Title	q-安定性条件の空間とC*-同変連接層の導来圏
Author(s)	池田, 暁志
Citation	代数幾何学シンポジウム記録 (2018), 2018: 45-54
Issue Date	2018
URL	http://hdl.handle.net/2433/236403
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

q-安定性条件の空間と $\mathbb{C}^*$-同変連接層の導来圏

池田　曉志 (KAVLI IPMU)

1. Introduction

Bridgeland は [B1] で三角圏 $\mathcal{D}$ 上の安定性条件の概念を導入し，また $\mathcal{D}$ 上の安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ が複素多様体の構造を持つことを示した．特に $\mathcal{D}$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{D})$, あるいはその数値的 Grothendieck 群 $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ が $\mathbb{Z}$ 上有限ランクなら, $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ 局所的にベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}),\mathbb{C})$ (または $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}(\mathcal{D}),\mathbb{C})$) と同型となる．しかしながら, 次数付き代数の次数付き加群の導来圏を考えたり, あるいは代数多様体が $\mathbb{C}^*$-作用を持つときの $\mathbb{C}^*$-同変連接層の導来圏を考えると, 上の Grothendieck 群が $\mathbb{Z}$ 上有限ランクであるという仮定は一般に満たされなくなり, 通常の意味での Bridgeland 安定性条件の空間はよく振る舞わないことがわかる．しかしながらこういった場合は, Grothendieck 群は $\mathbb{Z}$ 上のランクは有限にならないものの, 適度な仮定の下で Laurent 多項式環 $R=\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上のランクは有限になる．そこで, こういった状況での自然な Bridgeland 安定性条件の拡張であると思われる, 著者とその共同研究者の Yu Qiu が [IQ] の中で導入した q-安定性条件と言うものについて解説するのが本稿の目的である．

著者と Yu Qiu は純粋に表現論的な動機から 2 重次数付きの Calabi-Yau 代数の研究の中でこの q-安定性条件を導入したが, このときは Weyl 群を Hecke 環に変形するパラメーターが一つ現れて来たのでそれを q と呼ぶことにした. その後気づいたことであるが, これは代数の導来圏が連接層の導来圏と圏同値になっている場合には, $\mathbb{C}^*$-同変連接層の Grothendieck 群を取った時の同変パラメーターに対応していることがわかった．なので q-安定性条件とは, 幾何学的なセッティングでは $\mathbb{C}^*$-同変安定性条件のようなものである．

2. Bridgeland 安定性条件の空間

本稿を通して, 三角圏 $\mathcal{D}$ は体 k 上線形であるとする．

2.1. **Bridgeland 安定性条件の空間．** ここではまず最初に, [B1] に従い三角圏の Bridgeland 安定性条件の定義を確認し, その後に安定性条件の空間の構造に関する Bridgeland の基本定理について説明する．

$\mathcal{D}$ を三角圏とし, $K(\mathcal{D})$ をその Grothendieck 群とする．また, 三角圏対象 $E\in\mathcal{D}$ に対して, その次数 n シフトを $E[n]\in\mathcal{D}$ と書く．

Definition 2.1 ([B1])**.** $\mathcal{D}$ 上の **Bridgeland 安定性条件** $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ とは, 中心電荷と呼ばれる群準同型 $Z \colon K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ と, スライシング と呼ばれる実数 $\phi \in \mathbb{R}$ でパラメトライズされた充満部分加法圏 $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{D}$ の族 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ であって, 以下の公理 (a), (b), (c), (d) を満たすのもである.

(a) 対象 $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$ に対して, ある正の実数 $m(E) \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, その中心電荷は $Z(E) = m(E)e^{i\pi\phi}$ となる.

(b) 任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$ が成り立つ.

(c) $\phi_1 > \phi_2$ であるとき $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)\,(i = 1, 2)$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A_1, A_2) = 0$ が成り立つ.

(d) 対象 $0 \neq E \in \mathcal{D}$ に対して, 完全三角形の列

$$\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_2 \arrow[r] \arrow[dl] & \ldots \arrow[r] & E_{m-1} \arrow[rr] & & E_m = E \arrow[dl] \\
& A_1 \arrow[ul, dashed] & & A_2 \arrow[ul, dashed] & & & & A_m \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd}$$

であって,

$$\phi_1 > \phi_2 > \cdots > \phi_m$$

と $A_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$ となるものが存在する.

