数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 60-74

Flat Structures associated with Valentiner's Reflection Group

—Based on Joint Work with M. Kato and T. Mano—

Jiro Sekiguchi
Department of Mathematics
Faculty of Technology
Tokyo University of Agriculture and Technology

Abstract

We shall explain how flat coordinates, potential vector fields and algebraic solutions to Painlevé VI equation arise from free diviors, taking as an example, Valentiner's reflectiong group which is sometimes denoted by ST27 group.

1 序文

本稿では，Valentiner 鏡映群に関係する平坦構造やパンルベ VI 方程式の代数関数解などについて議論する．[16], [18], [19] ではより一般的な視点で議論しているので，関心のある読者はそれらを参考にされるとよい．

よく知られているが，パンルベ VI 方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dt^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-t}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{w-t}\right)\frac{dw}{dt}\\ &\quad+\frac{w(w-1)(w-t)}{2t^2(t-1)^2}\left((\theta_\infty-1)^2-\frac{\theta_x^2 t}{w^2}+\frac{\theta_y^2(t-1)}{(w-1)^2}+\frac{(1-\theta_z^2)t(t-1)}{(w-t)^2}\right).\end{aligned}\tag{1}$$

で与えられる．

方程式 (1) は 4 個のパラメータをもつが，それを $\theta=(\theta_x,\theta_y,\theta_z,\theta_\infty)$ で表すことにする．一般には (1) の解は t の超越関数である．しかしながらパラメータが特別の値のとき，(1) の解が多項式，古典的な関数，あるいは代数関数になる解が存在する．(1) の解 $w=w(t)$ が代数的であるとは，ある (u,v) の多項式 $P(u,v)$ に対して $P(t,w)=0$ が成り立つことである．

パンルベ VI 方程式の代数関数解については K. Iwasaki [14], N. J. Hitchin [12], [13], B. Dubrovin [8], B. Dubrovin -M. Mazzocco [9], P. Boalch [4], [5], [6], [7], F. V. Andreev - A. V. Kitaev [1], A. V. Kitaev [21], [22], [23], A. V. Kitaev- R. Vidunas [24], [47], O. Lisovyy-Y. Tykhyy [26] などで扱われている．代数関数解は Frobenius 多様体 [8], 正多面体の対称群 [9], [13], 複素鏡映群 [4], Grothendiek の dessens d'enfants とその変形 [1], [22], [23] などのいろいろな数学的構造と関係している．加藤，眞野との共同研究においては，代数関数解と Frobenius 多様体とその一般化が中心的な研究対象であり，[16], [17], [18], [19] に成果をまとめている．日本語の解説としては眞野 [28]，関口 [44] がある．

以下の内容を説明する．§2 は Frobenius の一般論の概説である．§3 では Valentiner の場合を例にとり，これまで筆者たちの考えたことを説明する．§4 では一般の平坦構造の簡単なまとめをする．

2 Frobenius 多様体と WDVV 方程式

Frobenius 多様体と WDVV 方程式について簡単に概観する．[8], [33] などがこの方面の基本文献である．

$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を次の形の関数とする：

$$F = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 x_n^2 + \sum_{j=1}^{m-1} x_{j+1}x_{2m-j+1}x_n + \frac{1}{2}x_{m+1}^2 x_2 + F_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) & (n = 2m+1) \\ \frac{1}{2}x_1 x_n^2 + \sum_{j=1}^{m-1} x_{j+1}x_{2m-j}x_n + F_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) & (n = 2m) \end{cases} \quad (2)$$

$F(x)$ はさらに荷重斉次関数とする．これはある零でない数 $w_1, w_2, \ldots, w_n, d$ に対して $E = \sum_{j=1}^n w_j x_j \partial_{x_j}$ としたとき，$EF = dF$ が成り立つことである．簡単のため，各 w_j は有理数とし，$0 < w_1 < w_2 < \cdots < w_n = 1$ が成り立つとする．

このような F に対して $g_j = \partial_{x_{n-j+1}} F$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とおいて $P = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ を定める．さらに n 次正方行列

$$C = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} P \\ \partial_{x_2} P \\ \vdots \\ \partial_{x_n} P \end{pmatrix} \quad (3)$$

を定義する．行列成分は $C_{ij} = \partial_{x_i} g_j$ であり，特に $\partial_{x_n} P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が成り立つ．C からさらに $\tilde{B}^{(k)} = \partial_{x_k} C$ を定義する．定義より，$(\tilde{B}^{(k)})_{ij} = \partial_{x_k}\partial_{x_i} g_j$ が成り立つ．また $C - x_n I_n$ は x_n に独立である．これより $\tilde{B}^{(n)} = I_n$ がわかる．オイラーベクトル場を使って行列 $T = EC$ も定義する．T はのちに使う．

Definition 2.1. $F = F(x_1, \cdots, x_n)$ は荷重斉次な関数で (2) の形をしているとする．

$$[\tilde{B}^p, \tilde{B}^{(q)}] = O \quad (p, q = 1, 2, \cdots n) \quad (4)$$

が成り立つとき，F をプレポテンシャルという．また $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を平坦座標という．

Remark 2.1. 荷重斉次な関数 $F = F(x_1, \cdots, x_n)$ に対する方程式 (4) を行列成分で表すと，F の多くの非線型微分方程式が得られる．これらの連立微分方程式を WDVV 方程式という．WDVV 方程式は 2 次元位相的場の理論の研究で現れたものである．WDVV 方程式については [8], [33] を参照するとよい．

3 次元の場合，4 次以上の項のある多項式であるプレポテンシャルは次のものしかないことを Dubrovin [8] は示した：

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{x_1x_3^2 + x_2^2x_3}{2} + \frac{x_1^2x_2^2}{4} + \frac{x_1^5}{60}, & A_3 \text{ case} \\ F_B &= \frac{x_1x_3^2 + x_2^2x_3}{2} + \frac{x_1x_2^3}{6} + \frac{x_1^3x_2^2}{6} + \frac{x_1^7}{210}, & B_3 \text{ case} \\ F_H &= \frac{x_1x_3^2 + x_2^2x_3}{2} + \frac{x_1^2x_2^3}{6} + \frac{x_1^5x_2^2}{20} + \frac{x_1^{11}}{3960}, & H_3 \text{ case} \\ F &= \frac{x_1x_3^2 + x_2^2x_3}{2} + x_2^4. \end{aligned} \quad (5)$$

これらの 4 種類のプレポテンシャルのうち，最下のものを除くと，階数 3 の既約の実鏡映群と対応する[1]．最下のものは，対応する 3 次正方行列が半単純にならない．

