case 3) を初期に与え，5日間の時間積分を行い，定常場を維持できるか調べる．時刻幅は $\Delta t = 24$ 分である．形状パラメタ $\epsilon$ は，何例か実験を行い，誤差が最も小さくなったものを採用した．

$$\ell_2 \equiv \frac{\sum_j^n \{w_j(h - h_T)\}^2}{\sum_j^n (w_j h_T)^2} \quad (18)$$

ここで $h_T$ は真値を表す．定常問題では初期値に等しい ( $h_T = h_0$ )．球面上の積分は，節点の重み付きの和で表す．重みは内挿行列の逆を用いて

$$\underline{w} = 4\pi \frac{\mathbf{A}^{-1} \underline{e}}{\underline{e}^T \mathbf{A}^{-1} \underline{e}} \quad (19)$$

で求めることができる．ここで， $\underline{e}$ は全ての要素が1である長さ $n$ のベクトルである．

どちらの実験でも，両節点の誤差のオーダーは同程度であり，積分終了時における球面螺旋節点 (SH) の誤差は最小エネルギー節点 (ME) の5~6割程度である (Table 1)．誤差の時間発展 (Fig. 5) を見ると，MEがゆっくりと大きく変動しているのに対し，SHは速く小さく変動している．この差異が節点の配置に起因するのかは，明らかではない．

Table 1 Relative error  $\ell_2$  norm of height in the steady state experiments (case 2 and 3) for  $n = 1849$  at the end of integration (120 h). ME and SH signify minimum energy and spherical helix, respectively.

case	node	$\epsilon$	$\ell_2 \times 10^{-8}$
2	ME	4	0.421
2	SH	4	0.199
3	ME	3.25	4.97
3	SH	3	2.97

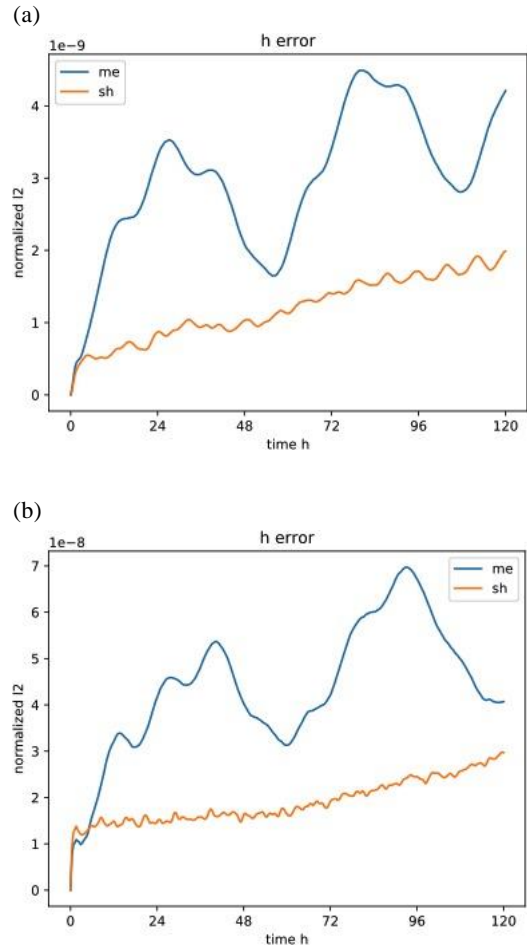


Fig. 5 Relative error  $\ell_2$  norm of height in the steady state experiments (case 2 and 3) for  $n = 1849$ .

## 5.2 孤立峰を越える流れ

この実験では、中緯度 (30°N) に山を配置し、case 2の剛体回転を与える。解析解は存在しないので切断波数213のスペクトルモデルで計算し切断波数106で打ち切った参照解 (Jakob et al., 1993) を真値 $h_T$ と見なす。

積分終了時 ( $t = 15$ 日) における誤差は、MEが  $8.46 \times 10^{-4}$ 、SHが  $8.40 \times 10^{-4}$  とほぼ同じで時間発展もよく似ていたため、MEは省略しSHの誤差を示す (Fig. 6)。初期時刻から積分期間を通じて山岳の周辺に参照解との差が見られる。重力波の制御をしていないため、重力波が行き交うものの、数値粘性を持ちなくてもcase 2及び3同様  $\Delta t = 24$ 分 で安定して15日間の積分ができた。