スライシング $\mathcal{P}(\phi)$ に含まれるゼロではない対象は, フェイズ ϕ の半安定対象と呼ばれる. 言い換えると, 充満部分加法圏 $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{D}$ はフェイズ ϕ の半安定対象とゼロ対象から成る部分圏である. 上述の公理 (d) は, 任意の対象がフェイズの減少していく半安定対象たちで分解できることを主張する公理である. この公理 (d) による完全三角の列は, 対象 E に対する **Harder-Narasimhan** フィルトレーションと呼ばれる.

ここで [KS] に従い, 安定性条件に対する台性質を導入する. 以下, $K(\mathcal{D})$ が $\mathbb{Z}$ 上有限ランクを仮定する. また, 有限次元ベクトル空間 $K(\mathcal{D}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 上のノルム $\|\cdot\|$ を一つ固定する. 安定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ に対し, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の半安定対象 E に対して

$$C \cdot |Z(E)| > \|[E]\| \tag{2.1}$$

が満たされる時, 安定性条件 σ は台性質を持つという.

ここで安定性条件の空間を考える. $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ 上の安定性条件で, 台性質を持つもの全てを集めた集合とする. この集合 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ を $\mathcal{D}$ 上の安定性条件の空間と呼ぶ. 以下で Bridgeland による安定性条件の空間の構造に関する基本定理を述べる. ここで $K(\mathcal{D})$ が $\mathbb{Z}$ 上有限ランクという仮定から, 中心電荷が値を取る空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C})$ は有限次元複素ベクトル空間であることに注意しておく.

Theorem 2.2 ([B1], Theorem 1.2)**.** 安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ には自然な位相が存在し, 中心電荷を取る写像

$$\mathcal{Z}\colon \mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K(\mathcal{D}), \mathbb{C}), \quad (Z, \mathcal{P}) \mapsto Z$$

は位相空間の局所同型写像になる. 特にこの写像 $\mathcal{Z}$ により, 安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ に複素多様体の構造が誘導される.

Remark 2.3. より正確には, 原論文 [B1] において Bridgeland は台性質を持つ安定性条件ではなく, 局所有限性 [B1, Definition 5.7] を持つ安定性条件を考えている. この局所有限性と台性質の関係性については, [BM, Appendix B] で詳しく調べられている. 具体的には [BM, Proposition B.4] により, 安定性条件が局所有限かつ **full**[B2, Definition 4.2] であることと, 台性質を持つことが同値であることが知られている.

2.2. **数値的安定性条件.** 前節では三角圏 $\mathcal{D}$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{D})$ が $\mathbb{Z}$ 上有限ランクであるという仮定の下で安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ が有限次元複素多様体になることを見たが, 一般にこの仮定が満たされるとは限らない. 例えば X を滑らかな $\mathbb{C}$ 上の射影代数多様体としたとき, その上の連接層の導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}\,X)$ は一般にこの仮定を満たさない. しかしながら, そういった場合も数値的 Grothendieck 群が有限ランクであれば, 数値的安定性条件を考えることで, 同様の定理が成り立つことについて説明する.

以下, 三角圏 $\mathcal{D}$ は **Hom-finite**, すなわち任意の対象 $E, F \in \mathcal{D}$ に対して

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F[i]) < \infty$$

であると仮定する. $K(\mathcal{D})$ 上の **Euler 形式** $\chi\colon K(\mathcal{D}) \times K(\mathcal{D}) \to \mathbb{Z}$ を

$$\chi(E, F) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F[i])$$

により定義する.

Definition 2.4. $\mathcal{D}$ の**数値的 Grothendieck 群** $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ を

$$\mathcal{N}(\mathcal{D}) := K(\mathcal{D}) / K(\mathcal{D})^{\perp}$$

により定義する. ここで

$$K(\mathcal{D})^{\perp} := \{\, [F] \in K(\mathcal{D}) \mid 任意の\ [E] \in K(\mathcal{D})\ に対して\ \chi(E, F) = 0 \,\}$$

である. 特に $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ が $\mathbb{Z}$ 上有限ランクの時, $\mathcal{D}$ は**数値的有限**であると言う.

数値的有限であるような三角圏の例として以下がある.

