数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 1-14

退化主系列表現からの絡作用素の次元について
Dimension of the space of intertwining operators from degenerate principal series representations

東京大学・数理科学研究科　田内　大渡 *
Taito Tauchi
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

X を実簡約リー群 G の等質空間とする. このとき G の極小放物型部分群 P が X に開軌道を持てば, あるいはそれと同値な条件である $|P\backslash X| < \infty$ を満たせば, G の正則表現 $C^\infty(X)$ は G の既約表現を高々重複度有限でしか含まないことが小林-大島により証明された. この論文では類似の結果を退化主系列表現に関して議論する. 一般放物型部分群 Q に対し $|Q\backslash X| < \infty$ であるが正則表現 $C^\infty(X)$ が Q から誘導された退化主系列表現を重複度無限で含む例を構成する.

Abstract

Let X be a homogeneous space of a real reductive Lie group G. It was proved by T. Kobayashi and T. Oshima that the regular representation $C^\infty(X)$ contains each irreducible representation of G at most finitely many times if a minimal parabolic subgroup P of G has an open orbit in X, or equivalently the number of P-orbits on X is finite. We discuss an analogous result for degenerate principal series representations. For a general parabolic subgroup Q of G, we find an example that the regular representation $C^\infty(X)$ contains the degenerate principal series representations induced from a representation of Q with infinite multiplicity even though the number of Q-orbits on X is finite.

* この研究は東京大学数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けたものである.

目次

1 導入

G を実簡約リー群, H をその代数部分群とする. このとき次の重複度の有限性に関する判定法が小林-大島により証明された.

事実 1.1 ([9, Theorem A]). 次の (G,H) に関する二条件は同値である.

(i) 任意の $(\pi,\tau) \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H,\tau)) < \infty$.

(ii) G/H が実球多様体である.

ここで G の滑らかな既約許容表現の同値類全体を $\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ で, H の有限次元既約表現の同値類全体を $\hat{H}_{\mathrm{f}}$ で表した. さらに $C^\infty(G/H,\tau)$ は同変ベクトル束 $G \times_H \tau \to G/H$ の可微分な切断全体の成す Fréchet 空間を表す. また実球多様体という用語は小林 [7] により導入された.

定義 1.2 ([9]). 実簡約リー群 G の極小放物型部分群 P が, 等質多様体 $X = G/H$ に開軌道を持つとき, X を実球多様体であるという.

さらに松木の実ランク 1 リダクションと Kimelfeld の実ランク 1 での結果を合わせることにより次のような事実も知られている.

事実 1.3 ([6],[12]). (ii) は次の (iii) と同値である.

(iii) $|H\backslash G/P| < \infty$.

P が極小放物型部分群である場合は条件 (i),(ii),(iii) が全て同値であることが事実 1.1 と事実 1.3 から従う（図 1 参照）．では P の代わりに一般放物型部分群 Q を考えたとき (i),(ii),(iii) の関係はどのようになるのかということが自然に疑問になる. しかし条件 (i) には P の情報が含まれていないのでこの疑問を定式化するために次の定義をする.

定義 1.4 ([8, Definition 6.6]). ある $\tau \in \hat{Q}_{\mathrm{f}}$ が存在して π が $C^{\infty}(G/Q,\tau)$ の部分商と同型になるとき, $\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ は Q シリーズに属するという.

P : 極小放物型部分群

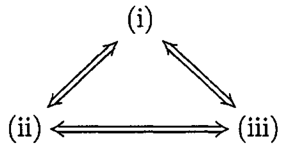

図 1

Q : 一般放物型部分群

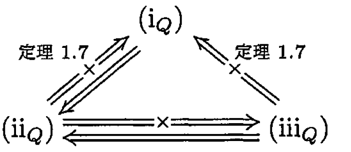

図 2

$\hat{G}^{Q}_{\mathrm{smooth}} := \{\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \mid \pi$ は Q シリーズに属する.$\}$ とおくと Harish-Chandra の部分商定理 [4] より $\hat{G}_{\mathrm{smooth}} = \hat{G}^{P}_{\mathrm{smooth}}$ が成り立つことがわかる. これより一般放物型部分群 Q を考えているときには $\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ を $\hat{G}^{Q}_{\mathrm{smooth}}$ で置き換えて条件 (i) を考えることにする. すなわち次のように定義する.

定義 1.5. 一般放物型部分群 $Q \subset G$ に対し条件 (i$_Q$),(ii$_Q$),(iii$_Q$) を次で定める.

(i$_Q$) 任意の $(\pi,\tau) \in \hat{G}^{Q}_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^{\infty}(G/H,\tau)) < \infty$.
(ii$_Q$) Q が等質多様体 G/H に開軌道を持つ.
(iii$_Q$) $|H\backslash G/Q| < \infty$.

このように定義すると (i$_Q$) $\Rightarrow$ (ii$_Q$) は真であることが, より強く次の事実 1.6 が成り立つことからわかる.

