Title	Cubic hypersurfaces with positive dual defects
Author(s)	古川, 勝久
Citation	代数幾何学シンポジウム記録 (2018), 2018: 87-92
Issue Date	2018
URL	http://hdl.handle.net/2433/236407
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Cubic hypersurfaces with positive dual defects

Katsuhisa Furukawa

Abstract We show that if a cubic hypersurface with positive dual defect over the complex number field is not a cone, then either the hypersurface coincides with the secant variety of the singular locus, or the hypersurface contains a linear subvariety of dimension greater than the dual defect such that the intersection of the singular locus and a general contact locus is contained in the linear subvariety.

1 Introduction

射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して, 射影双対多様体 $X^* \subset (\mathbb{P}^N)^\vee = \mathbb{G}(N-1, \mathbb{P}^N)$ は 「X に接する超平面全体のなす集合の閉包」として定まる代数多様体である. さらに数値 $\delta_X := N - 1 - \dim(X^*)$ が定まって, これを射影退化 (dual defect) と呼ぶ. ここで, $\delta_X > 0$ である時は X が射影退化していると考えるわけだが, そうなっている典型的な例としては, cone や join や secant 多様体 やなどがある.

本稿では, 複素数体上の三次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ で $\delta_X > 0$ なるものについて, 講演にもとづき説明してゆく. (なお, さらに詳細な議論については [1] を参照してください.)

上の設定において, 三次超曲面 X は必ず特異点をもっているが, さらに「特異点集合の secant 多様体は X に含まれる」ことがわかる. つまり,

$$\mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X)) := \overline{\bigcup_{x,y \in \mathrm{Sing}(X)} \langle xy \rangle} \subset X.$$

これはなぜかと言うと, もしも特異点 x, y に対して直線 $\langle xy \rangle \subset \mathbb{P}^N$ が X に含まれないなら, $\langle xy \rangle \cap X$ の length が 4 以上となって $\deg(X) = 3$ に反するためである.

超曲面に対しては, ガウス写像 $\gamma : X \dashrightarrow X^* \subset (\mathbb{P}^N)^\vee$ を, 非特異点 x に対して埋込み接空間 $\mathbb{T}_x X \in (\mathbb{P}^N)^\vee$ を対応させる有理写像として定められる. ここで, 一般点 $x \in X$ に対するファイバー $F = \overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))}$ は, δ_X-平面 (δ_X 次元の $\mathbb{P}^N$ の線型部分多様体) となることが知られていて, contact locus とも呼ばれる. さらに $\mathrm{codim}(F \cap \mathrm{Sing}(X), F) = 1$ であることもわかる. たとえば $\delta_X = 1$ の場合は, F は $\mathrm{Sing}(X)$ と交わる直線になるわけである.

以下では本研究の背景となる 3 つの研究について, まず説明したい.

(a) F. L. Zak 氏 [5, IV, §5] は, 非特異代数多様体 $Y \subset \mathbb{P}^m$ であって codegree 3 なもの (すなわち, $\deg(Y^*) = 3$ を満たすもの) に分類を与えた. 特に, $X \subset \mathbb{P}^N$ を「$\delta_X > 0$ となる三次超曲面で, かつ $X^* \subset (\mathbb{P}^N)^\vee$ が非特異となるもの」とすると, つぎの 3 つのどれかになる: (1) $\mathbb{P}^4$ 内の 3-fold であって, Segre 埋込み $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ および $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ の外点からの線型射影 $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ の合成射による像として与えられるもの; (2) Severi 多様体の secant 多様体であるもの; (3) 左の (2) を一般に超平面切断して与えられるもの. なお, ここにあらわれる Severi 多様体とは, 次の 4 種類の等質代数多様体のことである: (i) $\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{P}^5$ への Veronese 埋込み; (ii) $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の $\mathbb{P}^8$ への Segre 埋込み; (iii) $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^5)$ の $\mathbb{P}^{14}$ への Plücker 埋込み; (iv) $\mathbb{OP}^2 \subset \mathbb{P}^{26}$ (16 次元の Cartan 多様体と呼ばれるもの).

よって「X^* が非特異である」という条件の下では, X について完全に分類されているわけだが, 一方でこうした条件のない場合には, つぎのような研究が知られている.

