

Kummer surfaces, and Enriques surfaces with tree structure

向井 茂 (MUKAI, Shigeru)

概要

Taking the quotient of the Jacobian Kummer surface X_{octa} of the octahedral curve $y^2 = x(x^4 - 1)$ by a Hutchinson-Göpel involution ε_H , we obtain an Enriques surface S_{octa} with action of the group $T_{192} = (C_2^3) \rtimes \mathfrak{S}_4$ of order 192 ([11]). The automorphism group of S_{octa} is the semi-direct product $(C_2^{*8}) \rtimes T_{192}$ of the free product of 8 involutions by T_{192} . In particular $\text{Aut } S_{octa}$ is virtually free.

代数曲面の自己同型群は小平次元 0 や有理曲面が最も面白そうに見える。一般型 ($\kappa = 2$) では有限であり、中間型 ($\kappa = 1$) や不正則線織面 ($q \geq 1$) の自己同型群は実質的に曲線的である。ここでは、 $\kappa = 0$ の一クラスである Enriques 曲面 S の場合を考察する。自己同型群 $\text{Aut } S$ は有限にも無限にもなりうるが、有限の場合は Nikulin[14] と金銅 [4] によって分類された。筆者的には無限位数の場合でも Vinberg[16] レベルで $\text{Aut } S$ をよく理解したいという動機で共著論文 [12] を書いた。これの続編を共著者である大橋久典氏と準備中であるが、ここでは、この間に学んだことから時間と紙数の許す範囲で説明したい。

なお、[12, Remark 5] に書いた実質的コホモロジー次元 (virtual cohomology dimension) と大きな枠組みとしての

予想 Enriques、Coble、または楕円 $K3$ 曲面 S の自己同型群の実質コホモロジー次元 $\text{vcd}(\text{Aut } S)$ は $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ が S の種数 1 fibration を全て走るときの Mordell-Weil 階数の最大値 $\max_f \text{MW-rk}(f)$ に一致するだろう。

については言及を避けた。これらについては、9月の代数学シンポジウムの報告集 [10] を参考にされたい。

さて、論文 [12] では射影空間 \mathbb{P}^3 内で斉次対称式で定義される 4 次曲面

$$\bar{X}_{k,l}: s_2^2 = ks_4 + ls_1s_3, \quad k + 16l \neq 36, k \neq 4, 4l + k \neq 0, k, l \in \mathbb{C} \quad (1)$$

を考えた。ただし、 s_i は斉次座標の i 次基本対称式である。そして、これを標準的な Cremona 変換

$$\varepsilon: (x_1 : \cdots : x_4) \mapsto \left(\frac{1}{x_1} : \cdots : \frac{1}{x_4} \right) \quad (2)$$

で割ってえられる Enriques 曲面の 2 次元族 $\{S_{k,l}\}$ と、半直積からの準同型写像

$$(C_2^{*4}) \rtimes \mathfrak{S}_4 \rightarrow \text{Aut}(S_{k,l}), \quad (3)$$

を定義した (§1). ただし、 C_2^{*4} は 4 個の位数 2 の群 $\langle \sigma_1 \rangle, \dots, \langle \sigma_4 \rangle$ の自由積 (free product) である. 次が主結果であった.

定理 1 $l = 0$ のとき、準同型写像 (3) は同型である.

$l \neq 0$ のとき準同型写像 (3) がどうなるかについて一般的には未解決であるが、

$$(k-4)(l-4) = 16 \quad (4)$$

が成立するとき、(3) は全射になれない ([12, Remark 4(1)]). 実際、(4) をみたく 4 次曲面 $\bar{X}_{k,l}$ は位数 3 の自己同型をもつ Kummer 4 次曲面に他ならず、その自己双対性のために、(3) とは独立な 4 個の対合 $\sigma_5, \dots, \sigma_8$ が新たに出現する. ここでは、(4) の中でも最も対称性の高い $(k, l) = (-4, 2)$ の場合を正 8 面体的と呼び (注意 1)、これを中心に説明する. この場合の 4 次曲面は

$$X_{octa} = X_{-4,2} : (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) + (x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) + (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) + 2x_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \quad (5)$$

と表され、Enriques 曲面 $S_{octa} = S_{-4,2}$ は \mathbb{P}^3 内の特異 6 次曲面

$$\bar{S}_{octa} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \sqrt{-1} \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} \right) x_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \quad (6)$$

の正規化と同型である ([11]). 主結果は次の通りである.

