数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 107-123

Matrix-valued commuting differential operators and their joint eigenfunctions

示野 信一
Nobukazu Shimeno

関西学院大学理工学部
School of Science & Technology
Kwansei Gakuin University

Abstract

We give an example of vector-valued analogue of the theory of the Heckman-Opdam hypergeometric function associated with a root system. We construct matrix-valued commuting differential operators associated with root system of type A_2 and their joint eigenfunctions. In group case, the differential operators are radial parts of invariant differential operators on a certain homogeneous vector bundle over a Riemannian symmetric space and the radial part of a matrix coefficient of a principal series representation gives a joint eigenfunction that is analytic at the origin. Allowing the root multiplicity to be an arbitrary complex number, we give matrix-valued commuting differential operators and connection coefficients (c-functions) for their joint eigenfunctions given by power series.

緒言

Heckman-Opdam の超幾何函数は，Riemann 対称空間 G/K 上の帯球函数を拡張した多変数の超幾何函数で，可換な微分作用素系の実解析的な同時固有函数になっている．

次元が 1 より大きい K の表現を付ければベクトル値の函数が自然に現れる．本稿では，制限ルート系が A_2 型の対称空間 $G/K = SL(3,\mathbb{K})/SU(3,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$) について K の自然表現に付随する等質ベクトル束上の不変微分作用素の動径成分を拡張した行列値の可換な微分作用素系を与え，その同時固有函数について論じる．これは Heckman-Opdam の理論のベクトル値の類似を与える 1 つの試みである．

§1 でスカラー値の場合を復習し，§2 で行列値の場合について述べる．

〒669-1337 三田市学園 2 丁目 1 番地　email: shimeno@kwansei.ac.jp

§1 スカラー値の場合

Riemann 対称空間上の帯球函数の動径成分とその一般化である Heckman-Opdam の超幾何函数について知られている結果を復習する．詳しくは，対称空間の場合は [8], Heckman-Opdam の超幾何函数については，[4, Part I], [15, Part I] を参照のこと．

1.1 可換な微分作用素系

G/K を非コンパクト型の Riemann 対称空間とする．ここで，G は中心有限な実半単純 Lie 群，K は G の極大コンパクト部分群である．$G = KAK$ を Cartan 分解とし，$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ をそれぞれ G, A の Lie 環とする．$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を制限ルート系，W をその Weyl 群とする．G/K 上の G-不変な微分作用素のなす代数 $\mathbb{D}(G/K)$ は可換である．G/K 上の Laplace-Beltrami 作用素は不変微分作用素の 1 つである．

制限ルート系が A_1 型，A_2 型の場合に，左 K-不変な G/K 上の函数に対する Laplace-Beltrami 作用素の A 上の動径成分の形を以下で復習する．

1.1.1 A_1 型の場合

$G/K = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ の場合，$\mathbb{D}(G/K)$ は Laplace-Beltrami 作用素で生成される．

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad A = \exp \mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと，$G = KAK$ が成り立ち，G/K 上の左 K-不変な函数に対する Laplace-Beltrami 作用素の A 上の動径成分は（定数倍を除いて）

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + \coth t \frac{d}{dt}$$

で与えられる．$G/K = SL(2,\mathbb{K})/SU(2,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$: 複素数体, $\mathbb{H}$: 四元数体)，つまり $G/K = SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, $SU^*(4)/Sp(2)$ の場合，Laplace-Beltrami 作用素の動径成分は，$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のとき，それぞれ $k = 1, 2$ として，

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + 2k \coth t \frac{d}{dt} \tag{1}$$

で与えられる．($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき，$k = \frac{1}{2}$ である．)

これらの対称空間の制限ルート系は A_1 型であり，上の k は制限ルートの重複度の半分である．Weyl 群は $W \simeq S_2$（2 次対称群）であり，変数 t に符号の変換として作用し，Laplace-Beltrami 作用素の動径成分 L はこの作用で不変である．

1.1.2 A_2 型の場合

$G/K = SL(3,\mathbb{K})/SU(3,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$), つまり, $G/K = SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$, $SL(3,\mathbb{C})/SU(3)$, $SU^*(6)/Sp(3)$ の場合を考える．これらの対称空間の制限ルート系は A_2 型であり，制限ルートの重複度の半分 k はそれぞれ $k = 1/2$, 1, 2 である．

$\mathfrak{a} \simeq \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : t_1 + t_2 + t_3 = 0\} \simeq \mathbb{R}^2$ であり，Weyl 群は $W \simeq S_3$（3 次対称群）であり，(t_1, t_2, t_3) に置換群として作用する．$\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial t_i}$, $t_{ij} = t_i - t_j$ とおく．Laplace-Beltrami 作用素の動径成分は（定数倍を除いて）

$$L_2 = \partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 - k \sum_{1\le i<j\le 3} (\coth t_{ij})(\partial_i - \partial_j) \tag{2}$$

で与えられる．

Laplace-Beltrami 作用素と代数的独立な 3 階の不変微分作用素が存在し，$\mathbb{D}(G/K)$ は 2 階と 3 階の不変微分作用素により生成される．3 階の不変微分作用素の動径成分は

$$L_3 = \partial_1\partial_2\partial_3 + (k \text{ を含む低階の項}) \tag{3}$$

の形をしている．L_2, L_3 の最高階の項はそれぞれ ∂_1, ∂_2, ∂_3 の 2 次，3 次の基本対称式になっている．例外型の対称対 EIV : $(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{f}_4)$ の制限ルート系も A_2 型である（[7]）．このとき，制限ルートの重複度の半分は $k = 4$ であり，不変微分作用素環の生成元の動径成分は上の L_2, L_3 で与えられる．

