論　文

離散化双線形モデルに基づくブーストコンバータ出力電圧の積分補償付非線形制御—I —モデル化と同定*

後藤　良介†・蛯原　義雄†・萩原　朋道†

Nonlinear Control with Integral Compensation for Output Voltage of Boost Converters Based on Discretized Bilinear Model—I —Modeling and Identification*

Ryosuke GOTO†, Yoshio EBIHARA† and Tomomichi HAGIWARA†

The ultimate subject of the present study is concerned with the design of a nonlinear control law with integral compensation for the output voltage of boost converters through the use of their discretized bilinear model. In this first part of the study, we begin with a discretized model of boost converters obtained by rigorously taking account of the switching action in the converters. Since the control input, the duty cycle, is involved in this model in a highly nonlinear fashion, however, designing a discrete-time control law with this model is rather unrealistic. To circumvent this difficulty, we approximate the discretized model and introduce a simplified model, a discretized bilinear model, and discuss its favorable property. We further give a method for experimentally determining the discretized bilinear model through system identification. With an experiment on identifying an actual boost converter, we then discuss the effectiveness of the discretized bilinear model and its identification method. The resulting model will be used for discrete-time control law design to verify effectiveness of the overall scheme of the present study in an accompanying paper.

1. はじめに

ブーストコンバータ [1–3] は直流電圧を昇圧できるパワーエレクトロニクス機器の一種であり，同じくスイッチング素子を利用した各種コンバータ [1–4] と同様，その構成が簡単であることからさまざまな電気製品で利用されている．コンバータの出力電圧制御 [5–7] は，そのような製品の信頼性を高めるうえで非常に重要な課題となる．コンバータに対する制御則を設計するに際して，スイッチング素子の振舞いをいかに記述してモデル化するかは重要である．しかし，スイッチング素子の動作に則してその振舞いを厳密に記述する考え方はこれまで，とくにコンバータの制御を考えるうえで見通しがあまりよくないとみなされてきたと考えられ，むしろ，瞬時的に生じるという意味でのスイッチング動作そのものについては陽には考慮せずに状態の近似的な平均化によりスイッチング動作の影響を記述する平均値モデルがしばしば用いられている [1,3,4]．しかしその一方で，むしろスイッチングを直接的に考慮して扱うことをハイブリッドシステム [8] の立場から目指した研究も盛んになってきている [9–11]．ただし，上記の研究では，通常，制御入力はオンラインでの最適化により定めることになると考えられることから実装上の難点も懸念され，シミュレーションによる考察に留まっているケースも少なくない．

これに対して本研究は，スイッチング動作に関する厳密な議論に立ち返ってコンバータのモデル化を通常の離散時間系の立場から行うという方向に沿ったものである．とくに，そのような扱いが，離散時間の時不変な制御則を直接的に導くうえで実は見通しのよいものとなることを論じるものであって，二部から構成される．まず，この第I部では，スイッチング動作を直接かつ厳密に考慮して導出される離散化モデルについて論じる．さらに，コンバータの素子値やスイッチング周期によらずかなり広く持つと考えられる性質を活用することで，上述のモデルをさらに，制御則の設計を考えるに際してより好都合である離散化双線形モデルによって近似することが妥当と考えられることを述べる．続いて，この離散化双線形モデルの（素子パラメータの公称値を用いない形での）同定法を提案し，作成したコンバータの同定実験を通して離散化双線形モデルとその同定法の有効性を確認する．

* 原稿受付　2014年10月3日
† 京都大学　大学院　工学研究科　Graduate School of Engineering, Kyoto University; Kyotodaigaku-Katsura, Nishikyo-ku, Kyoto 615-8510, JAPAN
Key Words: boost converters, discretization, bilinear systems, identification.

第II部 [12] ではさらに，同定された離散化双線形モデルに基づきコンバータの出力電圧に関する積分補償を含んだ非線形制御則を与え，実験を通してその有効性を検証する．

2. ブーストコンバータ

本節ではブーストコンバータ [1–3] の概要について述べる．ブーストコンバータは，Fig. 1 に示すように，入力電源 $V_{\rm in}$，インダクタ L，キャパシタ C，ダイオード D，スイッチ S より構成される．R は接続する負荷抵抗である．スイッチの ON, OFF を周期的に繰り返すことによって，負荷抵抗にかかる電圧すなわち出力電圧 v は，脈動を伴う周期定常状態となる．この周期定常状態に関して出力電圧の平均値が実用上重要となるが，それはスイッチ S の ON, OFF に関するデューティ比により決まる．ここで，スイッチング周期（スイッチが OFF から ON に切り替わる時刻，すなわちスイッチング時刻の間隔）を一定値 T，1 スイッチング周期内でスイッチの ON 状態が継続される期間の長さを $T_{\rm on}$ として，（そのスイッチング周期内での）デューティ比は $\mu := T_{\rm on}/T$ で定義され，必ず $0 \le \mu \le 1$ となる．ブーストコンバータの制御は，過渡応答などに配慮しながらスイッチング周期ごとにデューティ比を適切に定めつつそれを一定値に収束させ，対応する周期定常状態における出力電圧の平均値が所望の値となるようにすることであるといえる．

ブーストコンバータは，その素子パラメータやスイッチング周期に応じて，周期定常状態にあるときのインダクタ L に流れる電流がつねに正となるモード（連続導通モード），あるいは，0 となる期間が存在するモード（不連続導通モード）のいずれかで動作する [1–4]．通常，コンバータは連続導通モードで動作するように構成されるため [3]，本論文においてもそのような動作モードを仮定する．また，Fig. 1 のコンバータの回路図に関して，現実の素子には内部抵抗などの損失が存在する．そのようなより現実に即した状況を扱うために，本論文では，インダクタの等価直列抵抗（R_L）とスイッチの導通時抵抗 ($R_{\rm S}$) およびダイオードの立ち上がり電圧 ($E_{\rm D}$) を考慮する [1]．このとき，スイッチが ON および OFF の状況での等価回路は，それぞれ Fig. 2 の (a), (b) のようになる．以下ではこの等価回路に基づき議論を行う．なお，本論文では，最終的には同定実験によりブーストコンバータの離散化双線形モデルを求めるので，等価回路そのものは，したがって，上記の損失抵抗を考慮するかどうかは，最終的には本質的でない．ただし，同定法ならびに得られた同定モデルの有効性検証に先立ち，離散化双線形モデルによりブーストコンバータの動作を記述することの妥当性そのものを事前に検証するうえでは，このような損失も考慮しておくことに意味があると考えるものである．