$F_A = \dfrac{x_1x_3^2 + x_2^2x_3}{2} + \dfrac{x_1^2x_2^2}{4} + \dfrac{x_1^5}{60}$ と A_3 型実鏡映群との関係に言及しておく．この F に対して，以前に定義した行列 C, T などを求める．この場合には A_3 型鏡映群の基本不変式の次数から定める．具体的には $w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{3}{4}, w_3 = 1$ である．この場合に $\det(T)$ を計算すると

$$\det(T) = x_3^3 + \frac{1}{2}x_1^2x_3^2 - \frac{1}{4}(x_1^3 + 9x_2^2)x_1x_3 + \frac{1}{64}(27x_2^4 + 56x_1^3x_2^2 - 8x_1^6)$$

[1]元来，[38] の研究過程で，斎藤はこれら 3 種のプレポテンシャルを求めていた．

がわかる．一方では，u の 4 次式

$$u^4 - 4x_1u^2 - 4x_2u + 2x_1^2 - 4x_3$$

の判別式を計算すると，$\det(T)$ に一致する．このようにして，F_A から A_3 型実鏡映群の判別式が求められる．F_B, F_H についても同様である．

3 Valentiner 鏡映群と平坦構造，パンルベ VI 方程式の代数関数解

これから，階数 3 の複素鏡映群の場合に，判別式から出発して，プレポテンシャルが構成できるかを調べる．例として Shephard-Todd の論文 [45] のリストの 27 番目の群をとる．

3.1 Valentiner 鏡映群の判別式

ST27 と表記するが，Valentiner によって研究されている．位数は 2160，基本不変式の次数は 6,12,30 である．[45] の 296 ページにはこの群の生成元として次の行列を与えている：

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\omega\tau & -\omega^2\tau^{-1} \\ -\omega^2\tau & \tau^{-1} & -\omega \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする．$\omega^2+\omega+1=0$, $\tau^2-\tau-1=0$ が成り立つ．R_1, R_2, R_3 の位数は 2 であり，R_1R_2, R_2R_3 の位数は 3，R_1R_3 の位数は 4．R_1, R_2, R_3 の間にはさらに関係式が成り立つがここでは言及しない．x_1, x_2, x_3 を次数 6,12,30 の斉次多項式である基本不変式に対応する変数とする．基本不変式と選び方には自由度があるが，適当に選ぶことによって次の h が判別式になるようにできる：

$$\begin{aligned} h \;=\;& x_3^3 - \tfrac{16}{243}(256x_1^{10} - 5760x_1^8x_2 + 50760x_1^6x_2^2 - 216675x_1^4x_2^3 + 437400x_1^2x_2^4 - 314928x_2^5)x_3 \\ &+ \tfrac{64}{19683}x_1(8192x_1^{14} - 276480x_1^{12}x_2 + 3991680x_1^{10}x_2^2 - 31978800x_1^8x_2^3 + 153800775x_1^6x_2^4 \\ &\qquad -445439412x_1^4x_2^5 + 722759760x_1^2x_2^6 - 510183360x_2^7) \end{aligned} \tag{6}$$

実鏡映群の判別式と同様に，h の零点集合は $\mathbf{C}^3$ の自由因子になる．このことは一般の複素鏡映群の場合に寺尾 [46] によって証明されている．自由因子の一般論は [35] を参照してもらう．次の行列

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & 2x_2 & 5x_3 \\ -\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 8x_1^4 - 105x_1^2x_2 \\ +324x_2^2 \end{pmatrix} & \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -64x_1^5 + 1008x_1^3x_2 \\ -3456x_1x_2^2 + 27x_3 \end{pmatrix} & -\frac{80}{81}\begin{pmatrix} 128x_1^8 - 2256x_1^6x_2 + 14445x_1^4x_2^2 \\ -38880x_1^2x_2^3 + 34992x_2^4 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 64x_1^5 - 1008x_1^3x_2 \\ +3456x_1x_2^2 + 27x_3 \end{pmatrix} & -\frac{4x_2}{27}\begin{pmatrix} 32x_1^4 - 141x_1^2x_2 \\ -108x_2^2 \end{pmatrix} & \frac{320x_1}{729}\begin{pmatrix} 128x_1^8 - 2304x_1^6x_2 + 15228x_1^4x_2^2 \\ -43335x_1^2x_2^3 + 43740x_2^4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

は h の斎藤行列である．特に $\det(M)$ は h の定数倍になる．$V_i = \sum_{j=1}^3 M_{ij}\partial_{x_j}$ とおくと，$(V_ih)/h$ は x_1, x_2, x_3 の多項式になる．複素鏡映群の斎藤行列については [32], [3] が参考になる．

h と $V_i (i=1,2,3)$ から出発して，プレポテンシャルの代替物と WDVV 方程式を少し弱めたものができることを見てみる．さらにパンルベ VI 方程式の代数関数解を構成する．

3.2 階数 2 のホロノミック系の構成

$R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ を $\mathbb{C}^3$ の座標環とし，$\mathcal{L} = R[V_1, V_2, V_3]$ とおく．$\mathcal{L}$ は R のリー環になる．これは自由因子の定義から導かれる．実際，V_1, V_2, V_3 の間には次のような関係式が成り立つ：

$$\begin{aligned} [V_1, V_2] &= 3V_2, \\ [V_1, V_3] &= 4V_3, \\ [V_2, V_3] &= w_1(x)V_1 + w_2(x)V_2 + w_3(x)V_3, \end{aligned} \tag{7}$$

ここで w_j は R に含まれる荷重斉次多項式である．[43] で定式化したが，特別な形の左 $\mathcal{L}$-加群を考えることができる．定数 r_1 をとり $V_1 u = r_1 u$ が成り立つ未知関数 $u = u(x_1, x_2, x_3)$ を考える．これは u は荷重斉次関数ということである．この u から u, V_2 で生成される R-加群 $\mathcal{N} = Ru + RV_2 u$ を定める．この $\mathcal{N}$ が左 $\mathcal{L}$-加群になるとする．したがって $\mathcal{L}\mathcal{N} = \mathcal{N}$ が成り立つ．このことを生成元を使って表すと

$$\left\{\begin{array}{rcl} V_1 u &=& r_1 u, \\ (V_2)^2 u &=& p_1(x)u + p_2(x)V_2 u, \\ V_3 u &=& p_3(x)u + p_4(x)V_2 u, \end{array}\right. \tag{8}$$