可換な代数 $\mathbb{D}(G/K)$ の生成元の動径成分だから $k = 1/2$, 1, 2, 4 に対して $[L_2, L_3] = 0$ であるが，任意の $k \in \mathbb{C}$ に対して可換性が成り立つ．ここでは記さないが，L_3 の明示的な表示式は [2], [23] により与えられている．パラメーター k に依存する $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}^2$ 上の S_3 不変な可換な微分作用素 L_2, L_3 が存在するのである．

1.1.3 より一般の場合

A_2 型のルート系について述べたが，一般に A_{n-1} 型（n は 2 以上の整数）のルート系に対して，パラメーター k に依存する $\mathfrak{a} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ 上の S_n 不変な可換な微分作用素系 $L_2, \cdots, L_n$ が Debiard [2]，関口 [23] により構成されている．これらは，$k = 1/2$, 1, 2 のときは，$SL(n,\mathbb{K})/SU(n,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) 上の不変微分作用素環の生成元の動径成分になっている．A 型以外のルート系に対しても，Riemann 対称空間上の不変微分作用素の動径成分について制限ルート系の重複度を連続パラメーターに拡張した可換な微分作用素系が Heckman と Opdam により構成された（[4, Part I], [15, Part I]）．構成には Dunkl 作用素の三角函数版（Heckman 作用素または Cherednik 作用素）が用いられる．

1.1.4 量子可積分系との関連

1.1.2 節で述べた可換な微分作用素 L_2, L_3 を考える.

$$\delta^{1/2} = \prod_{1\le i<j\le 3} (\sinh t_{ij})^k$$

とおくと,

$$\begin{aligned} P_2 &:= \delta^{1/2} \circ (L_2 - 4k^2) \circ \delta^{-1/2} \\ &= \partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 + k(k-1) \sum_{1\le i<j\le 3} \frac{1}{\sinh^2 t_{ij}}, \\ P_3 &:= \delta^{1/2} \circ L_3 \circ \delta^{-1/2} = \partial_1\partial_2\partial_3 + (\text{低階の項}) \end{aligned}$$

と変形できる. 任意の $k \in \mathbb{C}$ に対して, $[P_2, P_3] = 0$ が成り立つ. P_2 には 1 階の項がなく, $\mathfrak{a}$ 上の Euclid ラプラシアンと $1/\sinh^2$ の形のポテンシャル函数の和の形をしている.

1.1.3 節で述べた A_{n-1} 型のルート系の場合も同様にハミルトニアン P_2 を含む可換な微分作用素系 $P_2, \cdots, P_n$ が得られる. 可換な微分作用素系の存在は, P_2 をハミルトニアンとする模型が可積分であることを意味している.

ポテンシャル函数の $1/\sinh^2$ を Weierstrass の $\wp$ 函数に拡張しても可積分, つまり可換な微分作用素系が存在する ([20])[*1].

A 型以外のルート系に対しても, 1.1.3 節で触れた Heckman-Opdam の可換な微分作用素系から三角函数ポテンシャルの場合の量子可積分系が得られる. また, ポテンシャルを楕円関数に拡張した可積分系も広く研究されている ([22], [17]).

1.2 Riemann 対称空間上の帯球函数と Heckman-Opdam の超幾何函数

§1 で見た可換な微分作用素の同時固有函数について知られている結果を復習する.

1.2.1 A_1 型の場合

Riemann 対称空間 G/K 上の帯球函数は, (i) K-不変, (ii) 不変微分作用素の同時固有函数, (iii) 原点での値が 1 という 3 条件で特徴づけられる. Cartan 分解 $G = KAK$ より, 帯球函数は動径成分 (A 上での値) により決定され, A 上の W 不変な実解析函数になる.

1.1.1 節で見た階数が 1 (A_1 型) の対称空間の場合, 帯球函数の動径成分は, (1) 式の

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + 2k \coth t \frac{d}{dt}$$

[*1] $1/\sinh^2$ は $\wp$ 函数が退化したものであり, $1/\sinh^2$ はさらに退化して逆 2 乗ポテンシャルになる.

について

$$LF = (\lambda^2 - k^2)F, \tag{4}$$
$$F(0) = 1 \tag{5}$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上の実解析的な偶函数として特徴づけられる．ここで $\lambda \in \mathbb{C}$ で，L の固有値 $\lambda^2 - k^2$ は任意の複素数値をとる．

このような解 $F(t) = F(\lambda, k; t)$ は Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1$ を用いて次の形で表される．

$$F(\lambda, k; t) = {}_2F_1(\tfrac{1}{2}(k-\lambda), \tfrac{1}{2}(k+\lambda)\,;\, k+\tfrac{1}{2}\,;\, -\sinh^2 t). \tag{6}$$

Riemann 対称空間に対応するのは，$k = 1/2, 1, 2$ の場合だけだが，上の函数は generic な連続パラメーター k に対して (4), (5) を満たす実解析函数として一意に決まる．

(4) は無限遠の挙動が

$$\Phi_\lambda(t) \sim e^{(\lambda-k)t} \quad (t \to \infty).$$

で与えられる級数解 $\Phi_\lambda(t)$ を持ち，generic な λ に対して，$\{\Phi_\lambda(t), \Phi_{-\lambda}(t)\}$ は $\mathbb{R}_{>0}$ における (4) の解空間の基底をなす．

$$\tilde{c}(\lambda, k) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+k)}, \tag{7}$$
$$c(\lambda, k) = \frac{\tilde{c}(\lambda, k)}{\tilde{c}(k, k)}. \tag{8}$$

とおくと，原点における正則解は次の形で表される．

$$F(\lambda, k; t) = c(\lambda, k)\Phi_\lambda(t) + c(-\lambda, k)\Phi_{-\lambda}(t). \tag{9}$$