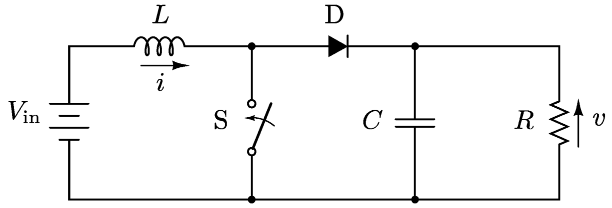
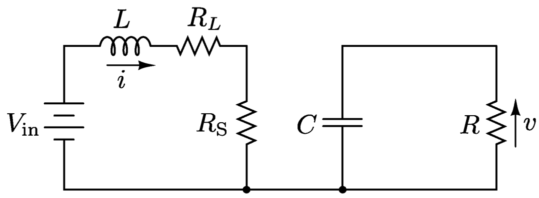
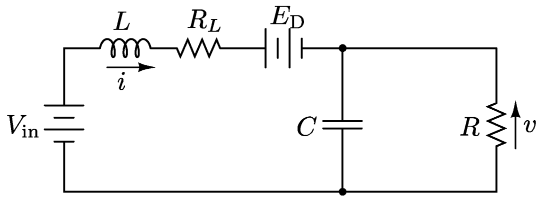


Fig. 1 Boost converter



(a) Switch: ON



(b) Switch: OFF

Fig. 2 Equivalent circuits

3. ブーストコンバータの離散化モデル

本節では，しばしば利用されている平均値モデルを導出する際の近似的な考え方 [1,3,4] （**3.3** 参照）とは対照的な扱いとして，ブーストコンバータにおけるスイッチング動作を陽に考慮して直接的に取り扱い，厳密な離散化モデルを導く．

3.1 ブーストコンバータの連続時間状態方程式

本項ではまず，ブーストコンバータの連続時間状態方程式を示す．スイッチ S の ON, OFF に応じて前節で示したそれぞれの等価回路に対し，状態変数を $x = [i\ v]^T$ としたときの状態方程式は，次式のようになる．ただし，i はインダクタ電流，v は出力電圧であり，その向きはそれぞれ図に示す通りとする．

- スイッチ S が ON のとき

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + B_1 V_{\rm in} \tag{1}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_L + R_{\rm S}}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

- スイッチ S が OFF のとき

$$\frac{dx}{dt} = A_2 x + B_2 V_{\rm in} + B_2' E_{\rm D} \tag{3}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix},\ B_2' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

3.2　ブーストコンバータの離散化モデルの導出

本項では，ブーストコンバータの厳密な離散化モデルを導出する．このモデルでは，スイッチが OFF から ON に切り替わる瞬間，すなわちスイッチング時刻で状態変数の離散化を行う．これにより，スイッチング時刻 $t = kT$ $(k = 0,1,2,\cdots)$ における電流 i，電圧 v の厳密な解析が可能となる．

モデルを導くために，時間区間 $t \in [kT, (k+1)T)$ におけるデューティ比を μ_k $(k = 0,1,2,\cdots)$ とおく．また，スイッチング時刻 kT における状態変数を $x_k = x(kT)$，スイッチが OFF に切り替わる時刻 $(k+\mu_k)T$ における状態変数を $\xi_k = x((k+\mu_k)T)$ とおく．まず，状態方程式 (1) より，ξ_k は次式で表される．

$$\xi_k = \mathcal{A}_{1,\mu_k} x_k + \mathcal{B}_{1,\mu_k} V_{\rm in} \tag{6}$$

$$\mathcal{A}_{1,\mu_k} := e^{A_1 \mu_k T},\ \mathcal{B}_{1,\mu_k} := \int_0^{\mu_k T} e^{A_1(\mu_k T - \tau)} B_1 d\tau \tag{7}$$

同様に，状態方程式 (3) から x_{k+1} は次式で表される．

$$x_{k+1} = \mathcal{A}_{2,\mu_k} \xi_k + \mathcal{B}_{2,\mu_k} V_{\rm in} + \mathcal{B}'_{2,\mu_k} E_{\rm D} \tag{8}$$

$$\mathcal{A}_{2,\mu_k} := e^{A_2(1-\mu_k)T} \tag{9}$$

$$\mathcal{B}_{2,\mu_k} := \int_0^{(1-\mu_k)T} e^{A_2((1-\mu_k)T-\tau)} B_2 d\tau \tag{10}$$

$$\mathcal{B}'_{2,\mu_k} := \int_0^{(1-\mu_k)T} e^{A_2((1-\mu_k)T-\tau)} B_2' d\tau \tag{11}$$

(6), (8) 式から，スイッチング時刻 kT の状態 x_k に着目した，以下の離散時間状態方程式が得られる．

$$x_{k+1} = \mathcal{A}_{\mu_k} x_k + \mathcal{B}_{\mu_k} V_{\rm in} + \mathcal{B}'_{\mu_k} E_{\rm D} \tag{12}$$

$$\mathcal{A}_{\mu_k} := \mathcal{A}_{2,\mu_k} \mathcal{A}_{1,\mu_k} \tag{13}$$

$$\mathcal{B}_{\mu_k} := \mathcal{A}_{2,\mu_k} \mathcal{B}_{1,\mu_k} + \mathcal{B}_{2,\mu_k},\ \mathcal{B}'_{\mu_k} := \mathcal{B}'_{2,\mu_k} \tag{14}$$

（注意 1）ブーストコンバータを扱っている文献 [10] 中の手法のひとつでは，(12) 式と本質的に同じ式を与えているが，その係数行列の性質について検討していない．したがって，本論文で後述する性質に着目した議論もなされていない．この点に関する詳細は注意 3 で述べる．

上の議論ではスイッチング時刻の電圧，電流に着目したが，実用上は，出力電圧 v については 1 周期における平均値で議論したほうがより好都合である．そこで出力電圧の離散化された平均値 $\overline{y}_k = \frac{1}{T}\int_{kT}^{(k+1)T} y(t)dt$ を導入する．ここで，(1), (3), (6) 式と出力方程式 $y(t) = C_v x(t)$ $(C_v = [0\ 1])$ より，出力電圧の時間変化は次式のように表せる．

$$y(kT+t') = \begin{cases} \mathcal{C}_1(t',\mu_k)x_k + \mathcal{D}_1(t',\mu_k)V_{\rm in} + \mathcal{D}_1'(t',\mu_k)E_{\rm D} \\ \qquad\qquad (0 \le t' \le \mu_k T) \\ \mathcal{C}_2(t',\mu_k)x_k + \mathcal{D}_2(t',\mu_k)V_{\rm in} + \mathcal{D}_2'(t',\mu_k)E_{\rm D} \\ \qquad\qquad (\mu_k T \le t' \le T) \end{cases} \tag{15}$$