事実 1.6 ([8, Corollary 6.8]). ある $\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}$ が存在して任意の $\pi \in \hat{G}^{Q}_{\mathrm{smooth}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^{\infty}(G/H,\tau)) < \infty$ を満たすならば条件 (ii$_Q$) が成り立つ.

ではその逆 (ii$_Q$) $\Rightarrow$ (i$_Q$) の真偽が疑問になる. しかし極小ではない一般放物型部分群 Q に対しては (ii$_Q$) よりも (iii$_Q$) がより強い条件であることがよく知られているので次のような問題を考える.

問題. (iii$_Q$) $\Rightarrow$ (i$_Q$) が成り立つか？

この論文ではこの問題に対し否定的な例を与える. すなわち次を示す.

定理 1.7. $G = SL(2n,\mathbb{R})$ とし $[1: 0: \dots : 0] \in \mathbb{RP}^{2n-1}$ の固定部分群により G の極大放物型部分群 Q を定義する. また $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し Q の指標 $\chi_\lambda : Q \to \mathbb{C}^\times$ を $\chi_\lambda((a_{ij})_{i,j=1}^{2n}) := |a_{11}|^\lambda$ で定める. このとき $n \geq 3$ であれば, 次の二条件を満たす G の代数部分群 H が存在する.

1) $|H\backslash G/Q| < \infty$.
2) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi_\lambda), C^\infty(G/H)) = \infty$.

まとめると次のようになる（図 2 参照）. $(\mathrm{i}_Q) \Rightarrow (\mathrm{ii}_Q)$ は事実 1.6 により成り立つことが従う. さらに $(\mathrm{iii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{ii}_Q)$ が真であることと $(\mathrm{ii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{iii}_Q)$ が偽であることはよく知られている. そして定理 1.7 より $(\mathrm{iii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{i}_Q)$ が偽であることがわかり, 従って $(\mathrm{ii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{i}_Q)$ が偽であることもわかる.

注釈 1.8. [2, Theorem D] は次を主張している.「実代数群 G が非特異実代数多様体 M に代数的に作用しているとし, E を M 上の代数的 G 同変束とする. もし $|G\backslash M| < \infty$ であれば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対しある定数 $C_n \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathfrak{g}$ の任意の n 次元表現 τ に対して次が成り立つ.

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\tau, \mathcal{S}^*(M,E)) \leq C_n.$$

」ここで M がコンパクトかつ E が自明束 $M \times \mathbb{C}$ のとき $\mathcal{S}^*(M,E) = \mathcal{D}'(M)$ が成り立つ [1, Chapter 1.5]. 一般の場合の $\mathcal{S}^*(M,E)$ については [1] を参照. 上の [2, Theorem D] を τ, E がそれぞれ自明表現 $\mathbf{1}$, 自明束 $M \times \mathbb{C}$ の場合に適用すると, もし $|G\backslash M| < \infty$ かつ M がコンパクトならば次が成り立つ.

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{1}, \mathcal{D}'(M)) = \dim \mathcal{D}'(M)^{\mathfrak{g}} < \infty.$$

これを定理 1.7 の場合, すなわち実代数群 H がコンパクトな非特異実代数多様体 $\mathbb{RP}^{2n-1} \simeq G/Q$ に作用している場合に適用すると次が成り立つ.

$$\dim \mathcal{D}'(G/Q)^{\mathfrak{h}} < \infty.$$

これは事実 2.2より定理 1.7 の条件 2) と矛盾する. 実は [2, Theorem D] の証明にはギャップが存在しこの定理 1.7 が [2, Theorem D] の反例となっている.

以下この論文の構成を述べる. 2 章で証明に用いる一般的な定理を述べ, 3 章で複素空間上の超関数の記法や性質について述べる. 4 章では定理 1.7 の部分群 H を与え, 5 章でその H を低次元の場合について具体的に書き下す.

記号

体 K に対して $K^\times$ を $K\backslash\{0\}$ の成す乗法群とする. また V が群 G の表現であるとき V^G で G 不変な V の元全体の成す部分空間を表す.

2 核超関数へのリダクション

この 2 章では事実 2.2 を用い定理 1.7 の条件 2) を超関数の言葉に焼き直す.

定義 2.1. G を実リー群, H を G の閉部分群とする. H の一次元表現 $\mathbb{C}_{2\rho}$ を $h \mapsto |\det(\mathrm{Ad}(h) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h})|^{-1}$ で定める. また $\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対してその反傾表現を $\tau^\vee$ で表す. このとき H の表現 $\tau_{2\rho}^\vee$ を $\tau_{2\rho}^\vee := \tau^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}$ で定める.

事実 2.2 ([10, Proposition 3.2]). G を実リー群, G' と H を G の閉部分群, H' を G' の閉部分群とし $\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}, \tau' \in \hat{H}'_{\mathrm{f}}$ とする. このとき次が成り立つ.

1) 次の単射が存在する.

$$\mathrm{Hom}_{G'}\left(C^\infty(G/H,\tau), C^\infty(G'/H',\tau')\right) \hookrightarrow \left(\mathcal{D}'(G/H,\tau_{2\rho}^\vee)\otimes\tau'\right)^{H'}.$$

2) H が余コンパクト（例えば放物型部分群）のとき 1) の射は全単射となる.

