数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 33-38

直交群の多重旗多様体
Multiple flag varieties for orthogonal groups

龍谷大学・文学部　松木 敏彦
Toshihiko Matsuki
Faculty of Letters, Ryukoku University

Abstract

標数が 2 でない任意の無限体上の split 直交群の 3 重旗多様体が有限型（軌道の数が有限個）になるための必要十分条件は、奇数次のときは [M15] で与えられた。偶数次のときについての研究の中間報告をする。

Let $\mathcal{T}$ be a triple flag variety for the split orthogonal group G over an arbitrary infinite field of characteristic not two. If the degree of G is odd, then the condition on $\mathcal{T}$ for the finiteness of $|G\backslash\mathcal{T}|$ is given in [M15]. I will report my study on the even-degree case.

1 split 直交群の旗多様体

$\mathbb{F}$ を標数 $\neq 2$ の可換体とし、$\mathbb{F}^m$ 上の対称双線形形式 $(\ ,\ )$ を

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,m+1-j}$$

で定義する。ただし、$e_1,\ldots,e_m$ は $\mathbb{F}^m$ の標準基底である。このとき、m 次 split 直交群 G が

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}) \mid (gu, gv) = (u, v) \text{ for all } u, v \in \mathbb{F}^m\}$$
$$(= \mathrm{O}_m(\mathbb{F}) \text{ と書く})$$

で定義される。m 次 split 特殊直交群 G_0 も

$$G_0 = \{g \in G \mid \det g = 1\} \quad (= \mathrm{SO}_m(\mathbb{F}) \text{ と書く})$$

で定義できる。正の整数列 $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_p)$ であって

$$a_1 + \cdots + a_p \leq \left[\frac{m}{2}\right] = n$$

を満たすものによって、G の旗多様体

$$\mathrm{Fl}_\mathbf{a} = \{V_1 \subset \cdots \subset V_p \mid \dim V_j = a_1 + \cdots + a_j,\ (V_p,\ V_p) = \{0\}\} \cong G/P_\mathbf{a}$$

が定義される。ただし、

$$P_{\mathbf{a}} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & & & & & * \\ & \ddots & & & & & \\ & & A_p & & & & \\ & & & B & & & \\ & & & & A_p^* & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & A_1^* \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; A_i \in \mathrm{GL}_{a_i}(\mathbb{F}),\ B \in \mathrm{O}_{a_0}(\mathbb{F}) \right\},$$

$$a_0 = m - 2(a_1 + \cdots + a_p), \quad A_i^* = J_{a_i}\,{}^tA_i^{-1} J_{a_i}, \quad J_{a_i} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

とする。

例 1.1 (1) $m=2$ のとき、$\mathrm{Fl}_{(1)} = \{\mathbb{F}e_1,\ \mathbb{F}e_2\}$
(2) $m=3$ のとき、

$$\mathrm{Fl}_{(1)} = \{\mathbb{F}e_1\} \sqcup \{\mathbb{F}e_3\} \sqcup \{\mathbb{F}(e_1 + \lambda e_2 - \frac{\lambda^2}{2} e_3) \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\}$$

特に、$\mathbb{F} = \mathbb{F}_s$ (s 個の元からなる有限体) のとき、$|\mathrm{Fl}_{(1)}| = s+1$ である。
(3) $m=4$ のとき、

$$\begin{aligned}\mathrm{Fl}_{(2)} = &\{\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2\} \sqcup \{\mathbb{F}e_3 \oplus \mathbb{F}e_4\} \sqcup \{\mathbb{F}(e_1 + \lambda e_3) \oplus \mathbb{F}(e_2 - \lambda e_4) \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\} \\ &\sqcup \{\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_3\} \sqcup \{\mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_4\} \sqcup \{\mathbb{F}(e_1 + \lambda e_2) \oplus \mathbb{F}(e_3 - \lambda e_4) \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\}\end{aligned}$$

特に、$\mathbb{F} = \mathbb{F}_s$ のとき、$|\mathrm{Fl}_{(2)}| = 2(s+1)$ である。また、$\mathrm{Fl}_{(1)}$, $\mathrm{Fl}_{(1,1)}$ も同様に記述でき、$\mathbb{F} = \mathbb{F}_s$ のとき、$|\mathrm{Fl}_{(1)}| = (s+1)^2$, $|\mathrm{Fl}_{(1,1)}| = 2(s+1)^2$ である。

2 3重旗多様体と4重旗多様体

3つの正整数の列 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q)$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_r)$ で

$$a_1 + \cdots + a_p \le n, \quad b_1 + \cdots + b_q \le n, \quad c_1 + \cdots + c_r \le n$$

を満たすものに対し、3重旗多様体

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}$$

が定義できる。$G = \mathrm{O}_m(\mathbb{F})$ の $\mathcal{T}$ への作用を

$$g \cdot (f_1, f_2, f_3) = (gf_1, gf_2, gf_3)$$

によって定義するとき、次の問題を考える。

問題 $|\mathbb{F}| = \infty$ とするとき、

$$|G\backslash\mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}| < \infty$$