ただし，上式に現れる係数行列は

$$\mathcal{C}_1(t',\mu_k) := C_v e^{A_1 t'},\ \mathcal{C}_2(t',\mu_k) := C_v e^{A_2(t'-\mu_k T)} \mathcal{A}_{1,\mu_k} \tag{16}$$

$$\mathcal{D}_1(t',\mu_k) := C_v \int_0^{t'} e^{A_1(t'-\tau)} B_1 d\tau \tag{17}$$

$$\mathcal{D}_2(t',\mu_k) := C_v e^{A_2(t'-\mu_k T)} \mathcal{B}_{1,\mu_k} + C_v \int_{\mu_k T}^{t'} e^{A_2(t'-\tau)} B_2 d\tau \tag{18}$$

$$\mathcal{D}_1'(t',\mu_k) := 0,\ \mathcal{D}_2'(t',\mu_k) := C_v \int_{\mu_k T}^{t'} e^{A_2(t'-\tau)} B_2' d\tau \tag{19}$$

と定義される．ここで，これらの関数の 1 周期における平均値を

$$\mathcal{C}_{\mu_k} := \frac{1}{T}\left\{ \int_0^{\mu_k T} \mathcal{C}_1(t',\mu_k)dt' + \int_{\mu_k T}^{(k+1)T} \mathcal{C}_2(t',\mu_k)dt' \right\} \tag{20}$$

$$\mathcal{D}_{\mu_k} := \frac{1}{T}\left\{ \int_0^{\mu_k T} \mathcal{D}_1(t',\mu_k)dt' + \int_{\mu_k T}^{(k+1)T} \mathcal{D}_2(t',\mu_k)dt' \right\} \tag{21}$$

$$\mathcal{D}'_{\mu_k} := \frac{1}{T}\left\{ \int_0^{\mu_k T} \mathcal{D}_1'(t',\mu_k)dt' + \int_{\mu_k T}^{(k+1)T} \mathcal{D}_2'(t',\mu_k)dt' \right\} \tag{22}$$

と定義すれば，離散化された平均出力電圧 $\overline{y}_k$ に関して次式が得られる．

$$\overline{y}_k = \mathcal{C}_{\mu_k} x_k + \mathcal{D}_{\mu_k} V_{\rm in} + \mathcal{D}'_{\mu_k} E_{\rm D} \tag{23}$$

(12) 式および (23) 式をブーストコンバータの離散化モデルとよぶことにする．

（注意 2）$\overline{y}_k$ は時刻 $t \ge kT$ における $y(t)$ にも依存しており，時刻 $t = (k+1)T$ において初めてその値を得ることができる．そのため，上記のモデル（ならびにこれを近似して得られる後述の離散化双線形モデル）を制御系設計に用いる際には，$\overline{y}_k$ ではなく $\overline{y}_{k-1}$ を制御器が利用する形となるよう，出力として $\overline{y}_{k-1}$ を生成するように $\overline{y}_k$ に対して作用するむだ時間要素をコンバータのモデルに含めて扱うか，もしくは，モデルの複雑化を避けるのであれば，時刻 $t = kT$ において得られる $\overline{y}_{k-1}$ を便宜上 $\overline{y}_k$ であるものと見なして近似的に扱うことになる．

3.3　平均値モデルと離散化モデルの比較

本項では，前項で導出した離散化モデル (12), (23) を，しばしば用いられているより単純な平均値モデル [1,3,4]

と比較し，離散化モデルに基づく議論の有用性について検討する．ここで，ブーストコンバータの平均値モデルは，スイッチが ON のときと OFF のときの状態方程式 (1)，(3) を近似的な意味で平均化することで得られ，デューティ比が μ で一定であるとき次式で与えられる．

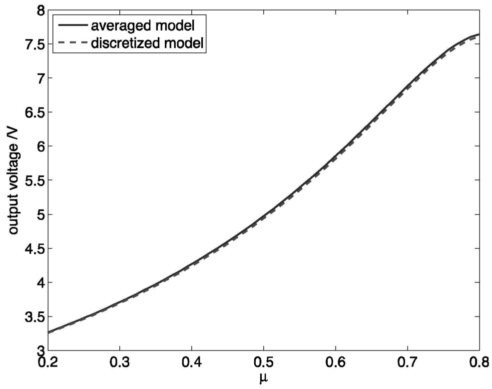
$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{A}\overline{x} + \overline{B}_1 V_{\mathrm{in}} + \overline{B}_2 E_{\mathrm{D}} \tag{24}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L+\mu R_{\mathrm{S}}}{L} & -\frac{1-\mu}{L} \\ \frac{1-\mu}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \tag{25}$$

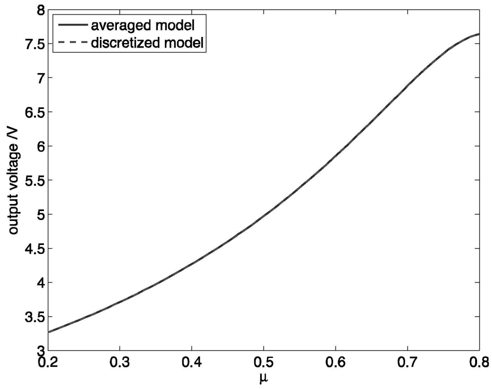
$$\overline{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix},\ \overline{B}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1-\mu}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

ここで，$\overline{x}$ は 1 スイッチング周期あたりの状態変数 x の平均値に相当するものと便宜的に考えている．このような平均化の手法は，スイッチング周期が十分短いことが前提となっている [1,3]

Fig. 3 は，後の実験で用いる回路のパラメータ（**6.1** の Fig. 5, Table 1 を参照）のもと，両モデルから算出される平均出力電圧定常値のデューティ比特性を示したものである（周期 T を 100 μs, 10 μs と変えて計算を行った）．本論文の離散化モデルに関して，その具体的手順は以下の通りである．まず，デューティ比 μ_k が k によらず一定値 μ^* で動作する場合を考え，そのときの状態変数 x_k の定常値 x^* を考える．ここで，x^* の値は，(12) 式で $\mu_k = \mu^*$，$x_k = x_{k+1} = x^*$ とおいた式を解くことにより求められる（ブーストコンバータの性質から $\mathcal{A}_{\mu^*}$ は通常，Schur 安定となり，この式は x^* に関して解ける）．これと (23) 式とから，デューティ比 μ^* に対する離散化された平均出力電圧の定常値が求められる．この計算を $0 \leq \mu^* \leq 1$ の範囲で μ^* を変化させて行って得たのが Fig. 3 における破線の曲線である．平均値モデルの場合にも，同様の手順により，(24) 式に基づいてデューティ比特性を求めている．