Example 2.5. X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体とし, $\mathcal{D} := \mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}\, X)$ を X 上の連接層の導来圏とする. X がコンパクトなので $\mathcal{D}$ は Hom-finite になる. このとき, chern 指標

$$\mathrm{ch}\colon K(\mathcal{D}) \to H^*(X;\mathbb{Q})$$

を考えると, その kernel は $K(\mathcal{D})^{\perp}$ で与えられる. これは例えば Hirzebruch-Riemann-Roch の定理を使えばわかる. よって, chern 指標は同型

$$\mathrm{ch}\colon \mathcal{N}(\mathcal{D}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H^*(X;\mathbb{Q})$$

を与えるので, $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ は $\mathbb{Z}$ 上有限ランクであり, $\mathcal{D}$ は数値的有限であることがわかる.

Definition 2.6. $\mathcal{D}$ 上の安定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ の中心電荷 $Z\colon K(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$ が数値的 Grothendieck 群 $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ を経由するとき, σ を数値的安定性条件と言う. $\mathcal{D}$ 上の数値的安定性条件で, 台性質を持つもの全てを集めた集合を $\mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ と書く.

すると, 先程と同様の以下の定理が成り立つ.

Theorem 2.7 ([B1], Corollary 1.3)**.** *$\mathcal{D}$ を数値的有限な三角圏とする. このとき, 数値的安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ には自然な位相が存在し, 中心電荷を取る写像*

$$\mathcal{Z}\colon\ \mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{N}(\mathcal{D}), \mathbb{C}), \quad (Z, \mathcal{P}) \mapsto Z$$

は位相空間の局所同型写像になる. 特にこの写像 $\mathcal{Z}$ により, 安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{N}}(\mathcal{D})$ に複素多様体の構造が誘導される.

2.3. **安定性条件の空間への群作用.** 安定性条件の空間には自然な $\mathbb{C}$-作用と $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$-作用が存在する. これについて説明をする.

最初に $\mathbb{C}$ 作用について説明をする. 安定性条件 $(Z, \mathcal{P})$ に対し, 複素数 $s \in \mathbb{C}$ の作用 $s \cdot (Z, \mathcal{P}) = (Z', \mathcal{P}')$ が

$$Z' := e^{-i\pi s} Z, \quad \mathcal{P}(\phi)' := \mathcal{P}(\phi + \mathrm{Re}\,(s))$$

により定まる. 次に自己圏同値群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ の作用について説明をする. 安定性条件 $(Z, \mathcal{P})$ に対し, 自己圏同値 $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ の作用 $\Phi \cdot (Z, \mathcal{P}) = (Z', \mathcal{P}')$ が

$$Z' := Z \circ \Phi^{-1}, \quad \mathcal{P}(\phi)' := \Phi(\mathcal{P}(\phi))$$

により定まる. 特に整数 $n \in \mathbb{C}$ の作用と整数シフト $[n] \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ の作用は定義から一致することがわかり, $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ 上への作用に関して

$$\mathbb{C} \cap \mathrm{Aut}(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}$$

となることがわかる. この意味において安定性条件の空間に対する $\mathbb{C}$-作用は, 次数シフトによる $\mathbb{Z}$-作用の自然な拡張であると考えることが出来る. この視点は, q-安定性条件を定義する際に重要となる.

この章では [IQ] に従い q-安定性条件を導入し, q-安定性条件の空間に対する基本定理を述べる. また, q-安定性条件の具体的な構成法として有用である誘導定理を述べる.

3.1. **q-安定性条件の空間.** $R := \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ とする. 三角圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ を以下の仮定を満たす特別な自己圏同値 W を持つ三角圏とする. (原論文 [IQ] では W ではなく $\mathbb{X}$ がノーテーションとして使われている.)

Assumption 3.1. $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ に R-加群構造を

$$q^k \cdot [E] := [\mathrm{W}^k(E)]$$

により定義した時, $K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ は有限ランクの R-加群であり, 自由部分と捩れ部分のみから成る.

以下, $k \in \mathbb{Z}$ としてノーテーション $E[k\mathrm{W}] := \mathrm{W}^k(E)$ を用いる. これは自己圏同値 W が通常の次数シフト [1] とは別の新しい方向, W-方向に対する次数シフトと思いたいからである. 実際にあとで出てくる例では, W は $\mathbb{C}^*$-作用のウェイトのシフト関手として与えられる.