(b) J.-M. Hwang 氏 [3] は, 「Hessian 消滅しない三次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ であって, ある条件 (X の自己同型の巨大さにかかわる条件) を満たす」ものとして, Severi 多様体の secant 多様体を特徴づけた. ここで, ある条件といま述べたことを少し補足したい.

$\mathbb{P}^N$ を $N+1$ 次元ベクトル空間 W の射影化とみなし, $\hat{X} \subset W$ によって X の affine cone を記すことにする. また $A \in \mathrm{Hom}(S^2W, W)$ と $u \in W$ とに対し, 線型写像 $A_u : W \to W$ を $A_u(w) = A(u, w)$ によって定める. このとき無限小線型自己同型の Lie 代数 $\mathfrak{aut}(\hat{X}) = \{\varphi \in \mathrm{End}(W) \mid \varphi(w) \in T_w\hat{X} \text{ for any } w \in \hat{X}^{sm}\}$ に対し, (first) prolongation $\mathfrak{aut}(\hat{X})^{(1)} = \{A \in \mathrm{Hom}(S^2W, W) \mid A_u \in \mathfrak{aut}(\hat{X}) \text{ for any } u \in W\}$ が定まる.

注意として, 「Hessian 消滅しない三次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ が $\mathfrak{aut}(\hat{X})^{(1)} \neq 0$ を満たすなら, $\delta_X > 0$ が成立する」ことが示されている [3, Corollary 4.5]. 大雑把に理由を述べると, 零でない $A \in \mathfrak{aut}(\hat{X})^{(1)}$ が存在する時, 非特異点 $x \in X$ に対応するベクトル $w \in W$ に対して, 定義から $A_w(w) \in T_w\hat{X}$ となるが, さらには $A_w(w)$ に対応する $\mathbb{T}_xX$ の点が $\overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))} \setminus \{x\}$ の内にあると示せて, これにより $\dim \overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))} > 0$ がわかるためである.

なお, 超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ の定義斉次多項式を f と置くと, $\mathrm{hess}_f = \det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ によって Hessian が定まるが, 「X は Hessian 消滅しない」とは $\mathrm{hess}_f \neq 0$ が成立することとして定義する.

Hwang 氏は問題として, 「三次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ が $\mathrm{hess}_f \neq 0$ かつ $\mathfrak{aut}(\hat{X})^{(1)} \neq 0$ を満たすならば, X は Severi 多様体の secant 多様体となるか」というものを挙げていた. 上に述べた自己同型の巨大さにかかわる条件とは, 「$\mathfrak{aut}(\hat{X})^{(1)}$ が良い性質の元をもつ」というようなかたちで記述されている.

(c) Hessian 消滅する場合 (つまり $\mathrm{hess}_f = 0$ の場合) には, 常に $\delta_X > 0$ が成立する. さらには, U. Perazzo 氏の研究 [4] や, それに基づいた R. Gondim と F. Russo との両氏の研究 [2] によって, 「Hessian 消滅する三次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ で cone でないもの」について, $N \leqslant 6$ では分類がなされている. 特に, こうした X の内から $\mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X)) \neq X$ となる例を得られる.

典型的な例として $X = (x_0x_N^2 + x_1x_{N-1}x_N + x_2x_{N-1}^2 + F(x_3, \ldots, x_N) = 0) \subset \mathbb{P}^N$ を考えると, これは Hessian 消滅するため $\delta_X > 0$ であり, 一方で $\mathrm{Sing}(X) \subset (x_{N-1} = x_N = 0)$ でもあって, ゆえに $\mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X)) \neq X$ であることがわかる.

ここまでに述べた背景のもと, 射影双対 X^* が特異である場合もふくめて, $\delta_X > 0$ を満たす三次超

曲面についてどんなことがわかるのか調査したところ, 現在までに次の結果が得られた.

Theorem 1. $X \subset \mathbb{P}^N$ は $\delta_X > 0$ を満たす三次超曲面で, cone ではないものとする. この時つぎの 3 つのうち, どれかが成立する.

(I) $\mathrm{Sing}(X)$ のある既約成分 S に対し, $X = \mathrm{Sec}(S)$ が成立する.