(a) $T = 100\ \mu$s



(b) $T = 10\ \mu$s

Fig. 3　Comparison of steady-state output voltage

Fig. 3 より，周期を $T = 10\ \mu$s とした場合には両者の出力電圧はほぼ一致していることがわかる．一方，(平均値モデルにとって不利な少し長めの）$T = 100\ \mu$s とした場合には，平均値モデルと離散化モデルの間には小さいながらも差異がみられる．このことは，平均値モデルを導出する際の前提が「スイッチング周期が十分短いこと」であることの検証となっているほか，スイッチング周期が長めの場合にも所望の性能を有する設計を行ううえでは，離散化モデルが有用であることを示唆していると考えられる．さらに，制御系設計の観点からより重要な点として，第 II 部 [12] で論じるように，(次節で述べる若干の近似をさらに施せば）対象の非線形性を陽に考慮した形で（時不変な）離散時間制御則を直接設計することが可能となる．そのような点からも，離散化モデルは決して見通しのよくないものではなく，むしろ有用であると考えられる．

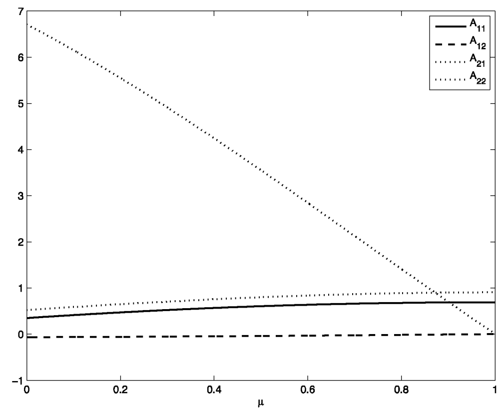
4.　ブーストコンバータの離散化双線形モデル

前節では，ブーストコンバータの離散化モデルを導出した．しかし，そのモデル (12) に現れる係数行列 $\mathcal{A}_{\mu_k}$，$\mathcal{B}_{\mu_k}$，$\mathcal{B}'_{\mu_k}$ は制御入力であるデューティ比 μ_k に関する複雑な関数となっており，このモデルに基づいて制御則を設計することは現実的でない．そこでこれらの行列を μ_k に関する簡単な行列関数で近似することを考える．

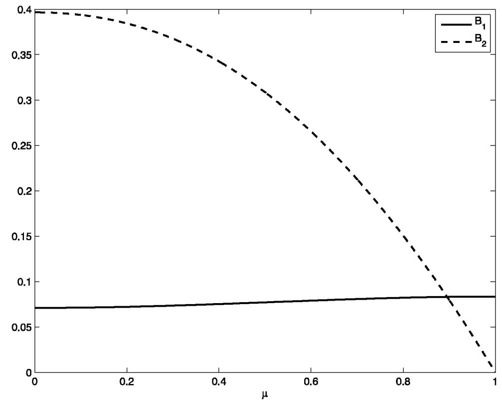
具体的な近似を導入する準備として，前節と同じく後の実験で用いる回路のパラメータをもとに（**6.1** の Table 1 参照），行列 $\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{B}_\mu$, $\mathcal{B}'_\mu$ の各要素に関してデューティ比 μ に対する依存性を調べてみる．その様子を Fig. 4 に示す．ここで得られた特性曲線は（ここで用いた回路パラメータに限らず広く）デューティ比 μ に関する二次関数を用いれば非常に高い精度で近似できることが確認できている．しかし，そのような扱いでは以降の議論が（同様に可能ではあるが）複雑となるため，ここでは μ に関する一次関数で近似を行う．すなわち，以下のように近似する．

$$\mathcal{A}_\mu \simeq \widetilde{\mathcal{A}}_0 + \widetilde{\mathcal{A}}_1\mu,\ \mathcal{B}_\mu \simeq \widetilde{\mathcal{B}}_0 + \widetilde{\mathcal{B}}_1\mu,\ \mathcal{B}'_\mu \simeq \widetilde{\mathcal{B}}'_0 + \widetilde{\mathcal{B}}'_1\mu \tag{27}$$

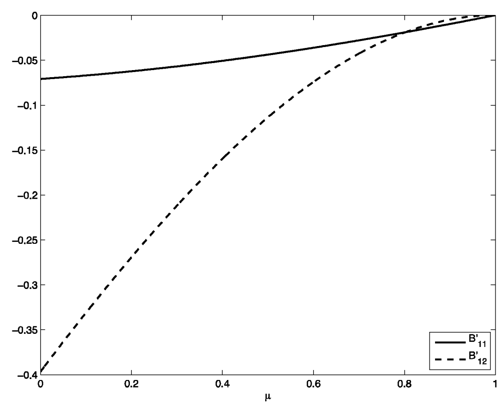
このような近似を $0 \leq \mu \leq 1$ の全域にわたって行うと近



(a) Entries of $\mathcal{A}_\mu$



(b) Entries of $\mathcal{B}_\mu$



(c) Entries of $\mathcal{B}'_\mu$

Fig. 4　Characteristics of matrix coefficients

似精度は劣化するが，実際に動作させる範囲を考慮したうえで近似を（重点的に）行うデューティ比の範囲を制限すれば，Fig. 4 における各曲線のほとんどが直線から極端にかけ離れたものではないことから，(少なくとも，制御時のデューティ比を $0 \le \mu \le 1$ の全域ではなくそれよりも狭い範囲に制限することまで含めて考えれば）精度を大きく損なうことなく近似することが可能である．このような線形近似を行えば，(12) 式は次式のように書ける．

$$x_{k+1} = (\widetilde{\mathcal{A}}_0 + \widetilde{\mathcal{A}}_1\mu_k)x_k + (\widetilde{\mathcal{B}}_0 + \widetilde{\mathcal{B}}_1\mu_k)V_{\rm in} + (\widetilde{\mathcal{B}}'_0 + \widetilde{\mathcal{B}}'_1\mu_k)E_{\rm D} \qquad (28)$$

上式は (12) 式と比べ，デューティ比 μ_k に関して 1 次式となっているという意味で制御系設計を念頭においた場合に都合のよいものであるが，右辺には定数項が含まれている点で好ましくない．そこでつぎに，この定数項を消去した形で扱うために，目標となる出力電圧に対する定常状態を考え，そこからの偏差系を考える．具体的には，Fig. 3 の破線（離散化モデル）の曲線に基づき，離散化された平均出力電圧の定常値が所望の出力電圧に一致するようなデューティ比 μ^* が求められる．このデューティ比に対応する x^* もまた，**3.3** で述べた通り事前に計算可能であるから，これらの値を用いて，定常状態からの偏差を以下のように表記する．

$$z_k := x_k - x^*,\ w_k := \mu_k - \mu^* \qquad (29)$$

この z_k, w_k によって (28) 式を表現することで，次式が得られる．

$$z_{k+1} = \mathcal{A}^* z_k + (\widetilde{\mathcal{A}}_1 z_k + s^*)w_k \qquad (30)$$