対称空間の場合には，上の $\Phi_\lambda(t)$ は Harish-Chandra 級数，$c(\lambda, k)$ は Harish-Chandra の c 函数と呼ばれるものである．一般の階数 1 の場合も帯球函数の動径成分は (6) と似た形で Gauss の超幾何函数を用いて表される（Flensted-Jensen と Koornwinder の Jacobi 函数 [10]）．階数が 1 の場合には，上の $\Phi_\lambda(t)$ も Gauss の超幾何函数を用いて表すことができ，(9) は Gauss の超幾何函数に対する Kummer の関係式

$$\begin{aligned}{}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) =& \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(1-z)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1; \frac{1}{1-z}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\beta}{}_2F_1\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1; \frac{1}{1-z}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

と同等である ([14], [10])．

1.2.2 A_2 型の場合

1.2.1 節の微分方程式 (4) と条件 (5) の対応物は，1.1.2 節で述べた A_2 型の場合には次のようになる．

L_2, L_3 を (2), (3) で与えられる $\mathfrak{a} \simeq \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : t_1 + t_2 + t_3 = 0\}$ 上の可換な微分作用素とする．$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* = \{\lambda \in \mathbb{C}^3 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$ に対して，次の 3 条件を考える．

$$L_2 F = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + 4k^2)F, \tag{11}$$

$$L_3 F = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 F, \tag{12}$$

$$F(0) = 1. \tag{13}$$

$k = 1/2,\ 1,\ 2,\ 4$ の場合には，制限ルート系が A_2 型の Riemann 対称空間上の帯球函数の動径成分は，上の 3 条件を満たす $\mathfrak{a}$ 上の実解析函数として特徴づけられ，S_3 不変になっている．

Heckman と Opdam は（一般のルート系の場合に），一般の連続パラメーター k に対して上の 3 条件を満たす実解析函数 $F(t) = F(\lambda, k; t)$ が一意的に存在することを示した．$F(\lambda, k; t)$ は Heckman-Opdam の超幾何函数と呼ばれる．

Riemann 対称空間上の帯球函数の場合には，帯球函数の積分表示を用いることができるが，一般の k，一般のルート系の場合には微分方程式しか使えない点に困難がある*2．ルート系の階数が 1 の場合と違い，一般に $F(\lambda, k; t)$ を原点における級数解として与えるのは困難である．一方，階数が高い Riemann 対称空間上の帯球函数の動径成分に対しても，無限遠における級数解は容易に与えることができ，帯球函数の動径成分は (9) のようにそれらの線形結合で与えられる．

一般のパラメーター k に対して，c 函数 $c(\lambda, k)$ を次ようによう定義する（$\tilde{c}_1(s, k)$ は A_1 型の場合の (7) に他ならない）*3．

$$\tilde{c}_1(s, k) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + k\right)} \quad (s \in \mathbb{C}), \tag{14}$$

$$\tilde{c}(\lambda, k) = \tilde{c}_1(\lambda_1 - \lambda_2, k)\tilde{c}_1(\lambda_1 - \lambda_3, k)\tilde{c}_1(\lambda_2 - \lambda_3, k), \tag{15}$$

$$c(\lambda, k) = \frac{\tilde{c}(\lambda, k)}{\tilde{c}(\rho(k), k)} \tag{16}$$

ここで $\rho(k) = (2k, 0, -2k)$ である．$k = 1/2,\ 1,\ 2,\ 4$ の場合，上で与えた $c(\lambda, k)$ は Riemann 対称空間に対する Harish-Chandra の c 函数の Gindikin-Karpelevič による明示式である．

---

*2 ルート系が A 型の場合には，k を一般にしても解の積分表示が知られているが，本稿では積分表示を用いたアプローチには触れない．

*3 $\tilde{c}(\rho(k), k) = 0$ になる k は除外する．

generic な $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して，正の Weyl chamber $\mathfrak{a}_+ = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathfrak{a} : t_1 > t_2 > t_3\}$ 上の (11), (12) の級数解 $\Phi(\lambda, k; t)$ で

$$\Phi(\lambda, k; t) \sim e^{\langle \lambda - \rho(k), t \rangle} + \cdots \quad (t \to \infty)$$

を満たすものが一意的に存在する（Harish-Chandra 級数）．generic な λ に対して，$\{\Phi(w\lambda, k; t)\}_{w \in S_3}$ は (11), (12) の $\mathfrak{a}_+$ 上の解空間の基底をなす．$F(\lambda, k; t)$ を次式により定義する．

$$F(\lambda, k; t) = \sum_{w \in S_3} c(w\lambda, k) \Phi(w\lambda, k; t). \tag{17}$$

Heckman と Opdam は，$F(\lambda, k; t)$ が $\mathfrak{a}$ 上の Weyl 群不変な実解析函数であり，$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ について整型，原点における値が 1 であることおよびそのような解の一意性を証明した．$\mathfrak{a}$ 上実解析的であることは，階数が 1 の場合の接続式 (9) に帰着することにより示される．原点での値が 1 であることの Opdam による証明は k に関する昇降演算子と解析接続を用いた面倒な議論を要する．大島-示野 [21] は，A 型と BC 型のルート系の場合に，微分方程式系の特異直線への $F(\lambda, k; t)$ の制限を考えることにより，原点での値が 1 であることを証明した．原点での値が 1 になるように c 函数が正規化されていることは，特異直線上の制限で得られる常微分方程式の解の接続係数と無限遠で現れる Gauss の超幾何函数の接続 (10) からわかる．

§2　行列値の場合

Riemann 対称空間上の等質ベクトル束を考えることにより，§1 で述べたスカラー値の場合の話は行列値の微分作用素，ベクトル値の固有函数の話に一般化される．そして，パラメーターを拡張して Heckman-Opdam の理論を一般化する問題が考えられる．この節では，A_2 型のルート系について得られた結果について述べる．