(II) ある非特異二次超曲面 $Q_i \subset \langle Q_i \rangle = \mathbb{P}^{\dim Q_i + 1} \subset \mathbb{P}^N$ $(i = 1, 2)$ で, 共通部分 $Q_1 \cap Q_2$ が一点集合でそれが $\langle Q_1 \rangle \cap \langle Q_2 \rangle$ に一致するものに対し, $X = \mathrm{Join}(Q_1, Q_2) := \overline{\bigcup_{x \in Q_1, y \in Q_2} \langle xy \rangle}$ が成立する. なお, この場合は $\delta_X = 1$ となる.

(III) ある線型部分多様体 $P \subset X$ で次元が δ_X より大きいものが存在して, 一般点 $x \in X$ について $\overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))} \cap \mathrm{Sing}(X) \subset P$ が成立する. なお, この場合は $X \neq \mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X))$ となる.

先に述べたように, 本定理の (I) の例は Severi 多様体の secant 多様体や, その一般の超平面切断やによって与えられる. ちなみに X^* が特異でもよいため, より一般的に, Severi 多様体の secant 多様体と特殊なものを含むいくつかの超平面との共通部分を取ってもよい. (III) の例は Hessian 消滅する三次超曲面によって与えられる. また, (II) の場合は具体的に X の定義式が決定され, 特に Hessian 消滅しないことなどもわかる.

2 Strategy of the proof of Theorem 1

ここでは, 主定理をどのように示すのかについて概略を述べたい. まず次のように δ_X によって場合分けして考える.

(A) $\delta_X = 1$ の場合は以下の二つの命題をそれぞれ示す.
  (A-1) $X = \mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X))$ である時, Theorem 1 の (I) あるいは (II) が成立する.
  (A-2) $X \neq \mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X))$ である時, (III) が成立する.

(B) $\delta_X > 0$ の場合は, 上述の $\delta_X = 1$ の場合に帰納法によって帰着される. これは, 一般の超平面 $H \subset \mathbb{P}^N$ を取った時に, $\delta_{X \cap H} = \delta_X - 1$ が成立することによる.

はじめに (A-1) について解説する. $X = \mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X))$ が成立し, かつ (I) が成立しない場合を考える. このときは, ある $Z_1, Z_2 \subset \mathrm{Sing}(X)$ について $X = \mathrm{Join}(Z_1, Z_2)$ となる形であるわけだが, そうした設定で, 次元についての式「$\dim(\langle Z_i \rangle) = \dim(Z_i) + 1$ $(i = 1, 2)$」が成りたつことがまず示される. すると $\langle Z_i \rangle = \mathrm{Sec}(Z_i) \subset X$ を得られて, この $\langle Z_i \rangle$ を含むように一般の $(\dim(\langle Z_i \rangle) + 1)$-平面 $L \subset \mathbb{P}^N$ を取ると, ある二次超曲面 $\tilde{Q}_i \subset L$ について

$$L \cap X = \langle Z_i \rangle \cup \tilde{Q}_i$$

という式が得られる. 一方で $Z_i \subset \mathrm{Sing}(L \cap X) = (\langle Z_i \rangle \cap \tilde{Q}_i) \cup \mathrm{Sing}(\tilde{Q}_i) \subset \tilde{Q}_i$ であって, ゆえに $Z_i \subset \langle Z_i \rangle \cap \tilde{Q}_i$ なので, 次元を考えれば $Z_i = \langle Z_i \rangle \cap \tilde{Q}_i$ がわかる. つまり Z_i は $\langle Z_i \rangle$ 内の二次超曲面である. こうして議論を進めれば, 最後には (II) の成立が導かれるというしくみになっている.

さて, 本稿の以下の議論では (A-2) の場合について扱う. そのため, $\delta_X = 1$ かつ $X \neq \mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X))$ であることを要請しよう. すると一般点 $x \in X$ に対して, ガウス写像のファイバー $F = \overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))}$ は $\mathrm{Sing}(X)$ と交わる直線となる. さらに $F \cap \mathrm{Sing}(X)$ が一点集合となる (そうでないと, $F \subset \mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X))$ なので, 結局 $X = \mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X))$ となって, いましがた置いた要請に反するためである). このような点の軌跡を考える. つまり,

$$Z = \overline{\bigcup_{x \in X:\ \text{general}} \overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))} \cap \mathrm{Sing}(X)} \subset \mathrm{Sing}(X) \tag{1}$$

と定めると, これは既約閉集合であることがわかる. さて, (A-2) のステップで大切なのは, 以下の結果を得ることである.