Definition 3.2. $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ を Assumption 3.1を満たす三角圏とする. $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の q-安定性条件 $(Z, \mathcal{P}, s)$ とは, Definition 2.1 の意味での $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の Bridgeland 安定性条件 $(Z, \mathcal{P})$ と複素数 $s \in \mathbb{C}$ の組で以下の公理 (e), (f) を満たすものである.

(e) 中心電荷 $Z\colon K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \to \mathbb{C}_s$ は R-加群の準同型である. ここで $\mathbb{C}_s$ は複素数 $\mathbb{C}$ に $q = e^{i\pi s}$ という特殊化を通して R-加群の構造を入れたものを表す.

(f) スライシング $\mathcal{P}$ は等式 $\mathcal{P}(\phi)[\mathrm{W}] = \mathcal{P}(\phi + \mathrm{Re}\,(s))$ を満たす.

この公理 (e), (f) は Section 2.3 の群作用を使うと, 条件

$$\mathrm{W} \cdot (Z, \mathcal{P}) = s \cdot (Z, \mathcal{P})$$

と同値であることがわかる. この意味において q-安定性条件の公理は, 関手 W を複素数 s シフトと同一視していると思える.

q-安定性条件に対しても台性質が定義されるが, ここでは省略するので詳細は [IQ, Definition 2.8] を参照されたい. $\mathrm{QStab}_s(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ で $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の q-安定性条件で特殊化の複素数パラメーター s を持ち, 台性質を持つのも全体を集めた集合を表す. すると, Bridgeland の基本定理と同様の次の定理が成立する.

Theorem 3.3 ([IQ], Theorem 2.10)**.** q-安定性条件の空間 $\mathrm{QStab}_s(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ には自然な位相が存在し, 中心電荷を取る写像

$$\mathcal{Z}_s\colon \mathrm{QStab}_s(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \to \mathrm{Hom}_R(K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}), \mathbb{C}_s), \quad (Z, \mathcal{P}, s) \mapsto Z$$

は位相空間の局所同型写像になる．特にこの写像 $\mathcal{Z}_s$ により，安定性条件の空間 $\mathrm{QStab}_s(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ に複素多様体の構造が誘導される．

Remark 3.4. 三角圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ の Grothendieck 群 $K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ は $\mathbb{Z}$ 上無限ランクなので, 通常の Bridgeland 安定性条件の空間は次元が無限になってしまいあまりうまく機能しないが, q-安定性条件の空間を考えることで次元を有限に落とすことが出来ている．このように q-安定性条件は, Grothendieck 群が Assumption 3.1 を満たすような場合に適切な定義になっていると考えられる．

3.2. **数値的 q-安定性条件.** 代数幾何学的な設定では, 場合によっては $K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ が R 上有限ランクにならない場合がある．このような場合は Section 2.2 と同様に数値的 q-安定性条件を考えることでうまくいく場合がある．この章では三角圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ を特別な自己圏同値 W を持ち, 次の仮定を満たすものとする．

Assumption 3.5.

- $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ は W-**Hom-finite**, すなわち任意の $E, F \in \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ に対して
$$\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{W}}}(E, F[i+j\mathrm{W}]) < \infty$$
が成り立つ．
- 任意のゼロでないクラス $[E] \in K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ に対して, $\{q^k \cdot [E]\}_{k\in\mathbb{Z}}$ の張る $K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ の部分 R-加群は R と同型．

このとき, q-**Euler** 形式 $\chi_q\colon K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \times K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \to R$ を
$$\chi_q(E, F) := \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} (-1)^i q^j \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{W}}}(E, F[i+j\mathrm{W}])$$
により定義する．また, q-数値的 Grothendieck 群を Section 2.2 と同様に $\mathcal{N}_q(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) := K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})/K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})^{\perp}$ により定義する．$\mathcal{N}_q(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ が R 上有限ランクであり, 自由部分と捩れ部分のみからなるとき, $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ は q-**数値的有限**であると言う．数値的 q-安定性条件やその空間 $\mathrm{QStab}_{\mathcal{N},s}(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ を前節までと同様に定義すると次が成立する．