2.1　対称空間に付随する行列値の可換な微分作用素

2.1.1　対称空間の等質ベクトル束上の不変微分作用素

対称空間の等質ベクトル束上の不変微分作用素について知られている結果を復習する ([12], [2])．

G/K を非コンパクト型の Riemann 対称空間とする（以下 1.1 節で述べた記号を用いる）．(τ, V_τ) を K の既約表現，$E_\tau \to G/K$ を τ に付随した G/K 上の等質ベクトル束とする．E_τ 上の不変微分作用素のなす代数を $\mathbb{D}_\tau$ で表す．E_τ の C^∞-切断の空間は，V_τ に値をとる G 上の C^∞ 函数の空間 $C^\infty(G, V_\tau)$ の部分空間と同一視される．

$$C^\infty(E_\tau) \simeq \{f \in C^\infty(G, V_\tau) : f(gk) = \tau(k^{-1}) f(g) \ (g \in G,\, k \in K)\}$$

E_τ 上の不変微分作用素とは，$C^\infty(E_\tau)$ 上の微分作用素で左からの G の作用と可換であるもののことである．

$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ を G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素化，$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ をその普遍包絡環，$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K$ を普遍包絡環の K-不変元全体とする．このとき，$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K$ から $\mathbb{D}_\tau$ の上への自然な準同型写像が存在する．K の Lie 環を $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{g}$ における直交補空間を $\mathfrak{p}$，$S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})$ を $\mathfrak{p}_\mathbb{C}=\mathfrak{p}\otimes\mathbb{C}$ 上の対称代数とするとき，ベクトル空間としての同型 $\mathbb{D}_\tau \simeq (S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})\otimes \mathrm{End}(V_\tau))^K$ が存在する．

K における $\mathfrak{a}$ の正規化群を M'，中心化群を M とする．$\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ から $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ への制限写像は $(S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})\otimes \mathrm{End}(V_\tau))^K$ から $(S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\otimes \mathrm{End}(V_\tau))^{M'}$ への単射になる．この写像は一般に全射でないが，後に本稿で考察する場合には全射になっている．

§1 で述べたスカラー値の場合と同様に不変微分作用素の固有函数を考察したいのだが，一般に $\mathbb{D}_\tau$ は非可換であり，$\mathbb{D}_\tau$ の高次元の表現を考えなければならない．不変微分作用素環 $\mathbb{D}_\tau$ が可換になる場合がより基本的で易しいが，そのための必要十分条件が知られている．

定理 (Deitmar [2]) $\mathbb{D}_\tau$ が可換であるための必要十分条件は，τ の M への制限が無重複，つまり重複度 1 で分解することである．

$\mathbb{D}_\tau$ が可換になる例をいくつか挙げる．

1) τ が K の自明な表現の場合．これは 1.1 節で述べた．
2) G/K が Hermite 対称空間，τ が K の 1 次元表現の場合 ([25])．
3) $G/K=SO_0(n,1)/SO(n)$，$SU(n,1)/SU(n)$，τ は K の任意の既約表現．
4) $G/K=Sp(2,\mathbb{R})/U(2)$，$\tau$ は $U(2)$ の 2 次元表現 ([9])．
5) $G/K=SL(3,\mathbb{K})/SU(3,\mathbb{K})$　$(\mathbb{K}=\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$，$\tau$ は K の自然表現．

以下では，上の 5) の場合を考察する．まず $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合について述べる．

2.1.2　$G/K=SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ の場合

$G/K=SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$，$\tau$ を $K=SO(3)$ の自然表現（$SO(3)$ の元を $\mathbb{C}^3$ の縦ベクトルに掛ける表現）とする．このとき

$$M=\{\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) : \varepsilon_i=\pm 1,\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=1\}$$

であり，$\tau|_M$ は無重複なので $\mathbb{D}_\tau$ は可換になる．

以下で見るように $\mathbb{D}_\tau$ は 1 階と 2 階の 2 つの可換な微分作用素により生成される．

E_{ij} を 3×3 行列で (i,j) 成分が 1 で他の成分が 0 であるものとし，

$$E_i'=E_{ii}-\frac{1}{3}(E_{11}+E_{22}+E_{33})$$

とする．$\{E_{ij}\,(1\le i\ne j\le 3),\ E'_i\,(1\le i\le 3)\}$ は $G=SL(3,\mathbb{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ の基底になる．$(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}\otimes\mathrm{End}(V_\tau))^K$ は 1 次元のベクトル空間でその基底は

$$D=\begin{pmatrix} E'_1 & \frac{1}{2}(E_{12}+E_{21}) & \frac{1}{2}(E_{13}+E_{31}) \\ \frac{1}{2}(E_{12}+E_{21}) & E'_2 & \frac{1}{2}(E_{23}+E_{32}) \\ \frac{1}{2}(E_{13}+E_{31}) & \frac{1}{2}(E_{23}+E_{32}) & E'_3 \end{pmatrix}.$$

により与えられる（[11]）．この D が 1 階の不変微分作用素を与える．

函数 $f:G\to\mathrm{End}(V_\tau)$ が

$$f(k_1gk_2)=\tau(k_2^{-1})f(g)\tau(k_1^{-1})\quad(g\in G,\,k_1,\,k_2\in K)$$

を満たすとき，f を (τ,τ)-球函数と呼ぶ．Cartan 分解 $G=KAK$ および $\dim\mathrm{End}(V)^M=3$ より，$\mathbb{D}_\tau$ の元の (τ,τ)-球函数への作用は $\mathfrak{a}\simeq A$ 上の微分作用素を成分とする 3×3 行列で表せる．これを不変微分作用素の (τ,τ)-動径成分と呼び，$d\in\mathbb{D}_\tau$ に対して $r_\tau(d)$ と書く．