ただし，簡単のため $\mathcal{A}^* := \mathcal{A}_{\mu^*} = \widetilde{\mathcal{A}}_0 + \widetilde{\mathcal{A}}_1\mu^*$，$s^* := \widetilde{\mathcal{A}}_1 x^* + \widetilde{\mathcal{B}}_1 V_{\rm in} + \widetilde{\mathcal{B}}'_1 E_{\rm D}$ とおいている．

上式 (30) は双線形系となっており，これをブーストコンバータの離散化双線形モデルとよぶことにする．平均出力電圧に関する (23) 式についても同様に μ_k に関して一次近似が妥当であることが確認でき，やはり偏差に関する式が対応する形で導かれるが，詳細は割愛する．

（注意 3） 文献 [10] では，本節での扱いとは異なり，$\mathcal{A}_\mu$ などの係数行列の μ に対する依存性は，それらを制御系設計に利用するのに適さないほどに複雑であるとして，μ の範囲を分割して作られる区分的アファイン系として扱っている．本論文では，μ の変化にともなう区分的アファイン系の変化をいわば連続的にとらえ，しかもその変化の特徴を利用することで，双線形系のモデルとして扱うことができることを明らかにしていると解釈することができる．第 II 部 [12] で論じるように，このようなモデル化により，オンラインでの最適化を必要としない離散時間の標準的な時不変制御則を導くことができる．

5.　離散化双線形モデルの同定法

前節では離散化双線形モデルを導出し，これによりブーストコンバータの動作が十分に正確に記述できると考えられることを述べた．この離散化双線形モデルは，回路素子の公称値を用いればただちに計算可能である．しかし，素子の値には必ず誤差があり，配線抵抗などの考慮していない誤差要因も少なからず存在する．よって，素子の公称値を単純に使ったモデルは，あまり適切とはいえない．そこで本節では，ブーストコンバータを離散化双線形モデルとして実験的に同定することを考え，そ

の方法について述べる．

5.1 同定の手順

まず，(28) 式に現れる $\widetilde{\mathcal{A}}_0, \widetilde{\mathcal{A}}_1, \widetilde{\mathcal{B}}_0, \widetilde{\mathcal{B}}_1, \widetilde{\mathcal{B}}'_0, \widetilde{\mathcal{B}}'_1$ を同定により決定することを考える．そのために，(28) 式を次式のように表現し直す．

$$x_{k+1} = \Theta u_k \tag{31}$$

$$\Theta = \left[\widetilde{\mathcal{A}}_0\ \widetilde{\mathcal{A}}_1\ \widetilde{\mathcal{B}}_0\ \widetilde{\mathcal{B}}_1\ \widetilde{\mathcal{B}}'_0\ \widetilde{\mathcal{B}}'_1\right] \tag{32}$$

$$u_k = \left[x_k^T \quad \mu_k x_k^T \quad V_{\rm in} \quad \mu_k V_{\rm in} \quad E_{\rm D} \quad \mu_k E_{\rm D}\right]^T \tag{33}$$

この関係式に基づく同定を行うために，μ_k の時系列を用意してそれを適用した実験を行い，得られる状態 x_k の応答を測定する $(k=0,1,\cdots,N)$．なお，ブーストコンバータにおける状態はインダクタ電流およびキャパシタ電圧からなっていたことから，これらの測定は（次節で触れる若干の注意が必要であるものの）実際に可能であることに注意されたい．続いて，次式のように x_k および u_k を横に並べた行列をつくる．

$$X := [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N] \tag{34}$$

$$U := [u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_{N-1}] \tag{35}$$

このとき，（観測雑音が存在しないなどの理想状況では）

$$X = \Theta U \tag{36}$$

が成り立つ．よって Θ の推定値 $\widehat{\Theta}$ は次式で求められる．ただし，$U^\dagger$ は U の擬似逆行列を表す．

$$\widehat{\Theta} = XU^\dagger \tag{37}$$

したがって，所望の出力電圧となるときのデューティ比を μ^* とすれば，ここで得られた $\widehat{\Theta}$ により定まる $\widetilde{\mathcal{A}}_0, \widetilde{\mathcal{A}}_1, \widetilde{\mathcal{B}}_0, \widetilde{\mathcal{B}}_1, \widetilde{\mathcal{B}}'_0, \widetilde{\mathcal{B}}'_1$ を用いて，離散化双線形モデル (30) の残るパラメータ $\mathcal{A}^*, s^*$ は以下のように求められる．

$$\mathcal{A}^* = \widetilde{\mathcal{A}}_0 + \widetilde{\mathcal{A}}_1\mu^*,\ s^* = \widetilde{\mathcal{A}}_1 x^* + \widetilde{\mathcal{B}}_1 V_{\rm in} + \widetilde{\mathcal{B}}'_1 E_{\rm D} \tag{38}$$

ただし x^* は以下で与えられる．

$$x^* = (I - \mathcal{A}^*)^{-1}(\mathcal{B}^* V_{\rm in} + \mathcal{B}'^* E_{\rm D}) \tag{39}$$

$$\mathcal{B}^* = \widetilde{\mathcal{B}}_0 + \widetilde{\mathcal{B}}_1\mu^*,\ \mathcal{B}'^* = \widetilde{\mathcal{B}}'_0 + \widetilde{\mathcal{B}}'_1\mu^* \tag{40}$$

5.2 周波数領域での考察に基づく重みの導入

前項では基本的な同定法について述べたが，これは周波数領域で解釈すれば，すべての周波数成分に対して均一の重みのもとでパラメータを求める方法である．したがって，測定データに高周波のノイズが重畳していたり，高周波成分までの同定を目指すことがかえってモデルの精度低下を招くような場合には，高周波数帯域を除外した形で同定を行うことで精度が向上する可能性がある．そのための方法を本項では述べる．

まず次のユニタリ行列を導入する．

$$\varPhi := \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix} e^{-j\theta_0} & e^{-j\theta_0} & \cdots & e^{-j\theta_0} \\ e^{-j\theta_0} & e^{-j\theta_1} & \cdots & e^{-j\theta_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-j\theta_0} & e^{-j\theta_{N-1}} & \cdots & e^{-j\theta_{(N-1)^2}} \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\theta_i := \frac{2\pi i}{N} \tag{42}$$