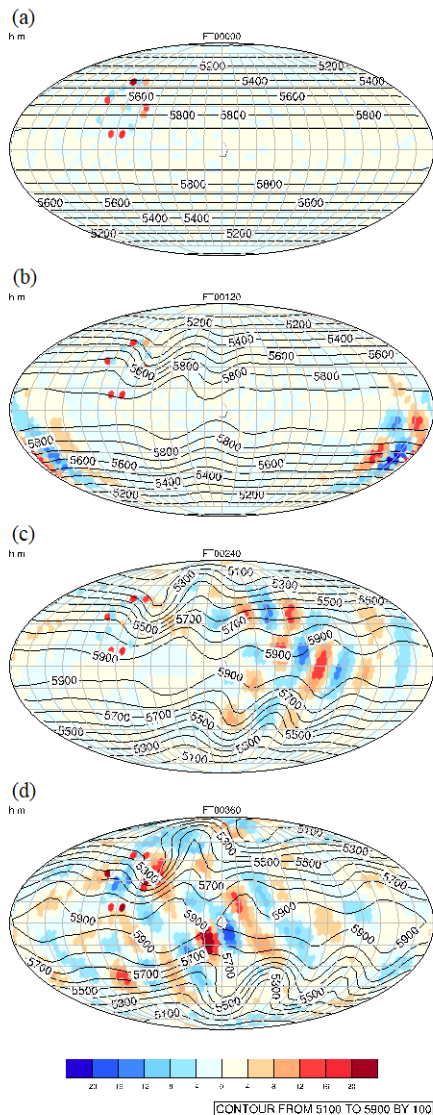


Fig. 6 Distribution of relative error  $\ell_2$  norm of height in the zonal flow over an isolated mountain (case 5) for  $n = 1849$  using spherical helix nodes (SH). Panels (a)–(d) show error at  $t = 0, 5, 10,$  and 15 days, respectively.

## 6. まとめ

節点からの距離のみに依存する動径基底函数 (RBF) を基底として変数を展開する離散化に基づく浅水波モデルを構築し、標準実験で検証した。節点として容易に高い一様性が得られる球面螺旋を採用した。球面螺旋節点でも、最小エネルギー節点と遜色ない結果が得られた。定常非線型地衡流実験では、球面螺旋節点を用いた場合の誤差は最小エネルギー節点用いた場合の半分程度であった。より現実的な孤立峰を越える流れに対しては、球面螺旋節点の優位性は不明瞭であった。

本稿では、節点数  $n = 1849$  の場合について示したが、節点数を変えて収束性を調べる必要がある。動径基底函数は、形状パラメタに任意性がある。小さくするほどならかになりスペクトル法に漸近し精度が向上する反面、内挿行列Aが悪条件になる。これを回避するには、より安定的なアルゴリズムを採用する必要がある (Fornberg and Piret, 2007)。

計算量は行列ベクトル積  $O(n^2)$  に比例して増大する。近傍の点で内挿行列を構成するRBF-FD (Fornberg and Lehto, 2011) を用いれば、微分演算子は疎行列となり計算量の削減が可能である。並列化は、行列の行方向に対する分割が可能である。全ての節点値が必要となるので、ノード間に分散させる場合は、全対全の通信を必要とする。

本稿ではRBFを球面上の準一様節点に対して適用したが、格子構造を必要としないメッシュレス法の一つであるため、複雑形状や局所細密化への応用が考えられる。

## 謝 辞

本研究はJSPS科研費JP15K13417及び文部科学省ポスト「京」萌芽的課題3「太陽系外惑星(第二の地球)の誕生と太陽系内惑星環境変動の解明」の助成を受けた。

## 参考文献

- Bauer, R. (2000): Distribution of points on a sphere with application to star catalogs, *J. Guid. Control Dyn.* Vol. 23, No. 1, pp. 130–137.
- Chukkapalli, G., S. R. Karpik and C. R. Ethier (1999): A scheme for generating unstructured grids on spheres with application to parallel computation, *J. Comput. Phys.*, Vol. 149, No. 1, pp. 114–127.
- Côté, J. and A. Staniforth (1988): A two-time-level semi-Lagrangian semi-implicit scheme for spectral

- models, Vol. 116, No. 10, pp. 2003–2012.
- Flyer, N. and G. B. Wright (2007): Transport schemes on a sphere using radial basis functions, *J. Comput. Phys.*, Vol. 226, No. 1, pp. 1059–1084.
- Flyer, N. and G. B. Wright (2009): A radial basis function method for the shallow water equation on a sphere, *Proc. Roy. Soc. A.*, Vol. 465, No. 2106, pp. 1949–1976.
- Fornberg, B. and C. Piret (2008): A stable algorithm for flat radial basis functions on a sphere. *SIAM J. Sci. Comput.* Vol. 30, No. 1, pp. 60–80.
- Fornberg, B. and E. Lehto (2011): Stabilization of RBF-generated finite difference methods for convective PDEs. *J. Comput. Phys.*, Vol. 230, No. 6, pp. 2270–2285.
- Gill, A. E. (1980): Some simple solutions for heat-induced tropical circulation, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol 106, No. 449, pp. 447–462.
- Jakob R., J. Hack and D. J Williamson (1993): Solutions to the shallow water test set using the spectral transform method, NCAR/TN-33+STR, National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO, USA, 83 pp.
- Rakhmanov, E. A., E. B. Saff and Y. M. Zhou (1994): Minimal discrete energy on the sphere, *Math. Res. Lett.* Vol. 1, No. 6, pp. 647–662.
- Shimizu, H. and T. Koyaguchi, Y.J. Suzuki (2017): A numerical shallow-water model for gravity currents for a wide range of density differences, *Prog. Earth Planet. Sci.*, Vol. 4, No. 8, 13 pp.
- Smale, S. (1998): Mathematical problems for the next century, *Math. Intelligencer*, Vol. 20, No. 2, pp. 7–15.
- Williamson, D. L., J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, and P. N. Swarztrauber (1992): A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry, *J. Comput. Phys.*, Vol. 102, No. 1, pp. 211–224.

(論文受理日 : 2018年6月13日)