1 階の不変微分作用素 D の (τ,τ)-動径成分を 1.1.4 節のように $\delta^{1/2}$ でひねった形で書くと次のようになる．

$$\delta^{1/2}\circ r_\tau(D)\circ\delta^{-1/2}=\begin{pmatrix} \partial'_1 & -\frac{1}{2\sinh t_{12}} & -\frac{1}{2\sinh t_{13}} \\ \frac{1}{2\sinh t_{12}} & \partial'_2 & -\frac{1}{2\sinh t_{23}} \\ \frac{1}{2\sinh t_{13}} & \frac{1}{2\sinh t_{23}} & \partial'_3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

ここで $t_{ij}=t_i-t_j$, $\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial t_i}$ and $\partial'_i=\partial_i-\frac{1}{3}(\partial_1+\partial_2+\partial_3)$ とした．

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の普遍包絡環の中心 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ は $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K$ に含まれるから，$Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元は $\mathbb{D}_\tau$ の元を与える*4．特に $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の Casimir 作用素 Ω の (τ,τ)-動径成分は，[28, Proposition 9.1.2.11] により次で与えられる．

$$\begin{aligned}-3\delta^{1/2}\circ r_\tau(\Omega)\circ\delta^{-1/2}&=\partial_1\partial_2+\partial_2\partial_3+\partial_3\partial_1-\frac{1}{4}\sum_{1\le i<j\le 3}\frac{1}{\sinh^2 t_{ij}}+1\\ &+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sinh^2 t_{12}}+\frac{1}{\sinh^2 t_{13}} & \frac{\cosh t_{12}}{\sinh^2 t_{12}} & \frac{\cosh t_{13}}{\sinh^2 t_{13}} \\ \frac{\cosh t_{12}}{\sinh^2 t_{12}} & \frac{1}{\sinh^2 t_{12}}+\frac{1}{\sinh^2 t_{23}} & \frac{\cosh t_{23}}{\sinh^2 t_{23}} \\ \frac{\cosh t_{13}}{\sinh^2 t_{13}} & \frac{\cosh t_{23}}{\sinh^2 t_{23}} & \frac{1}{\sinh^2 t_{13}}+\frac{1}{\sinh^2 t_{23}} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{19}$$

(18), (19) の計算は（$\delta^{1/2}$ でひねらない形で）[27] に書かれている．

$Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ は Casimir 作用素と 3 階の元の 2 つで生成され，3 階の中心元から来る $\mathbb{D}_\tau$ の元が存在するが，それは 1 階の D と 2 階の Ω の多項式で表すことができる．実は，$\mathbb{D}_\tau$ は D と Ω（から来る不変微分作用素）により生成されている．

*4 1 階の不変微分作用素 D は $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ から来ていない．

2.1.3 $G/K = SL(3,\mathbb{K})/SU(3,\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ の場合

$G/K = SL(3,\mathbb{K})/SU(3,\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H})$，つまり $SL(3,\mathbb{C})/SU(3)$, $SU^*(6)/Sp(3)$ の場合も τ を K の自然表現（$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のときは 3 次元，$\mathbb{K} = \mathbb{H}$ のときは 6 次元表現）とすると，$\mathbb{D}_\tau$ は可換になる．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合と同様に，$\mathbb{D}_\tau$ は 1 階の D と Casimir 作用素 Ω（から来る不変微分作用素）により生成され，その (τ,τ)-動径成分を $\delta^{1/2}$ でひねった形で書くと次のようになる．（定数倍，定数差を調整してある．また，$\mathfrak{a}$ 上に函数に対して $P_1 = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$ はゼロで作用するので，$\partial_i' = \partial_i$ とした．）

命題 $G/K = SL(3,\mathbb{K})/SU(3,\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$，$\tau$ を K の自然表現とする．$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に対してそれぞれ $k = 1/2, 1, 2$ とする．このとき，$\mathbb{D}_\tau$ のある生成元の (τ,τ)-動径成分は，適当にとった基底について次のように行列表示される．

$$P_2 = \partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 + k(k-1)\sum_{1\le i<j\le 3}\frac{1}{\sinh^2 t_{ij}}$$
$$+k\begin{pmatrix} \frac{1}{\sinh^2 t_{12}} + \frac{1}{\sinh^2 t_{13}} & \frac{\cosh t_{12}}{\sinh^2 t_{12}} & \frac{\cosh t_{13}}{\sinh^2 t_{13}} \\ \frac{\cosh t_{12}}{\sinh^2 t_{12}} & \frac{1}{\sinh^2 t_{12}} + \frac{1}{\sinh^2 t_{23}} & \frac{\cosh t_{23}}{\sinh^2 t_{23}} \\ \frac{\cosh t_{13}}{\sinh^2 t_{13}} & \frac{\cosh t_{23}}{\sinh^2 t_{23}} & \frac{1}{\sinh^2 t_{13}} + \frac{1}{\sinh^2 t_{23}} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sinh t_{12}} & -\frac{1}{\sinh t_{13}} \\ \frac{1}{\sinh t_{12}} & 0 & -\frac{1}{\sinh t_{23}} \\ \frac{1}{\sinh t_{13}} & \frac{1}{\sinh t_{23}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

$k = 1/2, 1, 2$ のとき $[P_2, Q_1] = 0$ である．

$r_\tau(\mathbb{D}_\tau)$ は

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \partial_2\partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1\partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1\partial_2 \end{pmatrix} + \text{（行列値函数）}$$

の形の作用素を含む，実際，$Q_2 = P_2 - (P_1 - Q_1)Q_1$（ただし $P_1 = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$）とすればよい．$P_3 = Q_1Q_2$ とおくと，

$$P_3 = \partial_1\partial_2\partial_3 + \text{（低階の項）}$$

の形をしている．P_2, P_3 は $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の生成元から来る $r_\tau(\mathbb{D}_\tau)$ の元である．