となる．ここで $p_i(x) \in R\ (i = 1,2,3,4)$ (cf. [43], (7))．これをベクトル値関数に対する微分方程式に書き直す．すると次を得る．

$$V_j \vec{u} = A_j \vec{u}\ (j = 1,2,3), \tag{9}$$

ここで $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ V_2 u \end{pmatrix}$ であり，また

$$A_1 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 3 + r_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} \\ a_{21}^{(3)} & a_{22}^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$a_{21}^{(2)}$, $a_{22}^{(2)}$, $a_{11}^{(3)}$, $a_{12}^{(3)}$, $a_{21}^{(3)}$, $a_{22}^{(3)} \in R$ は p_1, p_2, p_3, p_3 から定まる．関係式 (7) から，A_1, A_2, A_3 の間には次の関係式が成り立つ：

$$\left\{\begin{array}{lcl} [A_1, A_2] + [V_1, A_2] - 3A_2 &=& O, \\ [A_1, A_3] + [V_1, A_3] - 4A_3 &=& O, \\ [A_2, A_3] - [V_2, A_3] + [V_3, A_2] + w_1(x)A_1 + w_2(x)A_2 + w_3(x)A_3 &=& O. \end{array}\right. \tag{11}$$

(11) の第 1，第 2 の関係式から，行列 A_2, A_3 の成分が荷重斉次になることがわかる．他方では第 3 の関係式から A_2, A_3 の成分の間の自明でない関係式が得られる．

$(V_1, V_2, V_3)^t = M(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})^t$ であることから，2×2 行列 B_1, B_2, B_3 を

$$(B_1, B_2, B_3)^t = M^{-1}(A_1, A_2, A_3)^t. \tag{12}$$

で定義する．すると hB_j の成分は多項式であり，方程式系 (9) は次のように書き直せる：

$$\partial_{x_j} \vec{u} = B_j \vec{u} \quad (j = 1,2,3). \tag{13}$$

(13) に対する積分可能条件は

$$[B_i, B_j] + \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{\partial B_j}{\partial x_i} = O \quad (\forall i, j). \tag{14}$$

(14) は明らかに $\mathcal{N}$ に対する積分可能条件である．関係式 (11) を満たす (10) の形の 3 個の行列 A_1, A_2, A_3 を求めることは，A_1, A_2, A_3 から上の手続きで定めた 3 個の行列 B_1, B_2, B_3 の積分可能条件 (14) に書き直せた．

方程式系 (13) は $\partial_{x_3} \vec{u} = B_3 \vec{u}$ を含むが，これを x_3 についての常微分方程式とみることができる．それは 2 階常微分方程式に書き直せる．h は x_3 についての 3 次式であることから，この常微分方程式は x_3 平面の 3 点で特異点をもつ．さらに無限遠点も特異点である．したがって x_3 平面 (のコンパクト化) で 4 点の確定特異点をもつ微分方程式が求まる．もとの行列の係数を多項式にしていることから，この 2 階の常微分方程式の係数は有理関数である．以上からパンルベ VI 方程式の代数関数解を導くことができる．したがって，左 $\mathcal{L}$-加群 (9) とパンルベ VI 方程式の代数関数解が結びつく．以下では遠回りすることにもなるかもしれないが，Frobenius 多様体，プレポテンシャルなどとの関係を調べて，それからパンルベ VI 方程式の代数関数解を導く，という議論をする．

積分可能条件 (14) を満たす行列 A_1, A_2, A_3 を求めることはそれほど簡単ではない．荷重斉次多項式 $a_{ij}^{(k)}$ を未定係数にして，それらの間の関係式からできる連立代数方程式を解くと次のような解が求まる：

第 1 の場合

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 3+r_1 \end{pmatrix}, \\
A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{16}{27}(260x_1^6 - 3573x_1^4x_2 + 16578x_1^2x_2^2 - 26244x_2^3 + 27x_1x_3) & 0 \end{pmatrix}, \\
A_3 &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(x_1^2 - 6x_2)x_2 & -\frac{4}{9}x_1 \\ \frac{4}{243}\begin{pmatrix} 3968x_1^7 - 54000x_1^5x_2 + 245808x_1^3x_2^2 \\ -377136x_1x_2^3 + 513x_1^2x_3 - 972x_2x_3 \end{pmatrix} & -\frac{4}{3}(x_1^2 - 6x_2)x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{15}$$

第 2 の場合

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 3+r_1 \end{pmatrix}, \\
A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{16}{27}(476x_1^6 - 6192x_1^4x_2 + 25542x_1^2x_2^2 - 32076x_2^3 + 27x_1x_3) & 0 \end{pmatrix}, \\
A_3 &= \begin{pmatrix} \frac{8}{27}(2x_1^4 - 16x_1^2x_2 + 27x_2^2) & -\frac{10}{27}x_1 \\ -\frac{16}{81}\begin{pmatrix} 616x_1^7 - 8184x_1^5x_2 + 34980x_1^3x_2^2 \\ -46980x_1x_2^3 + 54x_1^2x_3 - 81x_2x_3 \end{pmatrix} & -\frac{8}{27}(2x_1^4 - 16x_1^2x_2 + 27x_2^2) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{16}$$

3.3 3 次正方行列の構成

第 1 の場合に [19], §2 で実行した計算と同じことをしてみる．[17], Appendix B にある計算法がもとであるが少し簡略化している．

A_1, A_2, A_3 は (15) で定義したものにする．次に B_1, B_2, B_3 は (12) によって定義された 2×2 行列とする．[18], Appendix B, (17) のようにして B_j $(j = 1, 2, 3)$ から以下の (E1)-(E4) を満たすパッフ系

$$dZ = \Big(\sum_{i=1}^{3} \Gamma^{(i)} dx_i\Big) Z \tag{17}$$

を構成する：

(E1) $\Gamma^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ は 2×2 行列であり，その成分は x_1, x_2, x_3 の有理関数である．

(E2) 次の満たす 2×2 行列 $\Gamma_j^{(i)}$ が存在する：

まず $\Gamma^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ のように表される．

$$\Gamma^{(i)} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\Gamma_j^{(i)}}{x_3 - z_j(x_1, x_2)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

そして $\Gamma_j^{(i)}$ は x_3 の多項式であり，その係数は x_1, x_2 に依存している．z_1, z_2, z_3 は x_3 の 3 次式 h に対する 3 次方程式の解である．つまり $h = \prod_{i=1}^{3}(x_3 - z_i)$ が成り立つ．

(E3) $\operatorname{rank} \Gamma_j^{(3)} = 1$ $(j = 1, 2, 3)$.