系 2.3. G, Q, χ_λ を定理 1.7 と同様に定め, $n \geq 1$ とする. このとき H を G の閉部分群とすると, 次が成り立つ. ただし $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\})_{\lambda-2n}$ は $\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$ 上の $(\lambda-2n)$ 斉次な超関数全体がなす空間を表す.

$$\mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi_\lambda), C^\infty(G/H)) \simeq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\})^H_{\lambda-2n}.$$

証明. $\mathcal{D}'(G/Q,\chi_\lambda) \simeq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\})_{-\lambda}$ と $\mathbb{C}_{2\rho} = \chi_{2n}$ が系 2.3 の設定のもとで成り立つので事実 2.2 より明らか. □

3 複素空間上の超関数の記法

この 3 章では複素空間 $\mathbb{C}^n$ 上の超関数についての定義や性質を述べる. $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ により $\mathbb{C}^n$ 上の超関数の空間 $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ が定まる. $z = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$

を $\mathbb{C}^n$ の座標として, 微分作用素 $\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ を次で定める.

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad (1 \leq j \leq n).$$

また試験関数 $\phi(z)$ に対し次の値を返す $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$ の元を $\delta(z_n, \overline{z}_n)$ で表す.

$$\int_{\mathbb{C}^{n-1}} \phi(z', 0) dz' d\overline{z'} = (-2i)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{2n-2}} \phi(x' + iy', 0) dx_1 dy_1 \ldots dx_{n-1} dy_{n-1}$$

ただし $z = (z', z_n) = (x' + iy', x_n + iy_n)$ とした. (x, y) 座標を用いると $-2i\delta(z_n, \overline{z}_n) = \delta(x_n)\delta(y_n)$ である. また $\overline{z}_n = x_n - iy_n$ として次が成り立つ.

$$z_n \delta(z_n, \overline{z}_n) = \overline{z}_n \delta(z_n, \overline{z}_n) = 0.$$

さらに $\left\{\frac{\partial^l}{\partial z_n^l} \delta(z_n, \overline{z}_n)\right\}_{l \in \mathbb{N}}$ は $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n-1})$ 上一次線形独立である. すなわち,

$$\sum_{l=1}^{m} T_l \frac{\partial^l}{\partial z_n^l} \delta(z_n, \overline{z}_n) = 0 \quad (T_l \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n-1}))$$

ならば $T_l = 0$ $(1 \leq l \leq m)$ である. また群 G が $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ に作用しているとする. このとき G は $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 上の C^∞ 関数の空間や, 超関数の空間, 微分作用素の空間にそれぞれ次のように作用する. g を G の元として,

$$\begin{aligned}(g \cdot f)(z) &:= f(g^{-1} \cdot z), \\ (g \cdot T)(\phi) &:= T(g^{-1} \cdot \phi), \\ (g \cdot D)(f) &:= g \cdot (D(g^{-1} \cdot f)).\end{aligned}$$

ここで $T(\phi)$ は超関数 T の試験関数 ϕ における値を, $D(f)$ は関数 f に微分作用素 D を作用させて得られる関数をそれぞれ表した.

4 定理 1.7 の証明

$G := SL(2n, \mathbb{R})$ とする. この 4 章では条件 1), 2) を満たす G の代数部分群 H を実際に構成して定理 1.7 を証明する. ベクトル空間 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\varepsilon$ に積を次のように定めることで得られる実4次元の非可換な $\mathbb{R}$ 代数を R_ε と表記する.

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) := (ac + b\overline{d}) + (ad + b\overline{c})\varepsilon \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}). \tag{4.1}$$

ここで $\overline{c}, \overline{d}$ はそれぞれ $c, d \in \mathbb{C}$ の複素共役を表す. また $\mathbb{C}$ を実2次元ベクトル空間とみなして $\mathbb{R}$ 代数 R_ε の実2次元表現 $\mathbb{C}$ を次で定義する.

$$(a + b\varepsilon) \cdot z := az + b\overline{z} \qquad (a + b\varepsilon \in R_\varepsilon,\ z \in \mathbb{C}). \tag{4.2}$$

注釈 4.1. $\mathbb{C}$ の虚数単位を i で表すと (4.1) より ε と i は次の関係式を満たす.

$$\varepsilon^2 = 1, \quad i^2 = -1, \quad i\varepsilon = -\varepsilon i.$$

よって R_ε は $\mathbb{R}$ 代数として実クリフォード代数 $C(1,1)$ と同型であり $R_\varepsilon \simeq C(1,1) \simeq M_2(\mathbb{R})$ が成り立つ [11, Proposition 4.4.1].