Theorem 3.6. $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ を q-数値的有限な三角圏とする．このとき, q-安定性条件の空間 $\mathrm{QStab}_{\mathcal{N},s}(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ には自然な位相が存在し, 中心電荷を取る写像
$$\mathcal{Z}_s\colon\ \mathrm{QStab}_{\mathcal{N},s}(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \to \mathrm{Hom}_R(\mathcal{N}_q(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}), \mathbb{C}_s), \quad (Z, \mathcal{P}, s) \mapsto Z$$
は位相空間の局所同型写像になる．特にこの写像 $\mathcal{Z}_s$ により，安定性条件の空間 $\mathrm{QStab}_{\mathcal{N},s}(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ に複素多様体の構造が誘導される．

3.3. W-**baric heart.** この章では W-baric heart と呼ばれる $\mathcal{D}_W$ に対する構造を導入する．これは, $\mathbb{C}^*$-作用に対する圏論的なウェイト分解と思えるものである．

Definition 3.7. $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ の充満三角部分圏 $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ が以下の条件 (1), (2) を満たす時, **W-baric heart** と呼ぶ.

(1) $k_1 > k_2$ であるとき $A_i \in \mathcal{D}_0[k_i\mathrm{W}]\,(i = 1, 2)$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{W}}}(A_1, A_2) = 0$ が成り立つ.

(2) 対象 $0 \neq E \in \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ に対して, 完全三角形の列

$$\begin{tikzcd}
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_2 \arrow[r] \arrow[dl] & \dots \arrow[r] & E_{m-1} \arrow[rr] & & E_m \arrow[dl] = E \\
& A_1 \arrow[ul, dashed] & & A_2 \arrow[ul, dashed] & & & & A_m \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd}$$

であって,

$$k_1 > k_2 > \cdots > k_m$$

と $A_i \in \mathcal{D}_0[k_i\mathrm{W}]$ となるものが存在する.

特に上の条件 (2) から直ちに

$$K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \xrightarrow{\sim} K(\mathcal{D}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

がわかる. よって, ただちに次が従う.

Lemma 3.8. $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ が W-*baric heart* $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ を持つとする. このとき

- $K(\mathcal{D}_0)$ が $\mathbb{Z}$ 上有限ランクなら, $K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ は R 上有限ランクであり, 自由部分と捩れ部分以外は持たない.
- $K(\mathcal{D}_0)$ が数値的有限なら, $K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}})$ は q-数値的有限となる.

3.4. **大域次元関数と誘導定理.** この章では W-baric heart $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の安定性条件を W-方向に貼り合わせることで, $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の q-安定性条件を構成する方法を説明する.

まず最初に, 大域次元関数と呼ばれる安定性条件の空間ン上の関数を導入しておく. 三角圏 $\mathcal{D}_0$ 上の安定性条件 $\sigma = (Z, \mathcal{P})$ に対して, 大域次元を

$$\mathrm{gldim}\,\sigma := \sup\{\, \phi_2 - \phi_1 \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{P}(\phi_1), \mathcal{P}(\phi_2)) \neq 0 \,\} \in [0, \infty]$$

により定義する. すると, 大域次元は $\mathrm{Stab}(\mathcal{D}_0)$ 上の連続関数

$$\mathrm{gldim}\colon \mathrm{Stab}(\mathcal{D}_0) \to [0, \infty]$$

を定める (連続性は [IQ] の Lemma 2.23 参照). この安定性条件の空間上の大域次元関数は, これ自身が興味深いものであると思われる. 詳細は [Q] を参照.

次に, $\mathcal{D}_0$ 上の安定性条件の貼り合わせを考える. を
と書く.

Construction 3.9. $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ を W-baric heart, $\widehat{\sigma} = (\widehat{Z}, \widehat{\mathcal{P}})$ を $\mathcal{D}_0$ 上の安定性条件, $s \in \mathbb{C}$ を複素数とする. このとき, R-加群の準同型 $Z\colon K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \to \mathbb{C}_s$ と $\phi \in \mathbb{R}$ でパラメトライズされた充満部分加法圏 $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ の族を以下のように構成する.

- Z は同型 $K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \cong K(\mathcal{D}_0) \otimes R$ から $\widehat{Z}\colon K(\mathcal{D}_0) \to \mathbb{C}$ に R をテンソルすることで誘導される写像

$$\widehat{Z} \otimes 1\colon K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \to \mathbb{C}[q, q^{-1}]$$

と $q = e^{i\pi s}$ という特殊化

$$q_s\colon \mathbb{C}[q, q^{-1}] \to \mathbb{C}, \quad q \mapsto e^{i\pi s}.$$

の合成

$$Z := q_s \circ (\widehat{Z} \otimes 1)\colon K(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \to \mathbb{C}[q, q^{-1}]$$

により定義する.