上式を用いて (34), (35) 式の X, U に対して

$$X_\varPhi := X\varPhi, \quad U_\varPhi := U\varPhi \tag{43}$$

を定義し，(36) 式を変形した次式に基づき Θ を推定する．

$$X_\varPhi = \Theta U_\varPhi \tag{44}$$

ここで (43) 式の意味を解釈するために $X_\varPhi, U_\varPhi$ の各列に注目すると，左側の列から順にそれぞれ x_k, u_k の離散フーリエ変換 (DFT) における直流成分，基本波成分，2 次高調波成分，…，$N-1$ 次高調波成分を表している．そこで，(44) 式の両辺に右から対角行列の重み $\varLambda = {\rm diag}(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{N-1})$ をかける．λ_i は i 次高調波成分に対する重みを表す．そして，次式の評価関数を最小化することを考える．

$$J_\varPhi = \|(X_\varPhi - \Theta U_\varPhi)\varLambda\|_F^2 \tag{45}$$

ただし，$\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルムを表す．ここで，

$$S := [{\rm Re}\{X_\varPhi \varLambda\} \quad {\rm Im}\{X_\varPhi \varLambda\}] \tag{46}$$

$$V := [{\rm Re}\{U_\varPhi \varLambda\} \quad {\rm Im}\{U_\varPhi \varLambda\}] \tag{47}$$

を導入すると (45) 式は次式で表される．

$$J_\varPhi = \|S - \Theta V\|_F^2 \tag{48}$$

以上より，(45) 式を最小化する推定値は次式で求められる．

$$\widehat{\Theta} = SV^\dagger \tag{49}$$

6. モデルおよび同定法の有効性検証

前節まででブーストコンバータの離散化双線形モデルとその同定法について述べた．本節ではブーストコンバータを構成して同定実験を行い，得られたモデルの妥当性を確認し，同定法の有効性を検証する．

6.1 実験装置構成

本研究で用いた実験装置は，ブーストコンバータと DSP (Digital Signal Processor) によって構成される．用いた DSP は TMX320F28069 であり，A/D 変換器（ADC）と PWM 信号を生成する機構が内蔵されている．これにより電圧（電流）の測定と任意のデューティ比を持つ PWM 信号をスイッチ S として利用する MOSFET

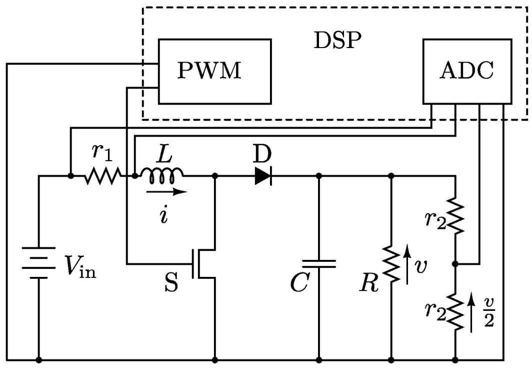


Fig. 5 Circuit overview

Table 1 Circuit parameters

記号	値	記号	値
$V_{\rm in}$	3 V	$E_{\rm D}$	0.3 V
L	1.0 mH	R_L	2.6 Ω
C	10 μF	R	100 Ω
r_1	1 Ω	r_2	10 kΩ
$R_{\rm S}$	0.12 Ω		

へ入力することが可能となる．実際に作成したブーストコンバータを含む実験装置の構成図を Fig. 5 に示す．用いた素子などの値を Table 1 に示す（損失抵抗などの値は実測値やカタログ値に基づくものである）．図中，r_1 は電流 i を測定するために挿入した小さな抵抗であり，r_2 は出力電圧を分圧するために用いた抵抗で[1]，R に比べて十分大きな抵抗を用いている．

6.2 同定実験と有効性検証

本項では同定実験を行い，得られた離散化双線形モデルによる応答と実際の応答を比較することでその有効性を検証する．

6.2.1 同定信号の選定

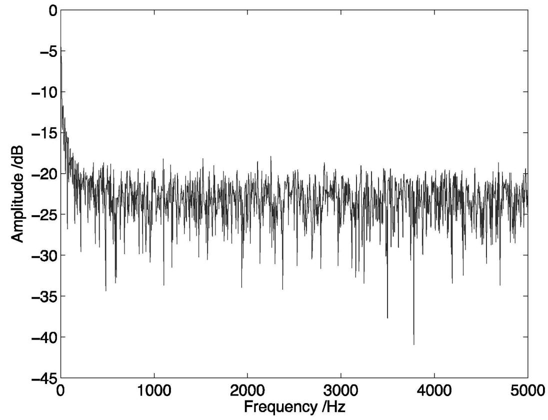
同定のための入力信号（デューティ比）の範囲を定めることは，**4.** で行った線形近似をどの範囲に限定して行うかに相当する．また，限定した範囲で入力信号の系列を単純にランダムに生成しただけでは，それは高周波成分に過度に富んだ信号となり，(実際にはそこまで大きな高周波成分を持たないデューティ比の入力系列で所望の制御が可能であると考えられる）コンバータの同定において不適切であると考えられる．そこで，最初に 0 から 1 の範囲でランダムに生成した信号（一様乱数）を適切なディジタルフィルタに通すことで高周波成分を取り除いた信号を生成する[2]．ここでは，伝達関数が

$$G(s) = \frac{1}{1+T_1 s} \tag{50}$$

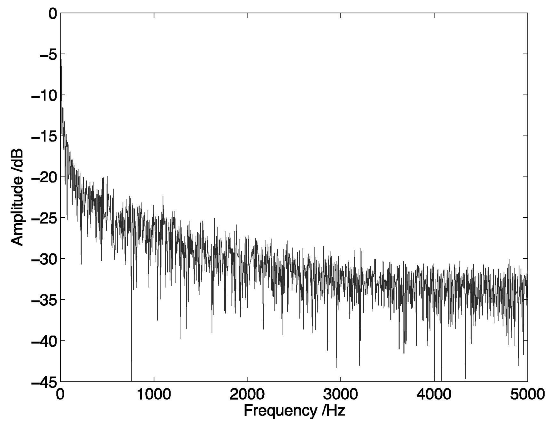
で表される連続時間一次遅れ系をスイッチング周期 T で離散化したディジタルフィルタを用いる．そしてさらにフィルタを通して得られた信号に対してスケーリングを行う．具体的にはフィルタを通した後の信号列を μ_k^0，その最大値を M，最小値を m とし，

$$\mu_k = \frac{\mu_{\rm max} - \mu_{\rm min}}{M - m}(\mu_k^0 - m) + \mu_{\rm min} \tag{51}$$

により同定用の入力信号 μ_k を生成する．ここで，$\mu_{\rm max}$，$\mu_{\rm min}$ はそれぞれ同定用の入力信号が持つべき最大値，最小値である．このようにすることにより，指定した範囲でランダムに変化し，かつ高周波成分を取り除いた信号を得ることができる．本実験ではスイッチング周期を $T = 100$ μs，入力信号の範囲を $\mu_{\rm min} = 0.3$, $\mu_{\rm max} = 0.7$,