R_ε 上の n 次正方行列全体 $M_n(R_\varepsilon)$ は $\mathbb{C}^n$ に左からの掛け算で作用する. この作用は (4.2) 式より $\mathbb{C}^n$ の $\mathbb{R}$ 線形空間の構造を保つので準同型 $\iota : M_n(R_\varepsilon) \hookrightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$ が定まる. 次元を比べればこれは同型であることが従う. $M_n(R_\varepsilon)$ の部分集合 H を次のように定める. $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ として,

$$H := \left\{ h^\theta(a) := \begin{pmatrix} e^{i\theta} & a_1\varepsilon & a_2\varepsilon^2 & \cdots & a_{n-1}\varepsilon^{n-1} \\ & e^{i\theta} & a_1\varepsilon & \ddots & \vdots \\ & & e^{i\theta} & \ddots & a_2\varepsilon^2 \\ & & & \ddots & a_1\varepsilon \\ & & & & e^{i\theta} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \theta \in \mathbb{R} \\ a \in \mathbb{C}^{n-1} \end{array} \right\}. \tag{4.3}$$

すると $H \subset M_n(R_\varepsilon)$ は行列の積に関して群を成すので $\iota(H) \subset GL(2n, \mathbb{R})$ が成り立つ. また $\det(\iota(H)) = \{1\}$ が成り立つ. なぜなら H は $\{h^0(a)\}_{a \in \mathbb{C}^{n-1}}$ と $\{h^\theta(0)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ で生成されるが, $\det\left(\iota\left(h^0(a)\right)\right) = 1$ であることは明らかであり, また $\det\left(\iota\left(h^\theta(0)\right)\right) = 1$ についても, $e^{i\theta}$ が $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ に回転として作用することに注意して $\iota\left(h^\theta(0)\right) \in GL(2n, \mathbb{R})$ を 2 次のブロック行列へと分解して考えればわかるからである. よって $\iota(H) \subset G = SL(2n, \mathbb{R})$ が成り立つ. 以降 $M_n(R_\varepsilon)$ の部分集合 H と $G = SL(2n, \mathbb{R})$ の部分群 $\iota(H)$ を同一視する.

命題 4.2. 一般旗多様体 G/Q 上には $2j-1$ 次元の H 軌道 $(1 \leq j \leq n)$ がちょうど一つずつ存在する. 特に $|H \backslash G/Q| = n < \infty$ となる.

証明. $\mathbb{R}^\times$ の $\mathbb{C}^n$ 上の作用をスカラー倍で定め $X := (\mathbb{C}^n \backslash \{0\})/\mathbb{R}^\times$ とおく. $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ という同一視は $X \simeq \mathbb{RP}^{2n-1} \simeq G/Q$ を導くので次が成り立つ.

$$H \backslash X \simeq H \backslash G/Q.$$

ここで X の実 $2j-1$ 次元の実部分多様体 Y_{2j-1} $(1 \leq j \leq n)$ を次で定める.

$$Y_{2j-1} := \{(z_1, \dots, z_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n \mid z_j \neq 0\}/\mathbb{R}^\times \quad \subset \quad X. \tag{4.4}$$

すると H による X の軌道分解は次のようになる.

$$H \backslash X = \bigcup_{j=1}^{n} Y_{2j-1}.$$

よって $|H\backslash G/Q| = |H\backslash X| = n < \infty$ となる. □

以下 $n \geq 3$ とする. $\mathbb{C}^n\backslash\{0\} \simeq \mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$ 上の微分作用素 $D, \overline{D}$ を次で定める.

$$D := \overline{z}_{n-2}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{n-1}} + z_{n-1}\frac{\partial}{\partial z_n}, \quad \overline{D} := z_{n-2}\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} + \overline{z}_{n-1}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}. \tag{4.5}$$

また $l \in \mathbb{N}$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})$ の元 $T^l_\lambda, \overline{T^l_\lambda}$ を次のように定義する. ただしここで Γ はガンマ関数を表す.

$$T^l_\lambda(z) := \frac{1}{\Gamma(2-\frac{\lambda}{2})} D^l |z_{n-1}|^{2-\lambda}\delta(z_n, \overline{z}_n), \tag{4.6}$$

$$\overline{T^l_\lambda}(z) := \frac{1}{\Gamma(2-\frac{\lambda}{2})} \overline{D}^l |z_{n-1}|^{2-\lambda}\delta(z_n, \overline{z}_n). \tag{4.7}$$

すると $D, |z_{n-1}|^{2-\lambda}, \delta(z_n, \overline{z}_n)$ の次数が順に $0, 2-\lambda, -2$ であることから T^l_λ と $\overline{T^l_\lambda}$ は $-\lambda$ 斉次であることがわかる. 従って $T^l_\lambda, \overline{T^l_\lambda} \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})_{-\lambda} \simeq \mathcal{D}'(G/Q, \chi_\lambda)$ が成り立つ.

注釈 4.3. $|z_{n-1}|^{2-\lambda}$ は超関数として $\lambda \in 2\mathbb{N}+4$ で一位の極をもつが $\Gamma(2-\frac{\lambda}{2})$ も $\lambda \in 2\mathbb{N}+4$ で一位の極を持つ. よって $T^l_\lambda, \overline{T^l_\lambda}$ は正則パラメータ $\lambda \in \mathbb{C}$ をもつ超関数である (例えば [3, Appendix.B 1.4] 参照).