定理 2 正 8 面体的 Enriques 曲面 S_{octa} の自己同型群は半直積 $(C_2^{*8}) \rtimes H_{192}$ と同型である. ただし、 C_2^{*8} は 8 個の位数 2 の群 $\langle \sigma_1 \rangle, \dots, \langle \sigma_8 \rangle$ の自由積で、位数 192 の群 $H_{192} = 2^3 \cdot \mathfrak{S}_4 \simeq \text{Aut}(\bar{S}_{octa} \subset \mathbb{P}^3)$ は生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_8$ に置換として作用する.

注意 1 i) よく知られているように、Kummer 4 次曲面は種数 2 曲線 C の Jacobian Kummer 曲面である. この表示において、標準射 $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の分岐が正 8 面体の頂点 (標準的には $0, \pm 1, \pm \sqrt{-1}, \infty$) となる場合が $X_{octa} = X_{-4,2}$ である.

ii) $(k-4)(l-4) = 16$ のときの対合 (2) は Hutchinsonson [3] が一般の Kummer 4 次曲面に対して見つけたものの特別な場合である.

規約：代数多様体は全て複素数体 \mathbb{C} 上で考える.

§1 [12] の復習

(1) の対称 4 次曲面 $\bar{X}_{k,l}$ は 4 個の座標点 $(1:0:0:0), \dots, (0:0:0:1)$ で特異である。標準 Cremona 変換 (2) が極小特異点解消 $X_{k,l}$ に導く対合を ε で表す。(1) の 3 条件より、 ε は固定点をもたず、商曲面 $S_{k,l} := X_{k,l}/\varepsilon$ は Enriques 曲面になる。

さて、座標点は $\bar{X}_{k,l} \subset \mathbb{P}^3$ の 2 重点なので、射影 $X_{k,l} \rightarrow \mathbb{P}^2$ は 2 重被覆である。これの被覆対合 $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_4$ は ε と可換で、 $S_{k,l}$ の自己同型に降る。これらを $\sigma_1, \dots, \sigma_4$ で表す。これらの自己同型と座標の置換による \mathfrak{S}_4 作用が準同型写像 (3) を誘導する。

このように (3) の構成自体は自然なものであるが、(4) が成立すると、もはや自然な近似ではなくなってしまう。次節では Kummer の原論文での表示を用いてこれを説明しよう。

§2 Kummer の 1864 年論文 [6]

この論文は次のパラグラフではじまる。

Fresnel の波曲面は 4 次曲面で 16 個の特異点をもつ。そのうちの 4 個は実で主平面上にあり、8 個は虚で別の 2 枚の主平面上にある。そして、残りの 4 特異点は無限遠平面上にある。このように 16 個の特異点をもつ 4 次曲面が実際に存在することがわかる。しかし、4 次曲面は 16 個より多くの特異点をもつことはできない。一般の 4 次曲面の射影双対は 36 次であるが、特異点を 1 個もつ毎にその次数が 2 づつ減少し、特異点が 16 個を超えるとその次数は 2 以下となって矛盾する。

これに続いて 16 個の特異点をもつ 4 次曲面の一般型を求めていくが、その結論は我々がよく見かけるものとは異なる。しかし、今扱う Enriques 曲面には最適なので紹介する。

まず、 \mathbb{P}^3 内の 4 次曲面の 4 次元族

$$X : \phi(x, y, z, t)^2 = 16Kxyzt, \quad K \in \mathbb{C} \quad (7)$$

を考えよう。ただし、 ϕ は 2 次式

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2a(xt + yz) + 2b(yt + xz) + 2c(zt + xy), \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