(a) Input signal



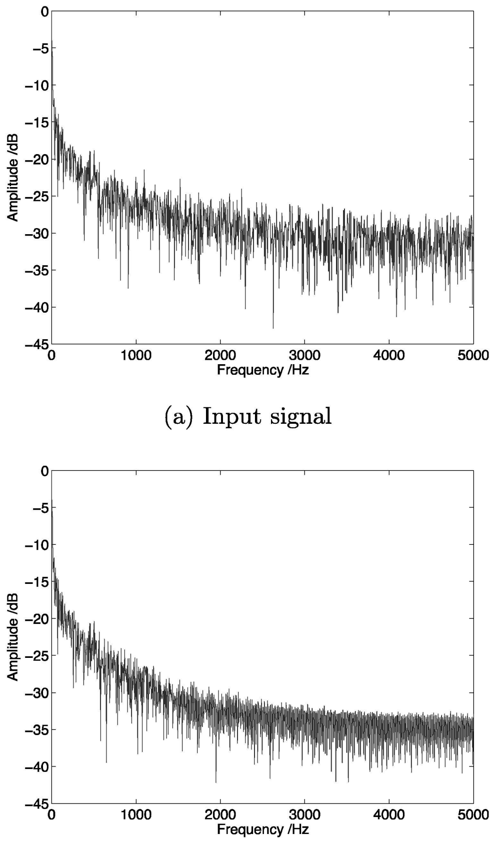
(b) Output voltage

Fig. 6 Frequency spectrum ($T_1 = 10$ μs)

[1] A/D 変換器で読み取ることのできる電圧の範囲が限られているため，このようにしている．

[2] 同定に際して，同定実験で得た信号をフィルタリングにより前処理することを本論文では考えていない．それは，(33) 式には $\mu_k x_k$ という積が存在するため，単体の μ_k, x_k も含めて全体として整合性があって意味も明確なフィルタリングを適用することが難しいと考えたためである．そのため，μ_k 自体の高周波成分を適切に抑制しておくことは，同定時に重み Λ を導入しようすることとは無関係に，重要であると考える．

信号の長さを $N=1500$（150 ms）とする．ここで，(50) 式における時定数 T_1 の選び方に関して実験を通した考察を行う．まず，時定数を $T_1=10\ \mu$s と小さくした場合の信号を用い，実験を行った．このときに用いた同定用入力信号と得られた出力電圧応答の周波数スペクトルを Fig. 6 に示す．この場合，時定数を小さくしたことで入力信号には高周波成分が残っているが，出力電圧には高周波成分がほとんど現れないことが確認できる．これはすなわち余分な高周波成分まで考えていることを意味し，この信号を用いることは不適切であると考えられる．一方，時定数を大きくし $T_1=1000\ \mu$s とした場合，同様に得られた周波数スペクトルを Fig. 7 に示す．この場合は先ほどと異なり，入力信号，出力電圧ともに高周波成分はほとんど現れていない．したがって，本実験においてはこの入力信号を用いることとする．この入力信号を時間領域で Fig. 8 に示す．



(a) Input signal

(b) Output voltage

Fig. 7　Frequency spectrum ($T_1=1000\ \mu$s)

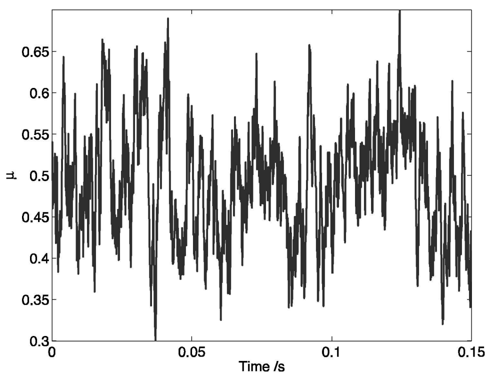


Fig. 8　Input signal for identification

6.2.2　実験の結果と有効性検証

Fig. 8 に示す信号を入力信号として電流，電圧の測定を行ったのち，(49) 式にしたがって離散化双線形モデルのパラメータを求めた．周波数領域に対する重みとしては，同定実験時の入力に対するシミュレーションが実験結果を再現する際の精度の高さを通して同定モデルの妥当性を検証し，試行錯誤的に定めた以下のものを用いた．

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{1498}) \tag{52}$$

$$\lambda_i=\begin{cases}1 & (0\le i\le 350, 1149\le i\le 1498)\\ 0 & (351\le i\le 1148)\end{cases} \tag{53}$$

その結果得られたパラメータを次式に示す．

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0=\begin{bmatrix}0.1053 & -0.0671\\ 7.8092 & 0.6383\end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_1=\begin{bmatrix}0.7110 & 0.0661\\ -9.7865 & 0.2289\end{bmatrix} \tag{55}$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0=\begin{bmatrix}0.0564\\ 0.2937\end{bmatrix},\quad \widetilde{\mathcal{B}}_1=\begin{bmatrix}0.0089\\ 0.0487\end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}'_0=\begin{bmatrix}0.0056\\ 0.0294\end{bmatrix},\quad \widetilde{\mathcal{B}}'_1=\begin{bmatrix}0.0009\\ 0.0049\end{bmatrix} \tag{57}$$

このパラメータを用い (28) 式のモデル（偏差系を構築する前の離散化モデル）に基づき，最終的なモデルの妥当性検証を行う．そのために，$T_1=1000\ \mu$s として同様に生成した Fig. 8 とは異なる入力信号（Fig. 9）を用い，応答のシミュレーションを行った場合と実際の測定値を比較する．その際，シミュレーションの初期値は実際に測定された初期値を用いる．図を見やすくするために最初の 15 ms 間の応答を比較したものを Fig. 10 に示す．このように両者の応答はほぼ一致していることがわかり，