注釈 4.4. $T^l_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})_{-2}$ について $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{n-1}}\delta(z_n, \overline{z}_n) = 0$ であることに注意すれば, $\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ 上の超関数の等式として次が成り立つ.

$$\begin{aligned} T^l_2(z) &= \left(\overline{z}_{n-2}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{n-1}} + z_{n-1}\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^l \delta(z_n, \overline{z}_n) \\ &= \left(z_{n-1}\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^l \delta(z_n, \overline{z}_n). \end{aligned}$$

最後の T^l_2 の表示では z_{n-2} の項が現れないので $n = 2$ でも $T^l_2, \overline{T^l_2}$ を定義することができる. よって $n \geq 3$ の場合と同様にして $n = 2$ のときもこの 4 章で構成した $H \subset G = SL(4, \mathbb{R})$ が次の二条件を満たすことを証明できる.

1) $|H\backslash G/Q| < \infty$.
2) $\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \chi_2), C^\infty(G/H)) = \infty$.

命題 4.5. $n \geq 3$ とする. このとき任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と任意の $l \in \mathbb{N}$ について (4.6) 式, (4.7) 式で定義された超関数 $T^l_\lambda, \overline{T^l_\lambda} \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})_{-\lambda}$ は H の作用に関して不変である. すなわち $T^l_\lambda, \overline{T^l_\lambda} \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})^H_{-\lambda}$ が成り立つ.

証明. $\overline{T^l_\lambda}$ に対する主張は T^l_λ の場合と同様に示せるので T^l_λ の場合を示す. $\theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して H の元を以下のように定める（記号については (4.3) 式参照）.

$$h(\theta) := h^\theta(0, \ldots, 0), \quad h_j(a) := h^0(0, \ldots, 0, \overset{j}{a}, 0, \ldots, 0).$$

このとき H は $\{h(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ と $\{h_j(a) \mid a \in \mathbb{C}, 1 \le j \le n-1\}$ で生成されるので, これらに対し T^l_λ が不変であることを示せばよい. $h(\theta)$ に対する不変性は $z \in \mathbb{C}^n$ に対し $h(\theta) \cdot z = e^{i\theta} z$ であることから簡単に従う. よって $h_j(a)\,(1 \le j \le n-1)$ に対して T^l_λ が不変であることを示せばよい.

補題 4.6. $j = 1$ とする. $a \in \mathbb{C}$ に対して $h_1(a)$ の D への作用は次のようになる（ここで D は (4.5) 式で定めた微分作用素である）.

$$h_1(a) \cdot D = D + a\left(\overline{z}_{n-2} - \overline{a} z_{n-1} + |a|^2 \overline{z}_n\right) \frac{\partial}{\partial z_{n-2}} - a\overline{z}_n \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

上の補題 4.6 は定義通りの計算から従うので証明は省略する. $z_n \delta(z_n, \overline{z}_n) = 0$ と $\frac{\partial}{\partial z_{n-2}} \left(|z_{n-1}|^{2-\lambda} \delta(z_n, \overline{z}_n)\right) = 0$ に注意して補題 4.6 を用いれば, $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ 上の超関数の等式として次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(h_1(a) \cdot T^l_\lambda)(z) &= (h_1(a) \cdot D)^l \frac{|z_{n-1} - a\overline{z}_n|^{2-\lambda}}{\Gamma(2 - \frac{\lambda}{2})} \delta(z_n, \overline{z}_n) \\
&= \left(D - a\overline{z}_n \frac{\partial}{\partial z_n}\right)^l \frac{|z_{n-1}|^{2-\lambda}}{\Gamma(2 - \frac{\lambda}{2})} \delta(z_n, \overline{z}_n) \\
&= D^l \frac{|z_{n-1}|^{2-\lambda}}{\Gamma(2 - \frac{\lambda}{2})} \delta(z_n, \overline{z}_n) \\
&= T^l_\lambda(z).
\end{aligned}$$

同様にして $j \ge 2$ に対しても $h_j(a) \cdot T^l_\lambda = T^l_\lambda$ を示せるので命題 4.5 が示された. □

注釈 4.7. 注釈 4.4 より $T^l_2(z) = \left(z_{n-1} \frac{\partial}{\partial z_n}\right)^l \delta(z_n, \overline{z}_n)$ なので $n = 2$ のとき $D' := z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$ とおく. このとき $a \in \mathbb{C}$ に対して $h_1(a)$ の D' への作用は次のようになる.

$$h_1(a) \cdot D' = D' + \overline{a}(z_1 - a\overline{z}_2) \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} - a\overline{z}_2 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

これを用いれば $n \geq 3$ のときと同様にして次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
h_1(a) \cdot T^l_{-2}(z) &= \left(D' + \overline{a}(z_1 - a\overline{z}_2)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} - a\overline{z}_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^l \delta(z_2, \overline{z}_2) \\
&= (D')^l \delta(z_n, \overline{z}_n) \\
&= T^l_{-2}(z).
\end{aligned}
$$

よって $T^l_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})^H_{-2}$ がわかる.