（このとき、$\mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$ は有限型であるという）となるための **a**, **b**, **c** の条件を求めよ。

注意 2.1 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F})$ のとき、この問題は [MWZ99], [MWZ00] で解かれた。ただし、彼らは $\mathbb{F}$ を代数的閉体と仮定している。

例 2.2 $m = 3$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{(1),(1),(1)}$ のとき、$|G\backslash\mathcal{T}| = 5$ であり、それぞれの軌道は

$$\{f_1 = f_2 = f_3\},\ \{f_1 = f_2 \neq f_3\},\ \{f_2 = f_3 \neq f_1\},\ \{f_3 = f_1 \neq f_2\},$$
$$\{f_1 \neq f_2 \neq f_3 \neq f_1\}$$

である。

　同様にして、4 重旗多様体も考えられる。

例 2.3 $m = 3$ のとき、4 重旗多様体 $\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{(1)} \times \mathrm{Fl}_{(1)} \times \mathrm{Fl}_{(1)} \times \mathrm{Fl}_{(1)}$ は無限型である。

証明 $f_1 = \mathbb{F}e_1$, $f_2 = \mathbb{F}e_3$, $f_3 = \mathbb{F}(e_1 + e_2 - \frac{1}{2}e_3)$, $f_{4,\lambda} = \mathbb{F}(e_1 + \lambda e_2 - \frac{\lambda^2}{2}e_3)$ $(\lambda \in \mathbb{F}^\times)$ とし、

$$x_\lambda = (f_1, f_2, f_3, f_{4,\lambda})$$

とおく。このとき、$Gx_\lambda \ni x_\mu \Longrightarrow \lambda = \mu$ を示せばよい。

　$g \in G$, $gx_\lambda = x_\mu$ とすると、$gf_1 = f_1$, $gf_2 = f_2$ だから、

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{F}^\times,\ \varepsilon = \pm 1)$$

さらに、$gf_3 = f_3$ であるので $a = \varepsilon$ となり、従って $g = \varepsilon I$ である。$gf_{4,\lambda} = f_{4,\mu}$ だから $\lambda = \mu$ となる。（注意: $\mathbb{F}$ が代数的閉体のときは $\dim \mathcal{M} = 4$, $\dim G = 3$ だから、次元の比較により示せる。）　$\square$

命題 2.4 ([M15] Proposition 1.2) $n \geq 1$, $k \geq 4$ のとき、$\mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{F})$ の k 重旗多様体は無限型である。

証明 $k=4$, $\mathcal{M}=\mathrm{Fl}_{(a)}\times\mathrm{Fl}_{(b)}\times\mathrm{Fl}_{(c)}\times\mathrm{Fl}_{(d)}$ としてよい。$U_{[\ell]}=\mathbb{F}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}e_\ell$ とおき、

$$\begin{aligned} f_1 &= U_{[a-1]}\oplus\mathbb{F}e_n,\ f_2=U_{[b-1]}\oplus\mathbb{F}e_{n+2},\\ f_3 &= U_{[c-1]}\oplus\mathbb{F}(e_n+e_{n+1}-\frac{1}{2}e_{n+2}),\\ f_{4,\lambda} &= U_{[d-1]}\oplus\mathbb{F}(e_n+\lambda e_{n+1}-\frac{\lambda^2}{2}e_{n+2}),\\ x_\lambda &= (f_1,f_2,f_3,f_{4,\lambda})\quad(\lambda\in\mathbb{F}^\times)\end{aligned}$$

とおくとき、

$$Gx_\lambda\ni x_\mu\Longrightarrow\lambda=\mu$$

が示せる。 □

3 奇数次のとき

$\mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}=\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}$ の成分の入れ換えにより、$p\le q\le r$ と仮定してよい。

補題 3.1 ([M15] Corollary 2.6) $m=5$ のとき、$\mathcal{T}_{(2),(1,1),(1,1)}$ および $\mathcal{T}_{(1),(1,1),(1,1)}$ は無限型である。

系 3.2 ([M15] Proposition 1.3) $\mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$ が有限型 $\Longrightarrow p=q=1$

以下、$p=q=1$ とする。さらに、
　$r=1$ のとき、$a_1\le b_1\le c_1$
　$r\ge 2$ のとき、$a_1\le b_1$
と仮定してよい。

補題 3.3 $m=4$, $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2|=\infty$ （例えば $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$ ）のとき、$\mathcal{T}_{(1),(1),(1)}$ は無限型である。

証明 $f_1=\mathbb{F}e_1$, $f_2=\mathbb{F}e_4$, $f_{3,\lambda}=\mathbb{F}(e_1+\lambda e_2+e_3-\lambda e_4)$, $x_\lambda=(f_1,f_2,f_{3,\lambda})$ $(\lambda\in\mathbb{F}^\times)$ とおくとき、

$$Gx_\lambda\ni x_\mu\Longrightarrow\mu\in\lambda(\mathbb{F}^\times)^2$$

が示せる。 □

系 3.4 ([M15] Proposition 1.4) $\max(a_1,b_1,c_1)<n$, $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2|=\infty\Longrightarrow\mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$ は無限型