である。 X は、4 面体 $xyzt = 0$ の 6 辺と 2 次曲面 $\phi = 0$ の交わりに於て特異で、一般に 12 個の通常 2 重点をもっている。(論文ではそうでないが、) 天下りの束縛条件

$$K = -\det \begin{pmatrix} 1 & c & b \\ c & 1 & a \\ b & a & 1 \end{pmatrix}$$

を課してえられる部分3次元族を考える. このとき、新たに4個の通常2重点が生じ、合計16個の通常2重点をもつ4次曲面がえられる. これが、「Kummer 4次曲面」と現在呼ばれるものの初出のようである. (4)をみたまわりの $X_{k,l}$ は、ここで、さらに $a = b = c$ とおいてえられる. ((7)のもつ Klein 4元群の対称性は \mathfrak{S}_4 に拡大される.) また、正8面体的な S_{octa} は $a = b = c = 0$ (よって $K = -1$) の場合、すなわち、

$$(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 + 16xyzt = 0 \quad (8)$$

である. これの新たな4特異点は $(-1 : 1 : 1 : 1), \dots, (1 : 1 : 1 : -1)$ で、これらを座標点とするような線形変換でもって

$$X_{-4,2} : (x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2) + (x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2) + (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) + 2x_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \quad (9)$$

とうつる.

次の二つが Kummer 4次曲面の研究において決定的に重要である.

定義 1 Kummer 4次曲面上の2次曲線 $C \subset X \subset \mathbb{P}^3$ で、その張る平面と X の交わり $\langle C \rangle \cap X$ が $2C$ と一致するとき、 C は2重2次曲線 (trope) という.

2重2次曲線も丁度16本あって、16個の通常2重点とでもって (16_6) 配置をなす.

定義 2 Kummer 4次曲面の4個の通常2重点の集合 H はどの3個をとってもそれらを通る2重2次曲線が存在しないとき、Göpel 4つ組 (Göpel tetrad) という.

注意1にも記したように、Kummer 4次曲面は種数2の曲線の Jacobian Kummer 曲面と同型で、16個の通常2重点は Jacobi 曲面の2分点の像である. この対応で、4特異点が Göpel 4つ組になるのは、対応する4個の2分点が Weil pairing でもって maximal totally isotropic な部分群の剰余集合 (coset) になっていることと同値である.

さて、表示(7)においては、 $xyzt = 0$ の6辺上にない、新たな4特異点が Göpel 4つ組になっている. これを H_{can} で表す. 4本の2重2次曲線 $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$ は H_{can} を通らない2重2次曲線の全てである.

§3 自己 (射影) 双対性と4個の新対合

4次曲面 $X \subset \mathbb{P}^3$ の射影双対、すなわち、点に対して、そこでの接平面を対応させる有理写像

$$\mathbb{P}^3 \supset X \cdots \rightarrow \check{X} \subset \mathbb{P}^{3,*}$$

の像 \check{X} が射影双対と呼ばれる. Kummer 論文に言及されているように (§2)、一般的には36次であるが、 X が通常2重点を1個もつ毎に次数が2づつ減少する. よっ

て、Kummer 4 次曲面では、 \tilde{X} は再び 4 次曲面になる。元の X との線形でない同型写像が得られた。これが Kummer 4 次曲面の自己双対性と呼ばれるものである。この際に、Kummer 4 次曲面の 16 個の通常 2 重点と 16 個の 2 重 2 次曲線が入れ替わることに注意しよう。この理由でもって、この同型は switch と呼ばれる。

さて、この switch でもって、(7) の 4 本の 2 重 2 次曲線 $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$ は \tilde{X} の 4 個の通常 2 重点にうつる。これらからの射影を用いて \tilde{X} 、よって、 X の対合が定まる。これらが、新対合 $\sigma_5, \dots, \sigma_8$ である。 $\sigma_1, \dots, \sigma_4$ の switch による共役に外ならない。

§4 定理の証明について

$S = S_{octa}$ とする。これの自己同型を定義式から直接構成してきたが、定理 2 の証明はそれのコホモロジー作用を用いて行う。10 次元実ベクトル $H^2(S, \mathbb{R})$ 内の錐を用いても良いが、ここでは、原点を除いて $\mathbb{R}^{>0}$ の定数倍で割ってえられる 9 次元球 (の内部) B^9 の中で考える。自己交点数正 ($x^2 > 0$) のもの全体は二つの連結成分をもつが、この中で、豊富な因子類を含む方を $\Lambda \subset B^9$ で表す。これは 9 次元 Lobachevsky 空間 (非 Euclid 空間のモデル) である。Enriques 曲面の nef 因子類はこれの閉包 $\bar{\Lambda}$ に入っている。それら全体のなす領域

$$\text{Nef } S \subset \bar{\Lambda} \tag{10}$$

を観察することが基本となる。定義では、nef は「すべての effective 因子との交点数が非負」であるが、Riemann-Roch 型定理のおかげで、 S 上の $(-2)\mathbb{P}^1$ との交点数で確かめれば充分である。