(E4) $\Gamma_\infty = -\sum_{j=1}^{3} \Gamma_j^{(3)}$ は対角行列でその対角成分は定数である．

Remark 3.1. ここで少し技術的な注意をしておく．h は x_3 の 3 次式であるが，当然ながら z_1, z_2, z_3 は x_1, x_2 の関数になるが有理式ではない．Mathematica を使って計算を実行したが，このような代数関数がでてくる計算は苦手である．一応次のようにして z_1, z_2, z_3 を与えた．$x_3 = z_1$ を $h = 0$ のひとつの解とする．す

ると $h(x_1,x_2,z_1)=0$ が成り立つ．そこで $h_2=\frac{h(x_1,x_2,x_3)-h(x_1,x_2,z_1)}{x_3-z_1}$ とおくと，h_2 は x_3 の 2 次式である．そこで $x_3=z_2$ を $h_2=0$ のひとつの解とする．この場合，$z_3=-z_1-z_2$ が残りの解であることがわかる．

数学的にはあまり意味のないことだが，計算を実行する過程で，z_1,z_2,z_3 をどのようにしているのかがわかる．

B_1,B_2,B_3 を少し変形して (E1)-(E4) を満たす $\Gamma^{(1)},\Gamma^{(2)},\Gamma^{(3)}$ を構成する．

$$P_0=\begin{pmatrix}1&0\\ \varphi&1\end{pmatrix}$$

$$B_i' \;=\; (P_0B_i+\partial_{x_i}P_0)P_0^{-1}-\tfrac{s_0(\partial_{x_i}h)}{h}I_2 \quad (i=1,2,3)$$

とおく．φ は x_1,x_2,x_3 の関数，s_0 は定数．φ, s_0 をこれから定める．さて

$$G_{i,j}=\lim_{x_3\to z_j}(x_3-z_j)B_i'$$

とおいて

$$B_i'=\sum_{j=1}^{3}\frac{G_{i,j}}{x_3-z_j}\quad (i=1,2,3)$$

が成り立つように φ を求める．φ の 1 階の偏微分方程式が得られるが，簡単に解けて $\varphi=16x_1x_2-\frac{76}{27}x_1^3$ とおけばよいことがわかる．

(E3) についてだが，$G_{3,j}$ は 2×2 行列だから，階数が 1 になるならば $\det(G_{3,j})=0$ が成り立つ．$\det(G_{3,j})=0\ (j=1,2,3)$ を直接計算すると，

$$s_0=\frac{1+r_1}{75},\quad \frac{2+r_1}{75}$$

が導かれる．そこで，B_i' に $\varphi=16x_1x_2-\frac{76}{27}x_1^3$, $s_0=\frac{1+r_1}{75}$ を代入したものを $\Gamma^{(i)}$ とおく．するとこのようにして得られた $\Gamma^{(1)},\Gamma^{(2)},\Gamma^{(3)}$ に対して (E1)-(E4) が成り立つ．$\Gamma_j^{(i)}$ は

$$\Gamma^{(i)}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\Gamma_j^{(i)}}{x_3-z_j(x)},\quad i=1,2,3.$$

が成り立つようにして定義する．また

$$\Gamma_\infty=-(\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\Gamma_3^{(3)})$$

とおけば，$\Gamma_\infty=\mathrm{diag}[\frac{1}{5},-\frac{2}{5}]$ が成り立つ．

ここまではまだよくある計算と思えるが，これから少し大変な計算を実行することになる．最近開発されて計算法で，middle convolution と言われるものである．

$\Gamma_j^{(3)}$ の階数は 1 であるから，

$$\Gamma_j^{(3)}=-\vec{b}_j{}^t\cdot\vec{a}_j\Gamma_\infty\quad (j=1,2,3). \tag{18}$$

が成り立つようなベクトルの組 $\vec{b}_j=(b_{1j},b_{2j})$, $\vec{a}_j=(a_{j1},a_{j2})\ (j=1,2,3)$ が存在する a_{j1} を与えれば，a_{j2},b_{1j},b_{2j} は一意に定まる．定義から

$$\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\ b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\\ a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}=I_2.$$

が成り立つ．そこで 2 つのベクトル (b_{31}, b_{31}, b_{33}), (a_{13}, a_{23}, a_{33}) を

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{31} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = I_3.$$

が成り立つように選ぶ．自由度を調べると，初めから $b_{31} = b_{32} = b_{33} = 1$ としてよい．それでも 2 つの行列

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を決定することは大変である．各行列成分は a_{11} 以外の a_{ij}, b_{ij} は a_{11} と x_1, x_2, z_1, z_2, z_3 の有理式になっている．ところで $z_3 = -z_1 - z_2$ より z_3 を消去するのは簡単だが，z_1 は x_1, x_2 の多項式を係数とする 3 次式の解であり，そのような関係式を満たしている．さらに z_2 は x_1, x_2, z_1 の多項式を係数とする 2 次式の解である．各行列成分はそのような代数関数を含む式になっている．したがって実際にはより簡単な式に還元できるかもしれないがすぐにはわからない．

さらに次の行列を求める：

$$S = \sum_{j=1}^{3} (x_3 - z_j) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \end{pmatrix}.$$

この定義からはすぐには気づかないが

$$\sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \end{pmatrix} = I_3$$

が成り立つので，$S - x_3 I_3$ は x_3 に依らないよとがわかる．

ここで，少しばかり計算の見通しをよくするために

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として，$S' = g(S^t)g$ とおく．すると

$$S' = \begin{pmatrix} \frac{1}{243}\begin{pmatrix} 304x_1^5 - 3420x_1^3x_2 \\ +9720x_1x_2^2 + 243x_3 \end{pmatrix} & \frac{\psi}{21870x_1}\begin{pmatrix} 110x_1^6 - 1485x_1^4x_2 \\ +7290x_1^2x_2^2 - 13122x_2^3 \end{pmatrix} & -\frac{320}{6561}\begin{pmatrix} 1001x_1^8 - 18018x_1^6x_2 \\ +119070x_1^4x_2^2 - 341172x_1^2x_2^3 \\ +354294x_2^4 \end{pmatrix} \\ \frac{640x_1}{9\psi}(5x_1^4 - 45x_1^2x_2 + 81x_2^2) & \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -152x_1^5 + 1710x_1^3x_2 \\ -4860x_1x_2^2 + 81x_3 \end{pmatrix} & -\frac{22400x_1^2}{243\psi}\begin{pmatrix} 52x_1^6 - 819x_1^4x_2 \\ +4536x_1^2x_2^2 - 8748x_2^3 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{9}(-2x_1^2 + 9x_2) & -\frac{\psi(4x_1^2 - 27x_2)}{12960} & \frac{1}{243}\begin{pmatrix} 152x_1^5 - 1710x_1^3x_2 \\ +4860x_1x_2^2 + 243x_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

ただし a_{11} を次の関係式で関数 $\psi(x_1, x_2)$ に置き換える：

$$a_{11} = \frac{\psi(x_1, x_2)\xi(x_1, x_2)}{\eta(x_1, x_2)}$$

$$\begin{aligned} \xi(x_1, x_2) \quad = \quad & (x_1^2 - 4x_2)x_2^2(25x_1^4 - 216x_1^2x_2 + 486x_2^2)(32x_1^4 - 351x_1^2x_2 + 972x_2^2) \\ & (13475x_1^8 - 253044x_1^6x_2 + 1775844x_1^4x_2^2 - 5511240x_1^2x_2^3 + 6377292x_2^4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\eta(x_1,x_2) \quad = \quad & 1261568000x_1^{22} - 61502791680x_1^{20}x_2 + 1355542456320x_1^{18}x_2^2 - 17819004853440x_1^{16}x_2^3 + \cdots \\
& + z_1(-266112000x_1^{17} + \cdots - 80335512599040x_1x_2^8) \\
& + z_1^2(-112266000x_1^{12} + \cdots - 502096953744x_2^6)
\end{aligned}
$$