例外型の対称対 EIV : $(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{f}_4)$ の制限ルート系も A_2 型だが，$k = 4$ に対して (20), (21) がこの対称対上のある等質ベクトル束上の不変微分作用素の動径成分になっているかどうか調べていない．

注意 $G/K = SL(2,\mathbb{K})/SU(2,\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H})$，つまり $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, $SU^*(4)/Sp(2)$ の場合も K の自然表現に付随した G/K の等質ベクトル束上の微分作用素環は可換にな

る．$SL(2,\mathbb{C})$, $SU^*(4)$ はそれぞれ $Spin_0(3,1)$, $Spin_0(5,1)$ と同型であり，階数 1 の対称空間の系列 $G/K = Spin_0(2m+1,1)/Spin(2m+1)$ に属していると見ることができる．$K = Spin(2m+1)$ のスピン表現に付随した G/K 上の等質ベクトル束上の不変微分作用素環は 1 階の Dirac 作用素により生成されており，Dirac 作用素の平方がスピノル Laplacian になっている ([6], [1]).

2.1.4 行列値の可換な微分作用素の一般化

Riemann 対称空間の等質ベクトル束上の可換な不変微分作用素環 $\mathbb{D}_\tau$ の (τ,τ)-動径成分をとることにより，行列値の微分作用素 (20), (21)，および $P_1 = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$ は $k = 1/2,\ 1,\ 2$ のとき可換であることがわかった．一般の $k \in \mathbb{C}$ に対してもこれらの作用素は可換であることが期待される．実際，直接計算によりこれらの作用素の可換性を証明することができる．

(20), (21) の形を見ると，函数項に $1/\sinh$, $1/\sinh$ の 2 乗 $1/\sinh^2$ と微分 $-\cosh/\sinh^2$ が現れていることに気付く．そこで，$k \in \mathbb{C}, k \neq 0$, $\beta(t)$ を $t=0$ で 1 位の極を持つ有理型函数として，

$$
\begin{aligned}
P_1 =& \partial_1 + \partial_2 + \partial_3, \\
P_2 =& \partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 + k(k-1)\sum_{1\le i<j\le 3} \beta(t_{ij})^2 \\
&+k\begin{pmatrix} \beta(t_{12})^2+\beta(t_{13})^2 & \beta'(t_{12}) & \beta'(t_{13}) \\ \beta'(t_{12}) & \beta(t_{12})^2+\beta(t_{23})^2 & \beta'(t_{23}) \\ \beta'(t_{13}) & \beta'(t_{23}) & \beta(t_{23})^2+\beta(t_{13})^2 \end{pmatrix}, \\
Q_1 =& \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & -\beta(t_{12}) & -\beta(t_{13}) \\ \beta(t_{12}) & 0 & -\beta(t_{23}) \\ \beta(t_{13}) & \beta(t_{23}) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とおくと，P_1, P_2, Q_1 が互いに可換であるための必要十分条件は，β が次の函数微分方程式を満たすことであることがわかる．

$$
-\beta(s)\beta^2(s+t) + \beta(s)\beta^2(t) + \beta(s+t)\beta'(t) + \beta'(s+t)\beta(t) = 0. \tag{22}
$$

$\beta(t) = 1/\sinh t$, 別の実形をとった $1/\sin t$, 退化した場合の $1/t$ がこの函数微分方程式の解であることはわかっている．この函数微分方程式は k に依存しないので，(20), (21) は任意の $k \in \mathbb{C}$ に対して可換であることもわかる[*5].

[*5] §1 で述べたスカラー値の場合には，パラメーター k に関する昇降演算子があり，Heckman-Opdam の理論において重要な役割を果たした．上で求めた行列値の可換な微分作用素に対して昇降演算子が存在するかどうか調べていない．

命題 (Olshanetsky-Perelomov [13, Appendix A])

原点で 1 位の極を持つ，函数微分方程式 (22) の一般解は Jacobi の楕円函数 sn ([14]) を用いて

$$\beta(t)=\frac{a}{\mathrm{sn}(ax|\kappa)}\quad (a\neq 0,\ \kappa\text{ は定数})$$

の形で与えられる．また，$\beta(t)$ が $t\in\mathbb{R}$ 上実数値をとるための必要十分条件は，次の (1), (2) のいずれかが成り立つことである：

(1) $|a|=1,\ \kappa=1/a^2$,

(2) $a\in\mathbb{R}\cup\sqrt{-1}\mathbb{R},\ \kappa\in\mathbb{R}$.

[13] では対称空間に付随した古典系の可積分性に関連して (22) と同等な函数方程式が解かれている．

行列値の 1 階の微分作用素 Q_1 は Lax 作用素であると指摘を受けたが，$\beta(t)$ が楕円函数や三角函数の場合に P_2 と Q_1 の可換性が従う枠組みが知られているのかどうかわからない．

2.2 ベクトル値の同時固有函数

この節では，行列値の可換な微分作用素 (20), (21) の同時固有函数について述べる（パラメーター k は一般の複素数に拡張して考える）．

2.2.1 ベクトル値の同時固有値問題

2.1 節では，$\delta^{1/2}$ でひねった形で行列値の微分作用素を考えたが，以下ではひねらない形で考える．L を (2) で与えた，スカラー値の場合の 2 階の微分作用素とする．