[9] で観察された次の事実に注意しよう。

事実 1 : 対合 $\sigma_1, \dots, \sigma_8$ は数値的に鏡映 (numerically reflective) である。すなわち、自己交点数 -2 の因子類 $e_i \in H^2(S, \mathbb{Z})_f$ が存在し、コホモロジー作用

$$\sigma_i^* : H^2(S, \mathbb{Z})_f \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})_f$$

は、 e_i に関する鏡映

$$x \mapsto x + (x \cdot e_i)e_i \tag{11}$$

と一致する。ただし、 $H^2(S, \mathbb{Z})_f$ は $H^2(S, \mathbb{Z})$ を振れ部分群で割ってえられる符号数 $(1, 9)$ の格子 (整数値対称双線形形式付の自由加群) である。

注意 2 数値的に鏡映な自己同型は Kummer 4 次曲面以外にもう 1 種あって、 E_7 型の Enriques 曲面と呼ばれる。こちらも 4 次曲面を Cremona 対合 (2) で割ってえられるが、16 個の通常 2 重点が、4 個の D_4 型有理 2 重点に置き換わる。これについては [8] で周期写像を調べた。この中で位数 3 の自己同型をもつものが (1) で $l = 0$ をみたすものと一致する。

次が定理 2 の証明の鍵である。

事実 2 : Nef 領域内の 40 面体 (tetracontahedron) $P \subset \text{Nef}(S)$ でもって、

$$\bigcup_{g \in \text{Aut} S} g \cdot P = \text{Nef}(S) \quad (12)$$

をみたすものが存在する。

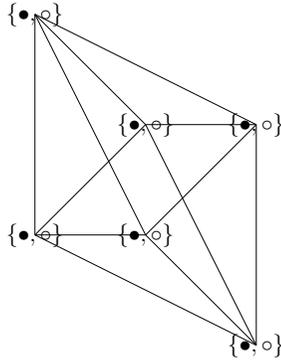
P は次の 40 個の線形不等式で定義される。

- Kummer 4 次曲面 (7) の通常 2 重点で 4 面体 $xyzt = 0$ の辺上にある 12 個は、Enriques 曲面 S 上の 6 本の disjoint な $(-2)\mathbb{P}^1$ を定める。また、 $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$ 以外の 12 本の 2 重 2 次曲線も S 上の 6 本の disjoint な $(-2)\mathbb{P}^1$ を定める。これらとの交点数 0 以上。
- Kummer 4 次曲面 (7) の標準的な Göpel 4 組 H_{can} との共通部分が丁度 2 個の Göpel 4 組 H' が丁度 12 個ある。ここまでは一般的に成立することであるが、正 8 面体的な場合の特徴は、これらが全て退化する。すなわち、4 点 $H' \subset \mathbb{P}^3$ の線形苞 $\langle H' \rangle$ が平面となる。そして、平面切断 $\langle H' \rangle \cap X$ は 2 本の 2 次曲線の和となる。Cremona 対合 ε は、両者を入れ替えるので、 S 上の 12 本の $(-2)\mathbb{P}^1$ が定まる。これらとの交点数が 0 以上。
- Göpel 4 組 H_{can} に属する通常 2 重点の特異点解消でえられる 4 本の $(-2)\mathbb{P}^1$ の S における像。同様に、4 本の 2 重 2 次曲線 $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$ の S における像。合わせて 8 本の $(-2)\mathbb{P}^1$ が得られるが、これらとの交点数が 0 以上。
- 対合 $\sigma_1, \dots, \sigma_8$ のコホモロジー作用を鏡映 (11) として実現する因子類 $e_1, \dots, e_8 \in H^2(S, \mathbb{Z})_f$ は符号を除いて一意に決まっているが、豊富因子との交点数が正となるように符号を選んでおく。これらとの交点数が 0 以上。