省略しているが，実際には η はかなり長い式である．注意すべきことは z_1 も含まれているので η は x_1, x_2 の代数関数とみるべきである．

S' の行列成分をみると，x_1, x_2 の有理式に ψ がないか，あるいは分子か分母に入っていることが観察できる．複雑さをすべて ψ に吸収させれば，S' は比較的簡単な式で表される．

3.4 平坦構造について

Frobenius 多様体の理論の概観のところでは，まずプレポテンシャルから出発して行列 C を構成し，次に行列 T を定めた．いま求めた S' は T に当たるものと見る．T と C のそれぞれの (i,j) 成分は定数倍だけ異なることに注意する．それにならって，$S' = (S'_{ij})$ から $S'' = (p_{ij}S'_{ij})$ を構成する．ここで p_{ij} は零でない定数とする．さらに対角成分についての条件から $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 1$ とする．もし S'' が C にあたるものであれば，WDVV 方程式にあたるものを満たすべきである．それは

$$
[\partial_{x_i}S'', \partial_{x_j}S''] = O \quad (i,j = 1,2,3)
$$

である．すでに注意したように，$\partial_{x_3}S'' = I_3$ になるから，

$$
[\partial_{x_3}S'', \partial_{x_j}S''] = O \quad (j = 1,2)
$$

は明らかである。したがって自明でない方程式は

$$
[\partial_{x_1}S'', \partial_{x_2}S''] = O \tag{19}
$$

である．ψ を x_1, x_2 の関数として，ψ と定数 p_{ij} $(i \neq j)$ を，関係式 (19) が成り立つように選べるかが問題になる．

(19) の行列成分を見ることで，

$$
\partial_{x_i}\psi = \Sigma_i(x_1, x_2, p_{ij})\psi \quad (i = 1,2)
$$

この関係式を (19) の別の行列成分に代入することで，

$$
p_{13} = \frac{125}{96p_{21}p_{32}}, \quad p_{23} = \frac{25}{21p_{32}}, \quad p_{31} = \frac{6p_{21}p_{32}}{5}, \quad p_{12} = \frac{25}{24p_{21}} \tag{20}
$$

がわかる．これらの等式を再び (19) に代入すると，

$$
\partial_{x_1}\psi = \frac{1}{x_1}\psi, \quad \partial_{x_2}\psi = 0
$$

となる．$\psi = x_1$ は解である．ψ がこのように簡単に求まったのは，$a_{11} = \frac{\psi(x_1,x_2)\xi(x_1,x_2)}{\eta(x_1,x_2)}$ によって ψ を定義したことが大きい．a_{11} のままで計算すると解を求めることはそれほど簡単とは思えない．S'' に $\psi = x_1$ と (20) によって $p_{13}, p_{23}, p_{31}, p_{12}$ を消去して得られる行列を S''' とする．このとき，S''' が C に該当するならば，平坦座標は

$$
t_1 = S'''_{31},\ t_2 = S'''_{32},\ t_3 = S'''_{33}
$$

になるであろう．具体的には

$$
\begin{aligned}
t_1 &= -\tfrac{2p_{21}p_{32}}{15}(2x_1^2 - 9x_2), \\
t_2 &= -\tfrac{p_{32}}{12960}x_1(4x_1^2 - 27x_2), \\
t_3 &= \tfrac{1}{243}(152x_1^5 - 1710x_1^3x_2 + 4860x_1x_2^2 + 243x_3)
\end{aligned} \tag{21}
$$

である．これらのうちで第 1 と第 3 の方程式から x_2, x_3 を消去すると，

$$\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{1}{18p_{21}p_{32}}(15t_1 + 4p_{21}p_{32}x_1^2), \\ x_3 &= t_3 - \tfrac{1}{81p_{21}^2p_{32}^2}(1125t_1^2x_1 + 1125p_{21}p_{32}t_1x_1^3 + 4p_{21}^2p_{32}^2x_1^5) \end{aligned}$$

を得る．さらに $x_1 = -576p_{21}z$, $p_{32} = -\frac{5}{73728p_{21}^3}$ とおくと，第 2 式より

$$t_2 + t_1z - 2z^3 = 0 \tag{22}$$

が導かれる．ここで $p_{21} = \frac{1}{64\cdot 3^{4/5}\cdot 5^{2/5}}$ とすれば S''' は

$$\begin{pmatrix} t_3 + \frac{1}{25}(-20t_1^2z + 50t_1z^3 - 36z^5) & \frac{4}{15}(2t_1^3 - 6t_1^2z^2 + 21t_1z^4 - 12z^6) & \frac{4}{5}(2t_1^4 + 4t_1^3z^2 - 14t_1^2z^4 + 10t_1z^6 - 9z^8) \\ \frac{2}{5}(t_1^2 + 3t_1z^2 - 9z^4) & t_3 + \frac{1}{25}(80t_1^2z - 200t_1z^3 + 144z^5) & \frac{4}{5}z(-4t_1^3 + 16t_1^2z^2 - 33t_1z^4 + 18z^6) \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix}$$

となる．そこでこの行列を C で表すことにする．

3.5 ポテンシャル・ベクトル場

この時点でわかったことを確認すると，(t_1, t_2, t_3) は行列 C と関係する平坦座標である．しかしこの場合，

$$-t_2 - t_1z + 2z^3 = 0$$

で定まる t_1, t_2 の代数関数 z が登場した．t_1, t_2, t_3, z の重みは

$$w(t_1) = \frac{2}{5},\ w(t_2) = \frac{3}{5},\ w(t_3) = 1,\ w(z) = \frac{1}{5}$$

である．C は WDVV 方程式の類似の関係式を満たすから，ある意味で積分可能である．つまり，導き方を説明しないが，

$$\begin{aligned} h_1 &= (175t_1t_3 - 70t_1^3z + 70t_1^2z^3 + 378t_1z^5 - 540z^7)/175, \\ h_2 &= (10t_1^4 - 120t_1t_2^2 + 75t_2t_3 + 30t_1^2z^4 - 192t_1z^6 + 324z^8)/75, \\ h_3 &= (16t_1^5 + 80t_1^2t_2^2 + 25t_3^2 - 80t_1^3z^4 + 540t_1^2z^6 - 1080t_1z^8 + 432z^{10})/50. \end{aligned}$$