- $\mathcal{P}$ は

$$\mathcal{P}(\phi) := \left\langle \widehat{\mathcal{P}}(\phi - k\mathrm{Re}\,(s))[k\mathrm{W}] \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\rangle$$

により定義する. ここで部分圏 $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ に対して $\langle \mathcal{S} \rangle$ は $\mathcal{S}$ の extension closure を表す.

この構成により得られた $(Z, \mathcal{P}, s)$ が Definition 2.1 の (a), (b), (c) 及び Definition 3.2 の (e), (f) を満たすことは定義より直ちに従う. よって, $(Z, \mathcal{P}, s)$ が q-安定性条件であるかどうかを見るには, Definition 2.1 の公理 (d) が満たされるかどうかを調べる必要がある. これについては [W] と通常の次数シフトの合成がSerre関手となる場合に, 大域次元関数を用いた以下の判定条件がある.

Theorem 3.10 ([IQ], Theorem 2.25)**.** *$l \in \mathbb{Z}$ として $[l + \mathrm{W}]$ が $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の Serre 関手であると仮定する. このとき, W-baric heart $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の安定性条件 $(\widehat{Z}, \widehat{\mathcal{P}})$ から上述の Construction 3.9 により構成された $(Z, \mathcal{P}, s)$ が $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の q-安定性条件であることと*

$$l + Re\,(s) \geq \mathrm{gldim}\,\widehat{\sigma} + 1$$

となることは同値である.

4. $\mathbb{C}^*$-同変連接層の導来圏

ここではいくつかの具体例を見る. より一般に代数多様体に $\mathbb{C}^*$-作用があるときの baric 構造については, [H] を参照.

4.1. $\mathbb{C}^*$-作用に関するノーテーション. M を $\mathbb{C}^*$ の有限次元表現としたとき, M はウェイト分解 $M = \oplus_{l \in \mathbb{Z}} M_l$ を持つ. ここで M_l は $\mathbb{C}^*$-作用のウェイト l 表現であり, $t \in \mathbb{C}^*$ が $m \in M_l$ に $m \mapsto t^l m$ により作用する. $\mathbb{C}^*$ の表現 M に対して, そのウェイトを k シフトした表現 $M\{k\}$ を $M\{k\}_l := M_{k+l}$ により定義する.

特に, 以下では W をウェイト 1 シフト, すなわち W := {1} とする. $\mathbb{C}^*$ の表現環を $K_{\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt})$ とし, $\mathbb{C}_l$ を $\mathbb{C}^*$ のウェイト l の 1 次元表現とする. すると W はウェイト -1 の表現 $\mathbb{C}_{-1}$ をテンソルしていると思えるので, $R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ と $K(\mathrm{pt})$ の間に

$$K_{\mathbb{C}^*}(\mathrm{pt}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[q, q^{-1}], \quad [\mathbb{C}_{-l}] \mapsto q^l$$

という同型が得られる.

4.2. **代数多様体上のベクトル束の全空間への $\mathbb{C}^*$-作用.** X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体とし, $E \to X$ を X 上のランク r のベクトル束とする. E に自然なファイバーのスケーリングにより $\mathbb{C}^*$-作用を定義する. これは具体的には $x \in X$ とそのファイバー $v_x \in E_x$ に対して,

$$(x, v_x) \mapsto (x, tv_x) \quad (t \in \mathbb{C}^*)$$

により与えられる. $\mathcal{D}_{\mathrm{W}} := \mathcal{D}^b_{X,\mathbb{C}^*}(\mathrm{Coh}\, E)$ を E 上の $\mathbb{C}^*$-同変連接層の複体で, そのコホモロジーのサポートが X 上に乗っているものの成す有界導来圏とする. これは前節で説明したように $\mathbb{C}^*$-作用のウェイト 1 シフトによる特別な関手 $W = \{1\}$ を持つ. また, $i\colon X \to E$ をゼロ切断埋め込みとし, 押し出し $i_*\colon \mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}\, X) \to \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ の本質的像を $\mathcal{D}_0$ と書くことにする.