Theorem 2. $X \subset \mathbb{P}^N$ は $\delta_X = 1$ かつ $X \neq \mathrm{Sec}(\mathrm{Sing}(X))$ である三次超曲面で, cone ではないものとする. このとき上のように定めた $Z \subset \mathrm{Sing}(X)$ に対し, Z によって張られる線型部分多様体 $\langle Z \rangle \subset \mathbb{P}^N$ は X に含まれる.

次節では, じっさいにこの結果がどのように示されるのか, おおよその流れを説明してゆく.

3 Outline of the proof of Theorem 2

背理法によるため, Theorem 2 の前提のもと, さらに $\langle Z \rangle \not\subset X$ を要請して矛盾を出すことになる. この要請の下でつぎの命題が得られる.

Proposition 3. 一般点 $w \in Z$ に対して $\mathrm{Cone}_w(Z) \not\subset \mathrm{Sing}(X)$ が成りたつ.

(証明はこみいって長くなるので略すが, アイデアとしては $X \cap \langle Z \rangle$ を考えて, 実のところ $\mathrm{Cone}_w(Z) \not\subset \mathrm{Sing}(X \cap \langle Z \rangle)$ であることを示す.)

さて, 一般点 $w \in Z$ に対して $C_w \subset X$ を閉集合 $\overline{\{ x \in X \mid w \in \mathbb{T}_x X \}}$ の既約成分として取る. ここで $\dim(C_w) = N - 2$ である. 定義より一般点 $x \in C_w$ に対して $\overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))} \subset C_w$ なので, $\dim \gamma(C_w) = N - 3$ の成立がわかる. また, つぎが成立する.

Lemma 4. C_w は w を頂点とする cone となる.

Proof. 一般点 $x \in C_w$ に対してファイバー $F = \overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))}$ を取り, さらに平面 $M = \langle F, w \rangle \subset \mathbb{P}^N$ を取る. また共通部分 $F \cap \mathrm{Sing}(X)$ となる点 z を取っておく. ここで $M \not\subset X$ の場合を考える. このとき $x' \in F$ について $w \in \mathbb{T}_x X = \mathbb{T}_{x'} X$ なので, $F \subset \mathrm{Sing}(X \cap M)$ である. 集合として $F \cup \langle zw \rangle = X \cap M$ なので, 結局 $F = \mathrm{Sing}(X \cap M)$ である. 一方で $w \in \mathrm{Sing}(X \cap M)$ なことから矛盾が生じる.

よって $M \subset X$ を得る. これより $u \in \langle xw \rangle$ に対し, $w \in M \subset \mathbb{T}_u X$ となって, $u \in C_w$ が成立すると結論づけられる. □

では Theorem 2 を背理法で示して行こう. 一般点 $w, w' \in Z$ を取れば, Proposition 3により

$y \in \langle ww' \rangle \setminus \mathrm{Sing}(X)$ なる点を取れる．そこで，ここでの接空間 $T = \mathbb{T}_y X \subset \mathbb{P}^N$ を取っておく．また，

$$X^\circ = \{\, x \in X^{sm} \mid \overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))} \text{ は直線で } \mathrm{Sing}(X) \text{ と一点のみで交わる} \,\}$$

と定めておく．証明は略すが，つぎの主張が成立する．

Claim 5. $Z \not\subset T$ である．また，一般点 $x \in C_w \cap X^\circ$ に対して，共通部分 $\overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))} \cap \mathrm{Sing}(X)$ となる一点は Z の一般点である．

さらにガウス写像 $\gamma : X \dashrightarrow X^* \subset (\mathbb{P}^N)^\vee$ を考えるとき，以下が成立する．