とおき，さらに $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ とおけば

$$C = \begin{pmatrix} \partial_{t_1}\vec{h} \\ \partial_{t_2}\vec{h} \\ \partial_{t_3}\vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{t_1}h_1 & \partial_{t_1}h_2 & \partial_{t_1}h_3 \\ \partial_{t_2}h_1 & \partial_{t_2}h_2 & \partial_{t_2}h_3 \\ \partial_{t_3}h_1 & \partial_{t_3}h_2 & \partial_{t_3}h_3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

ではひとつの目標であったプレポテンシャルは存在するだろうか．もし存在するとして，それを $F = F(t_1, t_2, t_3)$ とする．条件は

$$\partial_{t_i}F = h_{4-i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

である．F の形をみるだけでプレポテンシャルは存在しないことがわかる．そこでプレポテンシャルは忘れて，$\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ から出発する理論を創る．[18] にその大枠がある．次節で簡単な説明をする．$\vec{h}$ をポテンシャル・ベクトル場ということにする．[25] にこの用語がある．また [27] には少し異なる定式化であるが，local vector potential という概念がある．

3.6 パンルベ VI 方程式の代数関数解

上で求めた C から出発する．今の場合

$$w(t_1) = \frac{2}{5},\ w(t_2) = \frac{3}{5},\ w(t_3) = 1,\ w(z) = \frac{1}{5}$$

であるから，

$$E = \frac{1}{5}(2t_1\partial_{t_1} + 3t_2\partial_{t_2} + 5t_3\partial_{t_3})$$

とおき，行列 $T = EC$ を定義する．$h = \det(T)$ とおく．この t_1, t_2, t_3, z の多項式 h は，関係式 (22) によって，t_1, t_3, z の多項式になる．それは次のように表される[2]：

$$\begin{aligned} h \;=\; & (-768t_1^5t_3 + 625t_3^3 - 3072t_1^7z + 1500t_1^2t_3^2z - 4560t_1^4t_3z^2 + 6464t_1^6z^3 - 3750t_1t_3^2z^3 + 23520t_1^3t_3z^4 \\ & -6432t_1^5z^5 + 2700t_3^2z^5 - 52980t_1^2t_3z^6 + 50640t_1^4z^7 + 66960t_1t_3z^8 - 169160t_1^3z^9 - 27216t_3z^{10} \\ & +212976t_1^2z^{11} - 132192t_1z^{13} + 46656z^{15}) \end{aligned}$$

一般には

$$B_\infty^{(3)} = \mathrm{diag}\left[-r + \frac{2w_1 - w_2 - w_3}{3}, -r + \frac{-w_1 + 2w_2 - w_3}{3}, -r + \frac{-w_1 - w_2 + 2w_3}{3}\right],$$

で定義する行列を考えるが，今の場合 where $w_1 = \frac{2}{5}$, $w_2 = \frac{3}{5}$, $w_3 = 1$ である．また r は任意定数．具体的には

$$B_\infty^{(3)} = \mathrm{diag}\left[-r - \frac{4}{15}, -r - \frac{1}{15}, -r + \frac{1}{3}\right]$$

である．さらに

$$\tilde{B}^{(i)} = \partial_{t_i} C\ (i = 1, 2, 3).$$

とおく．すると，C の定義より $\tilde{B}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ はたがいに可換であり，$\tilde{B}^{(3)} = I_3$ が成り立つ．これらを使って，$Y = (y_1, y_2, y_3)^t$ についての微分方程式系

$$T(dY) = -(\sum_{i=1}^{3} \tilde{B}^{(i)} dt_i) B_\infty^{(3)} Y. \tag{23}$$

を定義する．これは大久保型微分方程式系という．この方程式系が積分可能であることは，$\tilde{B}^{(i)} (i = 1, 2, 3)$ はたがいに可換であることに帰着され，この場合は成り立っている．$T - x_3I_3$ は x_3 に依らないから，$T_0 = x_3I_3 - T$ の成分は t_1, z の関数である．$\tilde{B}^{(3)} = I_3$ が成り立つことに注意すれば，(23) の x_3 についての微分方程式に注目すると，$(x_3I_3 - T_0)\partial_{x_3}Y = -\tilde{B}^3 B_\infty^{(3)} Y = -B_\infty^{(3)} Y$ であるから

$$(x_3I_3 - T_0)\partial_{x_3} Y = -B_\infty^{(3)} Y \tag{24}$$

を得る．これは x_3 についての常微分方程式であり，大久保型といわれるものになっている．

さて，$t_1 = z^2 \cdot \frac{1+3s+9s^2+5s^3}{3s^2}$ とおいて，h を x_3, z, s で表すと，因数分解できて $h = (t_3 - z_1)(t_3 - z_2)(t_3 - z_3)$ となる．ここで

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(4 + 10s + 45s^2 + 145s^3 + 415s^4 + 567s^5 + 400s^6 + 250s^7 - (2+s)^2(1+5s)^2(1+s+4s^2)v)z^5/(225s^5), \\ z_2 &= 2(4 + 10s + 45s^2 + 145s^3 + 415s^4 + 567s^5 + 400s^6 + 250s^7 + (2+s)^2(1+5s)^2(1+s+4s^2)v)z^5/(225s^5), \\ z_3 &= -2(8 + 50s + 270s^2 + 875s^3 + 2075s^4 + 2925s^5 + 2375s^6 + 1250s^7)z^5/(225s^5), \end{aligned}$$

であり，v は $v^2 = (1 + 5s)(1 + s + 4s^2)$ で定まる楕円関数である．

[2] (21)，(22) を使ってこの h を x_1, x_2, x_3 で表すと (6) になる．

x_3 を変数とする常微分方程式 (24) からパンルヴェVI 方程式の代数関数解を導く一般的な方法から次の手続きで代数関数解が求まる．$h=0$ のところに (24) の特異点があるが，今の場合 $x_3=z_i$ $(i=1,2,3)$ である．そこで $t=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ とおく．s を使って表すと

$$t=\frac{1}{2}-\frac{3(4+20s+105s^2+340s^3+830s^4+1164s^5+925s^6+500s^7)}{2(2+s)^2(1+5s)v^3}$$

である．$B^{(3)}=-T^{-1}B_\infty^{(3)}$ の行列成分をみる．定義より $i\neq j$ であれば，$hB^{(3)}$ の (i,j) 成分は x_3 の 1 次式である．そこで (i,j)-成分は $x_3=z_{ij}$ で消えるとする．z_{ij} は t_1,z の関数だから s,z で表される．さて，T の定義をみると，

$$z_{ij}=\left.\frac{\det(T)(T^{-1})_{ij}}{T_{ij}}\right|_{x_3=0}$$

になることがわかる．$w_{ij}=\frac{z_{ij}-z_1}{z_3-z_1}$ とおくと，w_{ij} は $t=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ を変数とするパンルベ VI 方程式 (1) の解になる．今の場合，w_{ij},t はともに s の代数関数であるから，w_{ij} は代数関数解である．特に $(i,j)=(3,1)$ の場合をみてみると，$z_{31}=-2(-38t_1^2t_2+8t_1^3z+27t_2^2z+45t_1t_2z^2)/(25t_1)$ であるから，

$$w_{31}=\frac{1}{2}-\frac{(1+2s)(2+7s+33s^2+31s^3+35s^4)}{2(2+s)(1+3s+9s^2+5s^3)v}$$