$$\begin{aligned}\tilde{P}_2&:=\delta^{-1/2}\circ P_2\circ\delta^{1/2}\\&=L_2-4k^2+k\begin{pmatrix}\frac{1}{\sinh^2 t_{12}}+\frac{1}{\sinh^2 t_{13}} & -\frac{\cosh t_{12}}{\sinh^2 t_{12}} & -\frac{\cosh t_{13}}{\sinh^2 t_{13}}\\ -\frac{\cosh t_{12}}{\sinh^2 t_{12}} & \frac{1}{\sinh^2 t_{12}}+\frac{1}{\sinh^2 t_{23}} & -\frac{\cosh t_{23}}{\sinh^2 t_{23}}\\ -\frac{\cosh t_{13}}{\sinh^2 t_{13}} & -\frac{\cosh t_{23}}{\sinh^2 t_{23}} & \frac{1}{\sinh^2 t_{13}}+\frac{1}{\sinh^2 t_{23}}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1&:=\delta^{-1/2}\circ Q_1\circ\delta^{1/2}\\&=\begin{pmatrix}\partial_1&0&0\\0&\partial_2&0\\0&0&\partial_3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\coth t_{12}+\coth t_{13} & -\frac{1}{\sinh t_{12}} & -\frac{1}{\sinh t_{13}}\\ \frac{1}{\sinh t_{12}} & -\coth t_{12}+\coth t_{23} & -\frac{1}{\sinh t_{23}}\\ \frac{1}{\sinh t_{13}} & \frac{1}{\sinh t_{23}} & -\coth t_{13}-\coth t_{23}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{24}$$

とおく．このとき，任意の $k\in\mathbb{C}$ に対して，$[\tilde{P}_2,\tilde{Q}_1]=0$ が成り立つ．

$E(t)={}^t(E_1(t),E_2(t),E_3(t))$ を $\mathfrak{a}\simeq\{(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}^3 : t_1+t_2+t_3=0\}$ 上のベクトル値函数，$\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*=\{\lambda\in\mathbb{C}^3 : \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\}$ として，同時固有値問題

$$\mathcal{M}_{\lambda,k}:\begin{cases}\tilde{P}_2E=(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)E,\\ \tilde{Q}_1E=\lambda_1E\end{cases}\tag{25}$$

を考える．($\tilde{P}_2$ と $\tilde{Q}_1$ の固有値は独立な任意の複素数値をとることができる．)

2.2.2 微分方程式と函数の S_3-不変性

本稿で考えている微分方程式系とその固有函数は Weyl 群不変性を持っている．§1 で述べたスカラー値の場合には，群 G 上の両側 K-不変性が，Cartan 分解 $G = KAK$ を通して動径成分の Weyl 群不変性を導く．2.1 節で述べた行列値の場合には，K が函数の変数と値をとる表現空間の両方に作用するので，動径成分についても変数と値に同時に Weyl 群が作用し，その作用の下での不変性がある．

d を $\mathfrak{a}$ 上の 3×3 行列値の微分作用素，E を $\mathbb{C}^3$ に値をとる $\mathfrak{a}$ 上の函数とする．$w \in S_3$ に対して，置換行列 P_w を $P_w = (\delta_{iw(j)})_{1\le i,j\le 3}$ により定義する．$w \in S_3$ に対して，$E^w(t) = E(w^{-1}t)$ とおき，d^w を d において t を $w^{-1}t$ で置き換え，$\partial_j\,(1 \le j \le 3)$ を $\partial_{w^{-1}(j)}$ で置き換えたものとする．

(23), (24) で与えられる $d = \tilde{P}_2, \tilde{Q}_1$ は，

$$d^w = P_w^{-1} d P_w \quad (w \in S_3). \tag{26}$$

の形の S_3 不変性を持つ．また，方程式の S_3 不変性 (26) に応じて，同時固有値問題 $\mathcal{M}_{\lambda,k}$ (25) の $\mathfrak{a}$ 上の実解析解 E は S_3 不変性

$$E^w = P_w^{-1} E \quad (w \in S_3) \tag{27}$$

を持つ．

2.2.3 ベクトル値の固有函数の接続

2.2.1 節で述べた同時固有値問題 $\mathcal{M}_{\lambda,k}$ (25) を考える．1.2 節で概説したスカラー値の場合 (Heckman-Opdam の超幾何函数のとき) と同様に，正の Weyl chamber $\mathfrak{a}_+$ 上の級数解を作り，無限遠で 1 変数の場合に帰着することにより接続係数 (c 函数) を与える．これは，$k = 1/2$ ($G/K = SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$ の場合) には，宗野 [27] により実行されており，一般の k に対しても同じ方法を用いる．

微分方程式系 $\mathcal{M}_{\lambda,k}$ (25) は無限遠で確定特異点を持ち，特性指数は $w\lambda - \rho(k)$ $(w \in S_3)$ で与えられる．(正確には $e^{-t_1+t_2}$, $e^{-t_2+t_3}$ を変数にとって考える ([16]).) $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1,0,0)$ とおく．generic な $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $w \in S_3$ に対して，次の形をした $\mathcal{M}_{\lambda,k}$ の $\mathfrak{a}_+$ 上の級数解 $\Phi(w,\lambda,k;t)$ が存在する．

$$\Phi(w,\lambda,k;t) \sim e^{\langle w\lambda-\rho(k),t\rangle} w\boldsymbol{e}_1 + \cdots .$$

そして，

$$\{\Phi(w,\lambda,k;t) : w \in S_3\}$$

は $\mathfrak{a}_+$ 上の $\mathcal{M}_{\lambda,k}$ の解空間の基底をなす．

A_1 型の場合の $\tilde{c}_1(s,k)$ (14) を用いて $C(\lambda,k)$ を次で定義する．

$$d(k)=\frac{\Gamma(2k+1)\Gamma(3k+1)}{\Gamma(k+1)^2}, \tag{28}$$

$$C(\lambda,k)=d(k)\tilde{c}_1(\lambda_1-\lambda_2+1,k)\tilde{c}_1(\lambda_1-\lambda_3+1,k)\tilde{c}_1(\lambda_2-\lambda_3,k) \tag{29}$$

$k=1/2$ のとき，$C(\lambda,1/2)$ は $SL(3,\mathbb{R})$ の spherical でない主系列表現の c-函数であり，関口 [24], 宗野 [27] により定数倍を除いて計算されている．