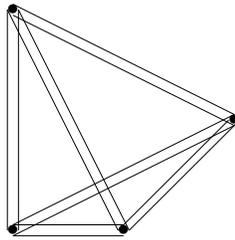
事実 3 : 上の 40 個の不等式が B^9 で定める領域は $\bar{\Lambda} = \{(x^2) \geq 0\}$ に入る。(線形不等式から 2 次不等式が従う。)

これは、上の $32 (= 12 + 12 + 8)$ 個の $(-2)\mathbb{P}^1$ と 8 個の (-2) 類の定める 40 頂点グラフを見ることによって証明される。

- 最初の 12 本の $(-2)\mathbb{P}^1$ 配置の双対グラフは正 8 面体グラフ (6 頂点 12 辺) の 2 部化 (bipartite double)¹ である。



- 2番目の12本の $(-2)\mathbb{P}^1$ 配置の双対グラフは2重完全グラフ $K_4^{[2]}$



の辺グラフ²である.

- 残りの8本の $(-2)\mathbb{P}^1$ は完全グラフ $K_8^{[2]}$ をなす.
- 8個の (-2) 類も完全グラフ $K_8^{[2]}$ である.

これら4つのグラフを $12A, 12D, 8B, 8C$ で表す. 異なるグラフは2を法として直交している. 40頂点グラフの極大放物部分グラフが次の175個に分類される.

¹2頂点 adjacentなのは、色が異なって、しかも元のグラフで対応する2頂点 adjacentのときと定める.

²新しいグラフの頂点 E は元のグラフでは辺 e である. 2頂点 E_1, E_2 の間には、元のグラフで辺 e_1, e_2 が共有する頂点の数だけ、辺を結ぶ.

番号	部分グラフ	12A	8B+8C	12D	個数
1)	$\tilde{A}_3 + \tilde{A}_3$	8			
	$+\tilde{A}_1 + \tilde{A}_1$			4	3
2)	$\tilde{A}_3 + \tilde{A}_3$	4		4	
	$+\tilde{A}_1 + \tilde{A}_1$	2	2		24
3)	$\tilde{A}_5 + \tilde{A}_2$	6		3	
	$+\tilde{A}_1$		2		64
4)	\tilde{D}_4	5			
	$+\tilde{A}_1 + \tilde{A}_1$	2	2		
	$+\tilde{A}_1 + \tilde{A}_1$			4	12
5)	\tilde{D}_5	6			
	$+\tilde{A}_3$			4	24
6)	\tilde{D}_6	7			
	$+\tilde{A}_1$	1	1		
	$+\tilde{A}_1$	1	1		48

上の放物グラフが全て極大階数(=8)であることと、4重線で結ばれる場合の処理をすることによって、40頂点グラフが(精密化された) Vinberg 判定法 [15] をみたすことがわかる。よって事実3が成立する。

注意 3 [12] における $\text{Aut } S_{k,0}$ の決定もこの節と同様の議論でなされるが、使う P が金銅 [4] の 20 面体で新しくないことと、 \mathbb{P}^1 配置におけるある幸運を使っている (よって一般化できない) 点で異なる。

注意 4 一般の $(k-4)(l-4) = 16$ の場合は、 $|H_{can} \cap H'| = 2$ をみたす 12 個の Göpel 4 組 H' のうち、4 個が退化し、8 個は非退化である。前者の場合は線形な対合が、後者の場合は Cremona 対合がえられ、それらでもって $\text{Aut } S_{k,l}$ が生成される。

§5 自己同型群が実質的に自由な Enriques 曲面—現状

序文に述べたように、自己同型群が有限な Enriques 曲面は Nikulin [14] と金銅 [4] によって分類された。(複素数体 \mathbb{C} 上では) 次の問題として、自己同型群が実質的自由 (virtually free) となるものの分類が考えられる。この条件は Enriques 曲面の楕円ペンシルの Mordell-Weil 階数の最大値 (簡単のため、Enriques 曲面の MW 階数と呼ぶことにする) が 1 であることと同値だろうと予想されている。この予想解決のアプローチとして、MW 階数 1 の Enriques 曲面に対して自己同型群を調べて、実質的自由性を示しているのが現状である。もちろん、分類によらない一網打尽的な証明 (あるいは、反例の構成) が望まれる。