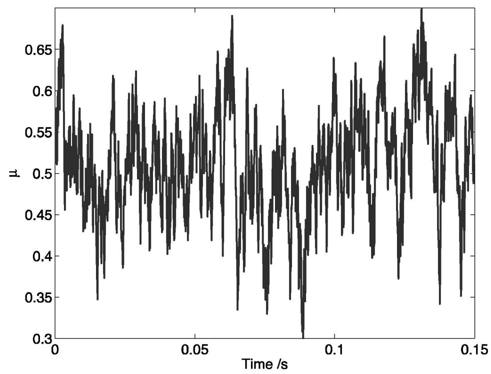
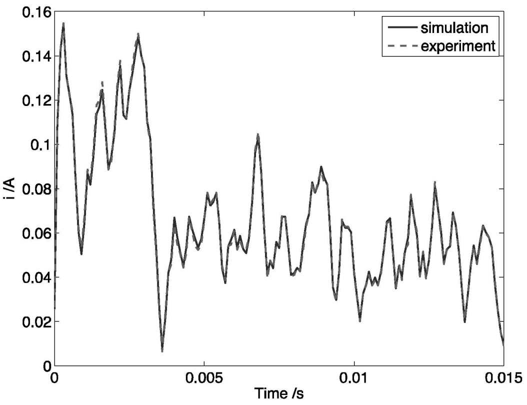
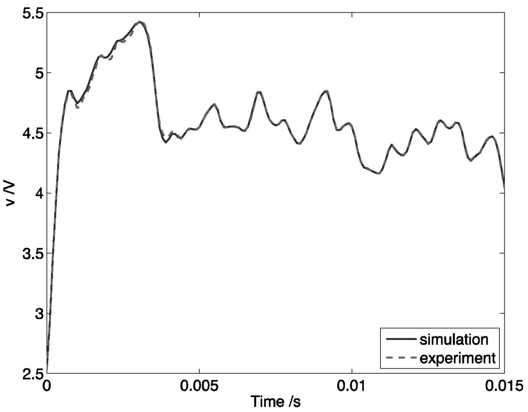


Fig. 9　Input signal for model varidation



(a) Current



(b) Voltage

Fig. 10 Comparison of responses

離散化双線形モデルおよびその同定法の有効性を確認することができる．

なお，Table 1 に示した素子値などに基づくノミナルモデルは，(27) 式の近似を施さない状況においても，たとえば Fig. 10(b) に対応するシミュレーションにおいてほとんどの時刻において実験結果よりも 0.5V 以上も大きな応答を示すものとなったことを付記しておく．素子の公称値は真値を十分な精度で反映したものではなく，損失抵抗の精密な測定も難しいため，上記の意味でのノミナルモデルはかなりのモデル化誤差を含むことがわかる．したがって，上記の同定モデルが得られた意義は極めて大きいといえる．

7. おわりに

本論文では，ブーストコンバータにおけるスイッチング動作を直接かつ厳密に考慮して導出される離散化モデルについて述べた後，それを簡単化することで離散化双線形モデルを導出することが妥当と考えられることを述べた．さらに，この離散化双線形モデルの実験に基づく同定法を示し，同定実験を通して得られたモデルおよび同定法が非常に有効と考えられることを確認した．ただし，ブーストコンバータにおいて実用上はスイッチング時刻における出力電圧よりも重要な平均出力電圧を与える関係式 (23) については，その係数行列について同様の同定法を与えることは直ちに可能であるが，詳しくは論じなかった．これは，現時点において，各スイッチング区間における平均出力電圧 $\bar{y}_k$ の信頼できる値を得ることが，ハードウエア制約や（制御則においても $\bar{y}_k$ をオンラインで利用することを見据えた際に，制御則の演算に差し障りがないようにしなければならないという）演算時間などに関わる問題などから解決できていないことによる．この点に関する検討は今後の課題としたい．この点も踏まえたうえで，第 II 部では，スイッチング時刻における出力電圧のみに関するこの離散化双線形モデルに基づいたブーストコンバータの非線形状態フィードバック制御則を導出し，実験を通してその有効性を検証する．

参 考 文 献

[1] R. W. Erickson: *Fundamentals of Power Electronics*, Springer (1997)

[2] 引原，千葉，木村，大橋: エース「パワーエレクトロニクス」，朝倉書店 (2000)

[3] 原田，二宮，顧: スイッチングコンバータの基礎，コロナ社 (2007)

[4] K. Wu: *Switch-Mode Power Converters: Design and Analysis*, Elsevier (2006)

[5] T. W. Martin and S. S. Ang: Digital control for switching converters; *Proc. IEEE International Symposium*, Vol. 2, pp. 480–484 (1995)

[6] L. Guo, J. Y. Hung and R. M. Nelms: Digital controller design for buck and boost converter using root locus techniques; *29th Annual Conference of the IEEE*, Vol. 2, pp. 1864–1869 (2003)

[7] A. G. Beccuti, S. Mariethoz, S. Cliquennois, S. Wang and M. Morari: Explicit model predictive control of DC-DC switched-mode power supplies with extended Kalman filtering; *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, No. 3, pp. 1864–1874 (2009)

[8] 井村，東，増淵: ハイブリッドシステムの制御，コロナ社 (2014)

[9] S. Almér, H. Fujioka, U. Jönsson, C.-Y. Kao, D. Patino, P. Riedinger, T. Geyer, A. Beccuti, G. Papafotiou, M. Morari, A. Wernrud, A. Rantzer, M. Bâja, H. Cormerais and J. Buisson Supélec: Hybrid control techniques for switched-mode DC-DC converters, Part I: The step-down topology; *Proc. 2007 American Control Conference*, pp. 5450–5457 (2007)

[10] A. G. Beccuti, G. Papafotiou, M. Morari, S. Almér, H. Fujioka, U. Jönsson, C.-Y. Kao, A. Wernrud, A. Rantzer, M. Bâja, H. Cormerais and J. Buisson Supélec: Hybrid control techniques for switched-mode DC-DC converters, Part II: The step-up topology; *Proc. 2007 American Control Conference*, pp. 5464–5471 (2007)

[11] M. Mirzaei and A. A. Afzalian: Hybrid modeling of the non-inverting buck-boost DC-DC converter; *Proc. International Conference on Control, Automation and Systems 2008* (2008)

[12] 後藤，蛯原，萩原: 離散化双線形モデルに基づくブーストコンバータ出力電圧の積分補償付非線形制御—II—制御則の導出と実験による検証; システム制御情報学会論文誌，第28巻，第7号，pp. 330–339 (2015)

著 者 略 歴

後藤 良介

1989年12月2日生．2014年3月京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了．同年4月（株）川崎重工業入社，現在に至る．

蛯原 義雄 (正会員)

2002年3月京都大学大学院工学研究科電気工学専攻博士後期課程修了．同年4月京都大学大学院工学研究科助手，2006年同研究科講師，2010年同研究科准教授となり現在に至る．数値最適化手法を用いた制御系の解析，設計に関する研究に従事．京都大学博士（工学）．計測自動制御学会，日本鉄鋼協会，IEEE などの会員．

萩原 朋道 (正会員)

1962年3月28日生．1986年京都大学大学院工学研究科修士課程修了．同年京都大学工学部助手，1991年助教授，改組に伴い，京都大学大学院工学研究科電気工学専攻助教授を経て，2001年より教授．サンプル値制御理論，2自由度制御系の設計法，むだ時間系などの研究に従事．京都大学工学博士．計測自動制御学会，電気学会，IEEE などの会員．