従って、次の条件

$$\text{(C)} \qquad \max(a_1, b_1, c_1) < n \Longrightarrow |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty$$

を仮定してよい。

以上の条件の下で、

定理 3.5 ([M15] Theorem 1.6) $\mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$ が有限型であるための必要十分条件は、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が次の (I),(II),(III),(IV) のいずれかを満たすことである。

$$\text{(I) } a_1 = b_1 = n \qquad \text{(II) } a_1 = 1$$
$$\text{(III) } r = 1,\ c_1 = n \qquad \text{(IV) } r = 2,\ b_1 = n$$

注意 3.6 (1) 条件 (C) が影響するのは (II) 型のみである。

(2) (I) 型と (II) 型は $\mathbf{c}$ について無条件である。従って、特に $\mathbf{c} = (1^n) = (1, \ldots, 1)$ の場合（$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}$ は full flag variety $\Longleftrightarrow$ $P_{\mathbf{c}} = B$ はボレル部分群）も有限型である。

$\mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$ の G-軌道分解と 2 重旗多様体 $\mathcal{D} = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}$ の $P_{\mathbf{c}}$-軌道分解は自然に 1 対 1 に対応するが、[L94] と [S03] において、任意の単純リー群 G に対して、開 B-軌道を持つ 2 重旗多様体が分類されている ([L94] は $P_{\mathbf{a}}$, $P_{\mathbf{b}}$ が極大の場合)。さらに、$\mathbb{F}$ が標数 0 の代数的閉体のとき、$\mathcal{D}$ が開 B-軌道を持つならば $|B\backslash\mathcal{D}| < \infty$ である ([B86],[V86])。

(3) (I) 型の軌道分解は [M13] を参照。

(4) (III) 型の軌道分解の例については [M14] を参照。

4 偶数次のとき（中間報告）

まだ研究中であるが、無限型を除外するために、次の 3 つの補題が使える。

補題 4.1 ((i), (ii) は [M15] Corollary 2.10, Corollary 2.13) $m = 6$ のとき、次の 3 重旗多様体は無限型である。

(i) $\mathcal{T}_{(2),(2),(2)}$ (ii) $\mathcal{T}_{(2),(2),(1,2)}$ (iii) $\mathcal{T}_{(2),(1,2),(1,2)}$ (iv) $\mathcal{T}_{(1,2),(1,2),(1,2)}$

補題 4.2 $m = 8$ のとき、次の 3 重旗多様体は無限型である。

(i) $\mathcal{T}_{(4),(2,2),(2,2)}$ (ii) $\mathcal{T}_{(4),(2,2),(2,1)}$ (iii) $\mathcal{T}_{(4),(2,2),(1,2)}$
(iv) $\mathcal{T}_{(4),(2,1),(2,1)}$ (v) $\mathcal{T}_{(4),(2,1),(1,2)}$ (vi) $\mathcal{T}_{(4),(1,2),(1,2)}$

補題 4.3 $m = 12$ のとき、次の 3 重旗多様体は無限型である。

(i) $\mathcal{T}_{(6),(4),(2,2,2)}$ (ii) $\mathcal{T}_{(6),(4),(2,2,1)}$ (iii) $\mathcal{T}_{(6),(4),(2,1,2)}$ (iv) $\mathcal{T}_{(6),(4),(1,2,2)}$

$\mathbf{c} = (1^n)$ のとき、Stembridge の分類 ([S03]) により、$\mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$ が有限型になるのは次の (I) または (II) の場合である。

(I) $\mathbf{a} = (1)$, $\mathbf{b} = (i, n-i)$ $(\mathbf{b} = (i)$ も OK)

(II) $\mathbf{a} = (n)$,

$$\mathbf{b} = \begin{cases} (1,1) & ((1),\ (2)\ \text{も OK}) \\ (3) & \\ (n-1,1) & ((n-1),\ (n)\ \text{も OK}) \\ (1,n-1) & \end{cases}$$

注意：(I) 型は $\mathbb{F}$ に関する前節の条件 (C) を仮定する必要があるが、(II) 型は無条件である。

References

[B86] M. Brion, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55** (1986), 191–198.

[L94] P. Littelmann, *On spherical double cones*, J. Alg. **166** (1994), 142–157.

[MWZ99] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), 97–118.

[MWZ00] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Alg. **230** (2000), 245–265.

[M13] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, J. Alg. **375** (2013), 148–187.

[M14] 松木敏彦, 奇数次直交群の有限型多重旗多様体, 数理解析研究所講究録（表現論と調和解析の新たな進展） **1925** (2014), 78–93.

[M15] T. Matsuki, *Orthogonal multiple flag varieties of finite type I : Odd degree case*, J. Alg. **425** (2015), 450–523.

[S03] J. R. Stembridge, *Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters*, Representation Theory **7** (2003), 404–439.

[V86] E. B. Vinberg, *Complexity of action of reductive groups*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.