(t,w_{31}) は [6] の solution 37 と同値になることは直接計算で確認できる．

3.7 第 2 の場合

A_1,A_2,A_3 として第 1 の場合 (15) を扱ったが，A_1,A_2,A_3 が第 2 の場合 (16) であれば，実際には少し計算が簡単になり次のような結論を得る．

実際，

$$\begin{aligned}
t_1 &= -\left(\tfrac{20}{3^6}\right)^{1/5}x_1,\\
t_2 &= -\left(\tfrac{20}{3^6}\right)^{2/5}(5x_1^2-27x_2),\\
t_3 &= \tfrac{1}{243}(-116x_1^5+1080x_1^3x_2-2430x_1x_2^2+243x_3)
\end{aligned}$$

とおくと，t_1,t_2,t_3 の重みは

$$w(t_1)=\frac{1}{5},\ w(t_2)=\frac{2}{5},\ w(t_3)=1$$

であり，

$$\begin{aligned}
h_1 &= (-t_1^6-15t_1^4t_2+15t_1^2t_2^2+10t_2^3+30t_1t_3)/30,\\
h_2 &= (5t_1^7+3t_1^5t_2+15t_1^3t_2^2-5t_1t_2^3+6t_2t_3)/6,\\
h_3 &= (-105t_1^{10}+200t_1^8t_2+350t_1^6t_2^2+175t_1^2t_2^4-14t_2^5+20t_3^2)/40.
\end{aligned}$$

とおくと，$\vec{h}=(h_1,h_2,h_3)$ はポテンシャル・ベクトル場であり，特に (t_1,t_2,t_3) は平坦座標である．これから，本節での計算を同じようにしていけば，代数関数解が求まる．実際，

$$\begin{aligned}
t &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{3(4+20s+105s^2+340s^3+830s^4+1164s^5+925s^6+500s^7)}{2(2+s)^2(1+5s)v^3},\\
w &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{(8+26s+71s^2+64s^3+55s^4+100s^5)}{6s(2+s)(1+5s)v}
\end{aligned}$$

とおけば，(t,w) は [5] の solution 38 と同値な解になることがわかる．

4 一般の場合の平坦構造

Frobenius 多様体の理論ではプレポテンシャルの存在が中心的な役割を果たしているが，Valentiner 鏡映群の判別式から出発してそれを復元できるかどうか計算してみると，存在しないことが確認できた．しかし，計算過程をみればわかるように，次のことがわかる．

§2 のはじめの部分にもどる．一般に $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の関数 $h_1(x),h_2(x),\ldots,h_n(x)$ で

$$Eh_j=(w_j+w_n)h_j \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

$$h_j=\begin{cases} x_jx_n+h_j^{(0)}(x_1,\ldots,x_{n-1}) & (j=1,2,\ldots,n-1), \\ \frac{1}{2}x_n^2+h_n^{(0)}(x_1,\ldots,x_{n-1}) & (j=n) \end{cases} \tag{25}$$

を満たすものを考える．ここで $h_j^{(0)}(x_1,\ldots,x_{n-1})$ は $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ の関数である．$h_j(x)$ $(j=1,2,\ldots,n)$ を使って，(i,j) 成分が $C_{ij}=\partial_{x_i}h_j$ である n 次正方行列 C を定義する．(3) で定義したものに対応する．それはプレポテンシャルから定義しているが，ポテンシャル・ベクトル場が存在すればよう．$C_{nj}=x_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ となるのは明らかである．さらに $\tilde{B}^{(p)}=\partial_{x_p}C$ $(p=1,2,\ldots,n)$ と $T=\sum_{j=1}^n w_jx_j\partial_{x_j}C=\sum_{j=1}^n w_jx_j\tilde{B}^{(j)}$ を定義する．

Definition 4.1. $h=h_j(x_1,\cdots,x_n)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ は荷重斉次な関数で (25) の形をしているとする．

$$[\tilde{B}^p,\tilde{B}^{(q)}]=O \quad (p,q=1,2,\cdots n) \tag{26}$$

が成り立つとき，$\vec{h}=(h_1,\cdots,h_n)$ をポテンシャル・ベクトル場という．また $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を平坦座標という．

Remark 4.1. 荷重斉次な関数ベクトル $\vec{h}$ に対する方程式 (26) を行列成分で表すと，$h_1,\cdots,h_n$ に関する多くの非線型微分方程式が得られる．これらの連立微分方程式を拡張された WDVV 方程式という．

次に大久保型方程式系を構成する．$\vec{h}$ はポテンシャル・ベクトル場とする．一般に

$$B_\infty^{(n)}=\mathrm{diag}\left[-r+w_1-\frac{w_1+\cdots+w_n}{n},\cdots,-r+w_n-\frac{w_1+\cdots+w_n}{n}\right],$$

で定義する行列を考え，さらに

$$\tilde{B}^{(i)}=\partial_{x_i}C\ (i=1,2,\cdots,n).$$

とおく．すると，C の定義より $\tilde{B}^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ はたがいに可換であり，$\tilde{B}^{(n)}=I_n$ が成り立つ．これらを使って，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^t$ についての微分方程式系

$$T(dY)=-(\sum_{i=1}^n\tilde{B}^{(i)}dt_i)B_\infty^{(n)}Y. \tag{27}$$

を定義する．これ大久保型微分方程式系という．この方程式系が積分可能であることは，$\tilde{B}^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ はたがいに可換であることに帰着される．(27) の x_n についての微分方程式に注目すると，$(x_nI_n-T_0)\partial_{x_n}Y=-\tilde{B}^nB_\infty^{(n)}Y=-B_\infty^{(n)}Y$ であるから

$$(x_nI_n-T_0)\partial_{x_n}Y=-B_\infty^{(n)}Y \tag{28}$$

を得る．これは x_n についての常微分方程式であり，大久保型といわれるものになっている．(27) は (28) の変形方程式系とみなすことができる．

平坦構造の正確な定義などについては [18] を参照してください．

References

[1] F. V. Andreev and A. V. Kitaev: Transformations $RS_4^2(3)$ of ranks$\leq$ 4 and algebraic solutions of the sixth Painlevé equation, Comm. Math. Phys. **228**, (2002), 151-176.