今回扱った Enriques 曲面は [12] に次いで簡単な場合である。講演では、両者に共通する性質として「2 を法として凝縮する樹木構造」を説明し、それがみだされる（そして実質的自由が示せる）場合を列挙したが、ここでは割愛する。

残念ながら実質的自由が期待される場合でも、この構造をもたない場合が多い。その一例が、3 次曲面の Hessian である。対称 4 次曲面 (1) は (k, l) を非斉次座標とする射影平面 \mathbb{P}^2 でパラメータ付けられていることに注意しよう。そして、この座標系において無限遠直線がパラメータ付けている対称 4 次曲面族

$$\bar{X}_{k:l}: ks_4 + ls_1s_3 = 0, \quad (k:l) \neq (1:0), (0:1), (16:-1), (4:-1) \quad (13)$$

を考えよう。これは、

$$\sum_1^5 x_i = 0, \quad l \sum_1^4 x_i^3 - kx_5^3 = 0$$

で定義される 3 次曲面の Hesse 4 次曲面である（一般の場合については [2] を見よ）。この場合に、 $(k:l) = (1:-1)$ を除いて³、(3) が同型であることが Allcock-Dolgachev [1] によって示された。証明には Coble 曲面 への退化、Coble 曲線への作用と 3 進数体 \mathbb{Q}_3 上の幾何を用いる。

やはり実質的に自由と予想される場合で、Jacobian Kummer 曲面 Km C を割ってえられる Enriques 曲面の別の例を挙げておく。よく知られているように、Km C は 5 次元射影空間内の 3 つの対角的 2 次超曲面の完全交差

$$\text{Km } C: \sum_1^6 x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i x_i^2 = \sum_1^6 \lambda_i^2 x_i^2 = 0 \subset \mathbb{P}^5 \quad (14)$$

という綺麗な表示をもつ。ただし、 $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{P}^1$ は $C: y^2 = \prod_{i=1}^6 (x - \lambda_i)$ の Weierstrass 点の座標である。この表示では、座標のうちの 3 個の符号を替えるという自己同型が、§3 で説明した switch である。この表示を、位数 3 の自己同型をもつ場合に制限して考えよう。種数 2 曲線は $C_a: y^2 = (x^3 - 1)(x^3 + a^3)$ と、Kummer 曲面は

$$Y_a := \text{Km } C_a \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 \\ x_0^2 + \omega x_1^2 + \bar{\omega} x_2^2 = -a(y_0^2 + \omega y_1^2 + \bar{\omega} y_2^2) \\ x_0^2 + \bar{\omega} x_1^2 + \omega x_2^2 = a^2(y_0^2 + \bar{\omega} y_1^2 + \omega y_2^2) \end{cases} \subset \mathbb{P}^5 \quad (15)$$

と表される。この Y_a を対合

$$sw: (x_0 : x_1 : x_2 : y_0 : y_1 : y_2) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2 : -y_0 : -y_1 : -y_2) \quad (16)$$

で割ってえられる Enriques 曲面を $T_a := Y_a/sw$ で表す（Godeaux 型 4 次 Enriques 曲面の特別な場合）。さらに特別な場合 $a = 1$ としてえられる $C_1: y^2 = x^6 - 1$ には

³ $(k:l) = (1:-1)$ の場合は金銅の VI 型で、自己同型群は \mathfrak{S}_5 である。

位数 12 の 2 面体群 D_{12} が作用する. [7, Example (0.4) $n^\circ 8$] でも観察されたように、 $K3$ 曲面 Y_1 には、位数 192 の群 $T_{192} = (C_2^4) \rtimes D_{12}$ が symplectic に作用する. よって、2 面体的 Enriques 曲面 T_1 にも T_{192} が (semin-symplectic に) 作用する. 表示は異なるが、 S_{octa} に作用する T_{192} と同じ群である. このとき、 S_{octa} と同じように、準同型写像

$$(C_2^{*8}) \rtimes H_{192} \rightarrow \text{Aut}(T_1), \quad (17)$$

が定まる. これの同型性についての結果が期待される. S_{octa} のように、 Λ^9 内の良い 40 面体が構成できるが、2 を法として凝縮していないために現時点では手が届かない所にある.

