（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	Prashant
論文題目	Global Attractor for mKdV Equation on 1D Torus		

（論文内容の要旨）

最近の非線型分散型方程式研究の発展により，エネルギー空間（即ち，Sobolev 空間 H^1）より広い関数空間において，初期値問題の時間大域解の存在が示されるようになった．その一方で，解の大域的挙動はエネルギーを用いて解析されることが多く，エネルギー空間に属さない解の時間大域挙動の研究は重要な問題として残っている．Prashant 氏は，1 次元トーラス上（即ち，周期境界条件の下で）の弱散逸項と外力が付いた修正 KdV 方程式に対し，グローバル・アトラクターの存在を研究した．KdV 方程式とともに修正 KdV 方程式は完全可積分系であり，Miura 変換により互いに解が移り合うため，従来 KdV 方程式の研究が修正 KdV 方程式の研究にほぼそのまま移植できることが多かった．しかし，弱散逸項と外力が付加されると完全か積分性が壊れ，Miura 変換も有効でなくなる．KdV 方程式は非線形項が 2 次であるため評価がしやすく，弱散逸項と外力が付加された場合のグローバル・アトラクターの存在についても多くの先行研究があった．それに対し，修正 KdV 方程式は 3 次の非線形項であるため評価の方法が KdV 方程式の場合とは異なることから，先行研究はほとんどなかったと言って良い．

Prashant 氏は，Sobolev 空間 H^s $(1 > s > 11/12)$ において，修正 KdV 方程式のグローバル・アトラクターが存在することを証明した．本来は $1 > s \geq 1/2$ の条件の下で証明されると予想されるが，研究の第一歩としては高い評価を受けている．Prashant 氏の証明方法は，Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka and Tao (2003) による I-method を直接修正 KdV 方程式に適用するものである．I-method は解をスケーリングして適用するるため，スケーリングパラメータに依存しない解のア・プリオリ評価を証明することが重要となる．修正 KdV 方程式の場合，$u(x,t)$ を修正 KdV 方程式の解とすると，$\lambda > 0$ に対し $v(x,t) = \lambda^{-1}u(\lambda^{-3}t, \lambda^{-3}t)$ とおけば，関数 v もまた修正 KdV 方程式の解となる．I-method はスケーリングパラメータを時間に依存させてうまく選ぶことにより，エネルギー空間より広い関数空間における解のア・プリオリ評価を与えてくれる．修正 KdV 方程式は 3 次非線形性を持つため，2 次非線形性の KdV 方程式とは共鳴周波数の構造が全く異なる．そのため，修正 KdV 方程式独自の 3 次非線形性に対するア・プリオリ評価を，スケーリングパラメータ λ に依存しない，あるいは依存性が十分小さくなるような形で証明する必要がある．Prashant 氏は，その困難を克服し証明を完成させることに成功した．

（ 続紙 2 ）

（論文審査の結果の要旨）

修正 KdV 方程式のような多くの非線型分散型方程式はハミルトン系としての構造を持ち，エネルギー空間はハミルトニアンが意味を持つ最も広い空間である．特に，解の時間大域挙動を調べるときに，ハミルトニアン（即ち，エネルギー汎関数）は重要な役割を果たしてきた．ハミルトニアンが意味を持たないような広い関数空間に属する解の時間大域挙動はどのようなものとなるか，という問題は現在盛んに研究されている．Prashant 氏は，弱散逸項と外力付き修正 KdV 方程式に対してこの問題を研究し，Sobolev 空間 H^s $(1 > s > 11/12)$ においてはグローバル・アトラクターが存在し，エネルギー空間に属する解と同じ大域挙動をすることを証明した．この結果は，H^s $(1 > s \geq 1/2)$ で成立すると予想されているため完全に問題を解決したとは言えないが，この方面の研究の第一歩として高く評価されている．

修正 KdV 方程式は 3 次非線形性を持つため，先行研究の KdV 方程式に対する証明方法とは別の工夫が必要であった．特に，共鳴周波数構造とスケーリングパラメータ依存性は，KdV 方程式と全く異なるため，KdV 方程式を扱った先行研究との大きな相違点となっている．本学位論文において，Prashant 氏は，修正 KdV 方程式独自の共鳴周波数構造を明らかにするとともに，解のア・プリオリ評価のスケーリングパラメータ依存性を精密に調べることにより，エネルギー空間より広い関数空間でグローバル・アトラクターの存在定理を証明することに成功した．Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka and Tao によって開発された I-method は強力な方法であるが，高次線形形式評価とスケーリングが重要な役割を果たす．弱散逸項と外力付き KdV 方程式に対しては，これらの問題は Tsugawa (2004) と X.-Y. Yang (2011) によってほぼ解明されたが，3 次非線形性を持つ修正 KdV 方程式に対しては未解決問題として残っていた．Prashant 氏の研究により，修正 KdV 方程式は KdV 方程式と異なる構造を持っており，独自の研究が必要であることが明らかとなったことも当該分野における大きな貢献であると言ってよい．

以上より，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．また，論文内容とそれに関連した事項について平成 30 年 8 月 3 日に試問を行った結果，合格と認めた．

要旨公開可能日：　　年　　月