[2] D. Bessis: Finite complex reflection arrangements are $K(\pi, 1)$. Ann. of Math. **181** (2015), 809-904.

[3] D. Bessis and J. Michel: Explicit presentations for exceptional braid groups. Experimental Math., **13** (2004), 257-266.

[4] P. Boalch: From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo. Proc. London Math. Soc. **90**, (2005), 167-208.

[5] P. Boalch: The fifty-two icosahedral solutions to Painlevé VI. J. Reine Angew. Math. **596** (2006), 183-214.

[6] P. Boalch: Some explicit solutions to the Riemann-Hilbert problem. IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **9**, Rur. Math. Zurich, (2007), 85-112.

[7] P. Boalch: Higher genus icosahedral Painlevé curves. Funkcial. Ekvac. **50**, (2007), 19-32.

[8] B. Dubrovin: Geometry of 2D topological field theories. In:Integrable systems and quantum groups. Montecatini, Terme 1993 (M. Francoviglia, S. Greco, eds.) Lecture Notes in Math. 1620, Springer-Verlag 1996, 120-348.

[9] B. Dubrovin and M. Mazzocco: Monodromy of certain painlevé VI transcendents and reflection groups. Inv. Math. **141**, (2000), 55-147.

[10] Y. Haraoka and M. Kato: Generating systems for finite irreducible complex reflection groups. Funkcial. Ekvac. **53** (2010), 435-488.

[11] C. Hertling: *Frobenius Manifolds and Moduli Spaces for Singularities.* Cambridge University Press, 2002.

[12] N. J. Hitchin: Poncelet polygons and the Painlevé equation, In Geometry and Analysis, Tata Inst. Fund. Res. Bombay, (1995), 151-185.

[13] N. J. Hitchin: Lectures on octahedron. Bull. London Math. Soc. **35**, (2003), 577-600.

[14] K. Iwasaki: On algebraic solutions to Painlevé VI. Preprint `arXIv:0809.1482`.

[15] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. Physica 2D (1981), 306-352.

[16] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structures without potentials. Revue Roumaine Math. Pures Appl. **60** (2015), 4, 481-505.

[17] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structures and algebraic solutions to Painlevé VI equation. To appear in “Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations” in Trends in Mathematics Series, Springer.

[18] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structure on the space of isomonodromic deformations. Preprint `arXiv:1511.01608`

[19] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structure and potential vector fields related with algebraic solutions to Painlevé VI equation. Preprint.

[20] M. Kato and J. Sekiguchi: Uniformization systems of equations with singularities along the discriminant sets of complex reflection groups of rank three. Kyushu J. Math. **68** (2014), 181-221.

[21] A. V. Kitaev: Quadratic transformations for the sixth Painlevé equation. Lett. Math. Phys. **21**, (1991), 105-111.

[22] A. V. Kitaev: Grothendieck's dessins d'enfants, their deformations and algebraic solutions of the sixth Painlevé and Gauss hypergeometric equations. Algebra i Analiz **17**, no.1 (2005), 224-273.

[23] A. V. Kitaev: Remarks towards a classification of $RS_4^2(3)$-transformations and algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. Sémin. Congr. **14**, Soc. math. France, (2006), 199-227.

[24] A. V. Kitaev and R. Vidunas: Quadratic transformations of the sixth Painlevé equation with application to algebraic solutions. Math. Nachr. **280**, (2007), 1834-1855.

[25] Y. Konishi and S. Minabe: Local quantum cohomology and mixed Frobenius structure. arXiv:1405.7476

[26] O. Lisovyy and Y. Tykhyy: Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. J. Geometry and Physics **85** (2014), 124-163.

[27] Yu. Manin: F-manifolds with flat structure and Dubrovin's duality. Adv. Math., **198**, no.1, (2005), 5-26.

[28] 眞野智行：平坦構造の一般化と複素鏡映群・パンルヴェ方程式，第 55 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集，61-73.

[29] M. Noumi and Y. Yamada: A new Lax pair for the sixth Painlevé equation associated with so(8), Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis (eds. T. Kawai, K. Fujita), World Scientific (2002).

[30] K. Okubo: Connection problems for systems of linear differential equations. Japan-United States Seminar on Ordinary Differential and Functional Equations (Kyoto, 1971), 238-248. Lecture Notes in Math., Vol. 243, Springer, Berlin, 1971.

[31] K. Okamoto: *Painlevé Equation* (Japanese). Iwanami Publishing Company.

[32] P. Orlik and H. Terao: *Arrangements and Hyperplanes.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 300, Berlin, Springer-Verlag, 1992.

[33] C. Sabbah: *Isomonodromic Deformations and Frobenius Manifolds. An Introduction.* Universitext. Springer

[34] K. Saito: On the uniformization of complements of discriminant loci. RIMS Kokyuroku **287** (1977), 117-137.

[35] K. Saito: Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **27** (1980) 265-291.

[36] K. Saito: On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group. Preprint RIMS-288 (1979), Publ. RIMS, Kyoto Univ. **29** (1993), 535-579.

[37] K. Saito: Uniformization of orbifold of a finite reflection group. Frobenius Manifold, Quantum Cohomology and Singularities. A Publication of the Max-Planck-Institute, Mathematics, Bonn, 265-320.

[38] K. Saito, T. Yano and J. Sekiguchi: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group. Comm. Algebra **8** (1980), 373-408.

[39] J. Sekiguchi: Three dimensional Saito free divisors and deformations of singular curves. J. Siberian Federal Univ., Mathematics and Physics, **1** (2008), 33-41.

[40] J. Sekiguchi: A classification of weighted homogeneous Saito free divisors. J. Math. Soc. Japan, **61** (2009), 1071-1095.

[41] J. Sekiguchi: Systems of uniformization equations along Saito free divisors and related topics. In "The Third Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities", Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications, **43** (2010), 83-126.

[42] J. Sekiguchi: Saito free divisors in four dimenisonal affine space and reflection groups of rank four. In Proceedings of the 4th Japanese-Australian Workshop "Topics on Real and Complex Singularities", 2014, 141-158.

[43] J. Sekiguchi: Holonomic systems of differential equations of rank two with singularities along Saito free divisors of simple type. In Proceedings of the 4th Japanese-Australian Workshop "Topics on Real and Complex Singularities", 2014, 159-188.

[44] 関口次郎：自由因子と微分方程式，2016 年度日本数学会年会総合講演・企画特別講演アブストラクト，69-78.

[45] G. C. Shephard and A. J. Todd: Finite unitary reflection groups. Canad. J. Math., **6** (1954), 274-304.

[46] H. Terao: Free arrangements of hyperplanes and unitary reflection groups. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 56 (1980), no. 8, 389-392.

[47] R. Vidunas and A. V. Kitaev: Computations of RS-pullback transformations for algebraic Painlevé VI solutions. Preprint `arXiv:0705.2963`