命題 4.8. $n \geq 3$ であれば任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つ.

$$
\dim \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})^H_{-\lambda} = \infty.
$$

証明. $\{T^l_\lambda\}_{l\in\mathbb{N}}$ が線形独立であることを示す. D を二項展開することで,

$$
\begin{aligned}
T^l_\lambda(z) &= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \left(\overline{z}_{n-2}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{n-1}}\right)^k \left(z_{n-1}\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{l-k} \frac{|z_{n-1}|^{2-\lambda}}{\Gamma(2-\frac{\lambda}{2})}\delta(z_n, \overline{z}_n) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\frac{\lambda}{2})} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \left(\overline{z}^k_{n-2} z^{l-k}_{n-1} \frac{\partial^k |z_{n-1}|^{2-\lambda}}{\partial \overline{z}^k_{n-1}}\right) \frac{\partial^{l-k}}{\partial z^{l-k}_n}\delta(z_n, \overline{z}_n)
\end{aligned}
$$

となる. $\left\{\frac{\partial^l}{\partial z^l_n}\delta(z_n, \overline{z}_n)\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n-1}\backslash\{0\})$ 上線形独立であることと各 T^l_λ の $\frac{\partial^l}{\partial z^l_n}\delta(z_n, \overline{z}_n)$ に関する次数がそれぞれ異なることより命題 4.8 が従う. □

定理 1.7 の証明. 命題 4.2 と系 2.3, 命題 4.8 より明らか. □

注釈 4.9. $\lambda \notin 2\mathbb{N} + 4$ のとき $\mathrm{supp}(T^l_\lambda) = \overline{Y_{2n-3}}$ が成り立つ. よって $X_j := \overline{Y_{2j-1}}$ $(1 \leq j \leq n)$ とおくと次が成り立つ ($Y_{2j-1} \subset X$ については式 (4.4) 参照, ただし以下で $X \simeq G/Q$ という同一視で $Y_{2j-1} \subset G/Q$ としている).

$$
\dim \left(\mathcal{D}'_{X_{n-1}}(G/Q, \chi_\lambda) \middle/ \mathcal{D}'_{X_{n-2}}(G/Q, \chi_\lambda)\right) = \infty.
$$

ここで $\mathcal{D}'_{X_{n-1}}(G/Q, \chi_\lambda) := \{F \in \mathcal{D}'(G/Q, \chi_\lambda) \mid \mathrm{supp}(F) \subset X_{n-1})\}$ とし $\overline{Y_{2n-3}}$ は Y_{2n-3} の閉包を表した. しかしより一般に次が成り立つ.

$$
\dim \left(\mathcal{D}'_{X_k}(G/Q, \chi_\lambda) \middle/ \mathcal{D}'_{X_{k-1}}(G/Q, \chi_\lambda)\right) = \infty \quad (2 \leq k \leq n-1). \tag{4.8}
$$

(4.8) 式の証明. $2 \leq k \leq n-1$ に対し $\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ 上の微分作用素 D_k を $D_k := \overline{z}_{k-1}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} + z_k\frac{\partial}{\partial z_{k+1}}$ で定め $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $T^l_{\lambda,k} \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})$ を次で定義する.

$$
T^l_{\lambda,k}(z) := \frac{1}{\Gamma\left(n-k+1-\frac{\lambda}{2}\right)} D^l_k |z_k|^{2(n-k)-\lambda} \prod_{j=k+1}^{n} \delta(z_j, \overline{z}_j). \tag{4.9}
$$

これが $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})^H_{-\lambda}$ の元であることが T^l_λ と同様に示せる. また (4.9) 式の $T^l_{\lambda,k}$ の表示より $\mathrm{supp}(T^l_{\lambda,k})=\overline{Y_{2k-1}}=X_k$ となるので (4.8) 式が示された. □

注釈 4.10. 複素化の軌道の個数が有限ならば極大過剰決定系の理論より不変超関数の空間の次元は有限である [5, Theorem 5.1.7, Theorem 5.1.12]. すなわち $G_\mathbb{C},Q_\mathbb{C},H_\mathbb{C}$ を G,Q,H の複素化としたとき, もし $|H_\mathbb{C}\backslash G_\mathbb{C}/Q_\mathbb{C}|<\infty$ であれば $\dim\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})^H_{-\lambda}<\infty$ が従う. しかし命題 4.8 より $\dim\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n\backslash\{0\})^H_{-\lambda}=\infty$ なので $|H_\mathbb{C}\backslash G_\mathbb{C}/Q_\mathbb{C}|=\infty$ であることがわかる. 別証明として直接的に $|H_\mathbb{C}\backslash G_\mathbb{C}/Q_\mathbb{C}|=\infty$ を示すこともできるので以下でそれを示す.

命題 4.11. $G_\mathbb{C},Q_\mathbb{C},H_\mathbb{C}$ を G,Q,H の複素化とする. このとき $n\geq 2$ であれば $|H_\mathbb{C}\backslash G_\mathbb{C}/Q_\mathbb{C}|=\infty$ が成り立つ.