§6 最後に

正 8 面体的と 2 面体的な場合を取り上げたが、この選択の理由は良い 40 面体の存在にある. 金銅 [4] では、分類で絞り込んだ 7 種の Enriques 曲面が有限個しか自己同型をもたないことを示すために、9 次元 Lobachevsky 空間 Λ^9 内の 2 個の 12 面体と 5 個の 20 面体が構成されている. 有限から実質的自由に進むことによって 3 個の 40 面体が発見され、その二つがここで取り上げたものである. 残りの 40 面体は、大橋氏との別の共著 [13] で構成された、6 次交代群 \mathfrak{A}_6 の作用する Enriques 曲面に出現する. これは、正 8 面体的な S_{octa} と同じく 2 を法として凝縮しているので、全自己同型群を求めることができる (が、ここでは説明を略す).

注意 5 一般の Kummer 4 次曲面の自己同型群は金銅 [5] によって生成元が求められている. そこでは、16 次元 Lobachevsky 空間 Λ^{16} 内の 316 面体が用いられているが、上に出現する 3 つの 40 面体は全てこれの 9 次元面である.

参考文献

- [1] Allcock, D. and Dolgachev, I.: The tetrahedron and automorphisms of Enriques and Coble surfaces of Hessian type, arXiv1809.07819.
- [2] Dolgachev, I. and Keum, J-H.: Birational automorphisms of quartic Hessian surfaces, Trans. Amer. math. Soc., **354**(2002), 3031–3057.
- [3] Hutchinson, J.I.: On some birational transformations of the Kummer surfaces into itself, Bull. Amer. Math. Soc., (2) **7** (1901), 211–217.
- [4] Kondo, S.: Enriques surfaces with finite automorphism groups, Japan. J. Math., **12** (1986), 191–282.

- [5] Kondo, S.: The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface, *J. Alg. Geom.*, **7**(1998), 589–609.
- [6] Kummer, E.E.: Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten, *Monat. d. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1864.
- [7] Mukai, S.: Finite groups of automorphisms of $K3$ surfaces and the Mathieu group, *Invent Math.*, **94**(1988), 183–221.
- [8] 向井 茂 : Enriques surfaces and root systems — Enriques surfaces of type E_7 —, 2010 年度城崎代数幾何学シンポジウム報告集, 108–115. 京都大学学術情報リポジトリ (KURENAI), <https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/>
- [9] Mukai, S.: Kummer’s quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces, *J. Math. Soc. Japan* **64**(2012), 231–246.
- [10] 向井 茂 : $K3$, Enriques, Coble 曲面—無限自己同型群を中心として、第 63 回代数数学シンポジウム、東京工業大学、2018 年 9 月、日本数学会代数学分科会ホームページ <http://mathsoc.jp/section/algebra>
- [11] Mukai, S. and Ohashi, H.: Enriques surfaces of Hutchinson-Göpel type and Mathieu automorphisms, in *Arithmetic and Geometry of $K3$ surfaces and Calabi-Yau threefolds*, Fields Institute Communications **67**, 2013, pp. 429–454.
- [12] Mukai, S. and Ohashi, H.: The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces, in “Recent Advances in Algebraic Geometry”, A volume in honor of Rob Lazarsfeld’s 60th birthday, eds. Hacon, Mustata and Popa, Cambridge Univ. Press, 2015, 307–320.
- [13] Mukai, S. and Ohashi, H.: Finite groups of automorphisms of Enriques surfaces and the Mathieu group M_{12} , arXiv1507.00682.
- [14] Nikulin, V.V.: On the description of the groups of automorphisms of Enriques surfaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **277**(1984), 1324–1327.
- [15] Vinberg, E.B.: On groups of unit elements of certain quadratic forms, *Mat. USSR Sb.*, **16**(1972), 17–35.
- [16] Vinberg, E.B.: The two most algebraic $K3$ surfaces, *Math. Ann.* **265** (1983), 1–21.