Proposition 4.1. *関手 i_* は充満忠実であり, 三角圏の圏同値 $\mathcal{D}^b(\mathrm{Coh}\, X) \cong \mathcal{D}_0$ が得られる. また, $\mathcal{D}_0$ は $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ の W-baric heartを与える. よって特に数値的 Grothendieck 群の間の関係*

$$\mathcal{N}_q(\mathcal{D}_{\mathrm{W}}) \cong \mathcal{N}(\mathcal{D}_0) \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

が得られ, $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ は q-数値的有限となる.

4.3. **局所 Calabi-Yau 多様体.** 前節と同じく, X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体とし, $E \to X$ を X 上のランク r のベクトル束とする. E が $\wedge^r E \cong \mathcal{O}_X$ を満たす時, E を局所 **Calabi-Yau** と呼ぶ. この時実際 $K_E \cong \mathcal{O}_E$ となり, E 標準束は自明になることが知られている. このとき, 計算により次がわかる.

Proposition 4.2. *$\mathcal{D}_{\mathrm{W}} = \mathcal{D}^b_{X,\mathbb{C}^*}(\mathrm{Coh}\, E)$ 上の次数とウェイトのシフト関手 $\mathbb{S} := [d + r + r\mathrm{W}]$ は $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の Serre 関手となる.*

特に $r = 1$ の時は Theorem 3.10 が適用可能である. 一般の r の場合, あるいは必ずしも W や次数シフトの合成が Serre 関手とは限らない場合の誘導定理 Theorem 3.10 の改良については, 現在研究中である.

4.4. **有限部分群 $G \subset \mathrm{SL}(\mathbb{C}^{\mathrm{d}})$ での商スタック.** $G \subset \mathrm{SL}(\mathbb{C}^{\mathrm{d}})$ を有限部分群とする. また, $\mathbb{C}^d$ への自然な $\mathbb{C}^*$-作用を考える. $\mathcal{D}_{\mathrm{W}} := \mathcal{D}_{0,G\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{Coh}\, \mathbb{C}^d)$ を $\mathbb{C}^d$ 上の $G \times \mathbb{C}^*$-同変連接層の複体で, そのコホモロジーのサポートが原点 $\{0\}$ 上に乗っているものの成す有界導来圏とする. また, $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}\, G)$ を原点上の G-同変連接層の有界導来圏, す

なわち G の有限次元表現の有界導来圏とする．すると $i\colon \{0\} \to \mathbb{C}^d$ により前節までと同様に以下が成り立つ．

Proposition 4.3. *i_* は充満忠実であり，その本質的像を $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ と書くと $\mathcal{D}_0 \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{mod} G)$ である．また，$\mathcal{D}_0$ は $\mathcal{D}_W$ の W-baric heart を与え，*

$$K_{G\times\mathbb{C}^*}(\mathbb{C}^d) \cong K_G(\mathrm{pt}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

が得られる．またこのとき，$\mathcal{D}_{\mathrm{W}}$ 上の Serre 関手は $\mathbb{S} = [d + d\mathrm{W}]$ で与えられる．

References

[BM] A. Bayer and E. Macrì, The space of stability conditions on the local projective plane, *Duke Math. J.* **160(2)** (2011) 263–322.

[B1] T. Bridgeland, Stability conditions on triangulated categories, *Ann. Math.* **166** (2007) 317–345. (arXiv:0212237)

[B2] T. Bridgeland, Stability conditions on K3 surfaces, *Duke Math. J.* **141(2)** (2008) 241–291. (arXiv:0212237)

[H] D. Halpern-Leistner, A categorification of the Atiyah-Bott localization formula, *preprint, available at http://pi.math.cornell.edu/ danielhl/*

[IQ] A. Ikeda and Y. Qiu, q-Stability conditions on Calabi-Yau-$\mathbb{X}$ categories and twisted periods, arXiv:1807.00469.

[KS] M. Kontsevich and Y.Soibelman, Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations, arXiv:0811.2435.

[Q] Y. Qiu, Global dimension function, Gepner equations and $\mathbb{X}$-stability conditions, arXiv:1807.00010

Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (WPI), UTIAS, The University of Tokyo, Kashiwa, Chiba 277-8583, Japan

E-mail address: akishi.ikeda@ipmu.jp