命題 4.2 で $|H\backslash G/Q|<\infty$ を証明したときのように $G_\mathbb{C}/Q_\mathbb{C}$ を計算しやすい形で実現し実際に $H_\mathbb{C}$ の作用を計算するという方針で証明する. そのために複素ベクトル空間としての同型 $\mathbb{C}\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}$ を次で定める. ここで $\overline{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ の複素構造を逆にしたものを表す.

$$e_-\frac{a\otimes 1}{2}+e_+\frac{c\otimes 1}{2}\mapsto(a,c)\quad(a,c\in\mathbb{C}).$$

ただし $e_\pm:=1\otimes 1\pm i\otimes i$ とおいた. 同様に $\mathbb{C}$ 代数としての同型 $R_\varepsilon\otimes\mathbb{C}=(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\varepsilon)\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}(\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}})\oplus(\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}})\varepsilon$ を次で定め, 以降同一視する.

$$e_-\frac{(a+b\varepsilon)\otimes 1}{2}+e_+\frac{(c+d\varepsilon)\otimes 1}{2}\mapsto(a,c)+(b,d)\varepsilon\quad(a,b,c,d\in\mathbb{C}).$$

補題 4.12. R_ε の実 2 次元表現 $\mathbb{C}$ の複素化, すなわち $R_\varepsilon\otimes\mathbb{C}$ の複素 2 次元表現 $\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}$ は上の同一視で次のようになる. ここで $\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}$ を複素 2 次元ベクトル空間とみなした. $(a,b)+(c,d)\varepsilon\in R_\varepsilon\otimes\mathbb{C},(z,w)\in\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}$ に対して,

$$((a,c)+(b,d)\varepsilon)\cdot(z,w)=(az,cw)+(b\overline{w},d\overline{z}).$$

証明. 両辺の第一項が等しいことは明らかである. 第二項が等しいことは次の等式を $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}\oplus\overline{\mathbb{C}}$ でおくることでわかる.

$$\begin{aligned}(\varepsilon\otimes 1)\cdot(1\otimes 1-i\otimes i)(z\otimes 1)&=\overline{z}\otimes 1-\overline{iz}\otimes i\\&=(1\otimes 1+i\otimes i)(\overline{z}\otimes 1),\\(\varepsilon\otimes 1)\cdot(1\otimes 1+i\otimes i)(w\otimes 1)&=(1\otimes 1-i\otimes i)(\overline{w}\otimes 1).\end{aligned}$$

□

命題 4.11 の証明. $M_n(R_\varepsilon \otimes \mathbb{C})$ は $(\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})^n \simeq \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}$ に左からの掛け算で作用する. この作用は $\iota_{\mathbb{C}} : M_n(R_\varepsilon \otimes \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} M_{2n}(\mathbb{C})$ を導く. $A = (A_1, \ldots, A_{n-1}) \in (\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})^{n-1}$ とすると H の複素化 $H_{\mathbb{C}} \subset M_n(R_\varepsilon \otimes \mathbb{C})$ は次のようになる.

$$H_{\mathbb{C}} := \left\{ h^a(A) := \begin{pmatrix} (e^{ia}, e^{\overline{ia}}) & A_1\varepsilon & \cdots & A_{n-1}\varepsilon^{n-1} \\ & (e^{ia}, e^{\overline{ia}}) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & A_1\varepsilon \\ & & & (e^{ia}, e^{\overline{ia}}) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a \in \mathbb{C} \\ A \in (\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})^{n-1} \end{array} \right\}.$$

(4.3) 式の H の場合と同様にして $\iota(H_{\mathbb{C}})$ が $SL(2n, \mathbb{C})$ の部分群になることがわかるので, 以降 $M_n(R_\varepsilon \otimes \mathbb{C})$ の部分集合 $H_{\mathbb{C}}$ と $G_{\mathbb{C}} = SL(2n, \mathbb{C})$ の部分群 $\iota_{\mathbb{C}}(H_{\mathbb{C}})$ を同一視する. $\mathbb{C}^\times$ の $(\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})^n$ 上の作用をスカラー倍で定める. ここで $\overline{\mathbb{C}}$ にスカラーは複素共役で作用することを注意しておく. $X_{\mathbb{C}} := \left((\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})^n \backslash \{0\}\right) / \mathbb{C}^\times$ とおくと $(\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$ は同型 $X_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{CP}^{2n-1} \simeq G_{\mathbb{C}}/Q_{\mathbb{C}}$ を導くので次が成り立つ.

$$H_{\mathbb{C}} \backslash X_{\mathbb{C}} \simeq H_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}} / Q_{\mathbb{C}}.$$