Claim 6. $\gamma(C_w \cap T) = \gamma(C_w)$

Proof. 一般点 $x \in C_w$ を取って，$F = \overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))}$ を取り，$F \cap \mathrm{Sing}(X) = \{z\}$ であるとする．このとき上の Claim 5 から，$z \notin T$ と要請できる．特に $F \cap T \neq \{z\}$ なので，共通部分 $F \cap T$ は X の非特異な点であることがわかる．これより主張が得られる． □

加えて，つぎの主張も証明は略して用いる．

Claim 7. 一般点 $x \in C_w$ に対して，直線 $\langle xw \rangle$ 上を一般点 u が走るとき $Z \cap \mathbb{T}_u X$ は Z を渡る (sweep する)．つまり $Z = \overline{\bigcup_{u \in \langle xw \rangle : \text{ general}} Z \cap \mathbb{T}_u X}$ が成立する．

ここで，

$$C_w^\circ = C_w^\circ(w') := \{\, x \in C_w \cap X^\circ \mid \text{ある } u \in \langle xw \rangle \cap X^\circ \text{ が存在して } w' \in \mathbb{T}_u X \text{ が成立する} \,\}$$

と定めておくと，以下の主張が成立する．

Claim 8. 一般点 $t \in C_w \cap T$ に対して，ある $t_0 \in \langle tw \rangle$ が存在して $t_0 \neq w$ かつ $w' \in \mathbb{T}_{t_0} X$ が成立する．

Proof. 証明は概要だけ述べる．Claim 6 により，$t \in C_w \cap T$ を走らせたとき $\overline{\gamma^{-1}(\gamma(t))}$ が C_w を渡る．これによって，$x \in \overline{\gamma^{-1}(\gamma(t))} \cap C_w^\circ$ なる点を取れる．定義により，ある $u \in \langle xw \rangle \cap X^\circ$ で $w' \in \mathbb{T}_u X$ となるものが取れる．また，点 z を共通部分 $\overline{\gamma^{-1}(\gamma(x))} \cap Z = \overline{\gamma^{-1}(\gamma(t))} \cap Z$ である一点として取っておく．

上述の設定のもと，平面 $M = \langle wxz \rangle \subset X$ を取れば，$\dim \gamma(M) = 1$ であって，一般点 $y \in \gamma(M)$ について $z \in \overline{\gamma^{-1}(\gamma(y))}$ が成立することがわかる．これを認めれば，$\gamma(\langle uz \rangle) = [\mathbb{T}_u X] \in (\mathbb{P}^N)^\vee$ であることから，必要とされる t_0 を二直線の交点 $\langle tw \rangle \cap \langle uz \rangle \subset M$ として取ることができる． □

ここまでの話をつかって議論を終結させよう．上のように $t_0 \in T$ を取って，平面 $L = \langle t_0 w w' \rangle \subset \mathbb{P}^N$ を考える．このとき $L \subset X$ である (さもないと，$y, t_0, w, w' \in \mathrm{Sing}(X \cap L)$ となって矛盾が生じる)．よって $w' \in L \subset \mathbb{T}_t X$ を得られて，Claim 6 とあわせると

$$\gamma(C_w) = \gamma(C_w \cap T) \subset (w')^*$$

の成立がわかる．いま $w \in Z$ は一般点だったので, $X^* = \gamma(X) \subset (w')^*$ となり, X が cone となってしまうので矛盾である．以上のような流れで Theorem 2 の証明がおわる．

参考文献

[1] K. Furukawa, Cubic hypersurfaces with positive dual defects, arXiv:1806.03429.

[2] R. Gondim and F. Russo, Cubic hypersurfaces with vanishing hessian, J. Pure Appl. Algebra **219** (2015) 779–806, arXiv:1312.1618 (the corrected version).

[3] J.-M. Hwang, Prolongations of infinitesimal automorphisms of cubic hypersurfaces with nonzero Hessian. arXiv:1612.09020.

[4] U. Perazzo, Sulle varietá cubiche la cui hessiana svanisce identicamente. G. Mat. Battaglini **38**, 337354 (1900)

[5] F. L. Zak, Tangents and secants of algebraic varieties. Transl. Math. Monographs **127**, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, Tokyo, Japan

E-mail: katu@ms.u-tokyo.ac.jp