次に $a \in \mathbb{C}, A = (A_1, \ldots, A_{n-1}) = ((a_1, b_1), \ldots, (a_{n-1}, b_{n-1})) \in \left(\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}}\right)^{n-1}$ とする. このとき補題 4.12 より $h^a(A)$ の $(\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})^n$ 上の作用は次のようになる. $((z_1, w_1), \ldots, (z_n, w_n)) \in (\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})^n$ として,

$$h^a(A) \cdot \begin{pmatrix} (z_1, w_1) \\ \vdots \\ (z_n, w_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ (e^{ia} z_{n-1} + a_1 \overline{w_n} \quad , e^{\overline{ia}} w_{n-1} + b_1 \overline{z}_n) \\ (\quad e^{ia} z_n \quad , \quad e^{\overline{ia}} w_n \quad) \end{pmatrix},$$

従って $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して $X_{\mathbb{C}}$ の複素 $2n-3$ 次元部分複素多様体 Y^{ζ}_{2n-3} を,

$$Y^{\zeta}_{2n-3} := \{(z_j, w_j)_{j=1}^n \in (\mathbb{C} \oplus \overline{\mathbb{C}})^n \mid w_n = 0,\ z_n \neq 0,\ z_{n-1} = \zeta z_n\} / \mathbb{C}^\times \quad \subset X_{\mathbb{C}}$$

で定めると $\zeta \neq \mu$ ならば Y^{ζ}_{2n-3} と Y^{μ}_{2n-3} がそれぞれ異なる $H_{\mathbb{C}}$ 軌道に含まれることが分かる（実際には各 $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して Y^{ζ}_{2n-3} は一つの $H_{\mathbb{C}}$ 軌道になる）. よって $|H_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}} / Q_{\mathbb{C}}| = |H_{\mathbb{C}} \backslash X_{\mathbb{C}}| = \infty$ となる. □

5 低次元における部分群 H と不変超関数の具体形

この 5 章では $n = 2, 3$ のときについて 4 章で構成した部分群 H と不変超関数 T^l_λ の具体的表示を与える（定義は (4.3) 式と (4.6) 式参照）. $n = 3$ のとき $H \subset M_3(R_\varepsilon)$, $\iota(H) \subset$

$GL(6,\mathbb{R}), T_0^l \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^3\backslash\{0\})_0^H$ は以下のようになる.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & b\varepsilon & c \\ & e^{i\theta} & b\varepsilon \\ & & e^{i\theta} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \theta \in \mathbb{R} \\ b,\ c \in \mathbb{C} \end{array} \right\},$$

$$\iota(H) = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc|cc} \cos\theta & \sin\theta & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -\sin\theta & \cos\theta & a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ \hline & & \cos\theta & \sin\theta & a_1 & a_2 \\ & & -\sin\theta & \cos\theta & a_2 & -a_1 \\ \hline & & & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & & & -\sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} \theta \in \mathbb{R} \\ a_j \in \mathbb{R} \end{array} \right\},$$

$$T_0^l(z_1, z_2, z_3) = z_2^l \left(|z_2|^2 \frac{\partial^l}{\partial z_3^l} + l\overline{z_1} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z_3^{l-1}} \right) \delta(z_3, \overline{z_3}).$$

また $n=2$ のときは以下のようになる（注釈 4.4 参照）.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & b\varepsilon \\ & e^{i\theta} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \theta \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{C} \end{array} \right\},$$

$$\iota(H) := \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\theta & \sin\theta & a_1 & a_2 \\ -\sin\theta & \cos\theta & a_2 & -a_1 \\ \hline & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} \theta \in \mathbb{R} \\ a_j \in \mathbb{R} \end{array} \right\},$$

$$T_2^l(z_1, z_2) = z_1^l \frac{\partial^l}{\partial z_2^l} \delta(z_2, \overline{z_2}).$$

参考文献

[1] A. Aizenbud, D. Gourevitch, Schwartz functions on Nash manifolds, Int. Math. Res. Not. IMRN **2008** (2008).

[2] A. Aizenbud, D. Gourevitch, A. Minchenko, Holonomicity of relative characters and applications to multiplicity bounds for spherical pairs, arXiv:1501.01479, to appear in Selecta Math.

[3] I. M. Gelfand, G. E. Shilov, Generalized functions. Vol. I: Properties and operations, Academic Press, New York, 1964, xvii+423 pp.

[4] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups. II, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 26–65.

[5] M. Kashiwara, Systems of Microdifferential Equations, Progr. Math. **34** (1983), Birkhäuser.

[6] B. Kimelfeld, Homogeneous domains in flag manifolds of rank 1, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 506–588.

[7] T.Kobayashi, Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" in Nagano (F. Sato, ed.), 1995, 22–41 (in Japanese).

[8] T. Kobayashi, Shintani functions, real spherical manifolds, and symmetry breaking operators, Developments in Mathematics **37** (2014), 127–159.

[9] T. Kobayashi, T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, Adv. Math. **248** (2013), 921–944.

[10] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups, Mem. Amer. Math. Soc. **238** (2015).

[11] T. Kobayashi, T. Yoshino, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces-revisited, Pure and Appl. Math. Quarterly **1** (2005), 603–684.

[12] T. Matsuki, Orbits on flag manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990, Vol. II (1991), Springer-Verlag, 807–813.