$w\in S_3$ について，$1\le i<j\le 3$ かつ $w^{-1}(i)>w^{-1}(j)$ であるような i,j の組すべてに対して $C(\lambda,k)$ における $\lambda_i-\lambda_j$ を $\lambda_j-\lambda_i$ で置き換えたものを $C(w,\lambda,k)$ で表す．$\mathfrak{a}_+$ 上のベクトル値函数 $E(\lambda,k;t)$ を次で定義する．

$$E(\lambda,k;t)=\sum_{w\in S_3}C(w,\lambda,k)\Phi(w,\lambda,k;t).$$

これは，$k=1/2$ の場合，つまり spherical でない主系列表現の行列要素の (τ,τ)-動径成分の場合に宗野 [27] が与えた表示式である（定数倍を除く）．スカラー値の場合に Heckman と Opdam が (17) により超幾何函数を定義したのを真似て，拡張したパラメーター k に対してもこう定義した．

ここで正規化の因子 $d(k)$ は，$\mathcal{M}_{\lambda,k}$ の $\mathfrak{a}$ 上の実解析解の第 3 成分を Weyl 群の壁 $t_1=t_2$ に制限して得られる函数が，変数変換により一般化超幾何函数 ${}_3F_2$ の満たす常微分方程式の解になっていることを用いて，常微分方程式の解の接続係数を用いて決定される ([21], [18], [19]).

generic な k に対して以下のことが成り立つと予想される．

予想 $E(\lambda,k;t)$ は不変性 (27) を持つ $\mathfrak{a}$ 上の実解析函数に拡張される．また，$\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ について整型に拡張される．拡張された $E(\lambda,k;t)$ は，不変性 (27) を持ち $\mathfrak{a}$ 上実解析的で $t=0$ における値が ${}^t(1,1,1)$ という条件を満たす $\mathcal{M}_{\lambda,k}$ の一意解を与える．

上の予想は大体証明できている（つもりだ）が，定理として述べるのは準備中の論文 [26] に譲る．

2.2.4 有理関数ポテンシャルの場合

退化した場合，行列値の微分作用素は Dunkl 作用素 ([3]) と関係がある．A_2 型の Dunkl 作用素は，

$$D_i=\partial_i+k\sum_{j\ne i}\frac{1}{t_i-t_j}(1-s_{ij})\quad(1\le i\le 3) \tag{30}$$

により定義される．ここで s_{ij} は $\mathfrak{a}$ 上のスカラー値函数に対して変数 t_i, t_j の入れ替えにより作用する．D_1, D_2, D_3 は互いに可換である．

$\beta(t)=1/t$ の場合に 2.1.4 節の可換な微分作用素を (23), (24) と同様の形で書くと，次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}_2 =& \partial_1\partial_2+\partial_2\partial_3+\partial_3\partial_1-k\left\{\frac{1}{t_1-t_2}(\partial_1-\partial_2)+\frac{1}{t_2-t_3}(\partial_2-\partial_3)+\frac{1}{t_1-t_3}(\partial_1-\partial_3)\right\} \\
&+k\begin{pmatrix} \frac{1}{(t_1-t_2)^2}+\frac{1}{(t_1-t_3)^2} & -\frac{1}{(t_1-t_2)^2} & -\frac{1}{(t_1-t_3)^2} \\ -\frac{1}{(t_1-t_2)^2} & \frac{1}{(t_1-t_2)^2}+\frac{1}{(t_2-t_3)^2} & -\frac{1}{(t_2-t_3)^2} \\ -\frac{1}{(t_1-t_3)^2} & -\frac{1}{(t_2-t_3)^2} & \frac{1}{(t_1-t_3)^2}+\frac{1}{(t_2-t_3)^2} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\tilde{Q}_1=\begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} \frac{1}{t_1-t_2}+\frac{1}{t_1-t_3} & -\frac{1}{t_1-t_2} & -\frac{1}{t_1-t_3} \\ \frac{1}{t_1-t_2} & -\frac{1}{t_1-t_2}+\frac{1}{t_2-t_3} & -\frac{1}{t_2-t_3} \\ \frac{1}{t_1-t_3} & \frac{1}{t_2-t_3} & -\frac{1}{t_1-t_3}-\frac{1}{t_2-t_3} \end{pmatrix}. \tag{32}
$$

これらは，$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\sinh\varepsilon t}=\frac{1}{t}$ などにより (23), (24) の三角函数が有理函数に退化したものになっている.

$E(t)={}^t(E_1(t),E_2(t),E_3(t))$ に対して $\tilde{Q}_1E$ の第 1 成分は,

$$
\partial_1E_1+k\left\{\frac{1}{t_1-t_2}(E_1-E_2)+\frac{1}{t_1-t_3}(E_1-E_3)\right\}
$$

である. $E(t)$ に S_3 不変性 (27) を課すと，$s_{12}E_1=E_2$, $s_{13}E_1=E_3$ より，$\tilde{Q}_1E$ の第 1 成分は E_1 に Dunkl 作用素を作用させたもの D_1E_1 であることがわかる. 同じく E に S_3 不変性を課すと，$\tilde{P}_2E$ の第 1 成分は E_1 に Dunkl Laplacian の $-1/2$ 倍を作用させたもの $-\frac{1}{2}\Delta_kE_1$ であることがわかる. ここで，Dunkl Laplacian Δ_k は，$\Delta_k=D_1^2+D_2^2+D_3^2$ により定義される（$\mathfrak{a}$ 上で $\Delta_k=-2(D_1D_2+D_2D_3+D_3D_1)$). 第 2，第 3 成分についても同様である.

Dunkl 理論から (31), (32) の同時固有函数について何かわかるか検討していない. また，三角函数の場合の作用素 (23), (24) が 1.1.3 節で触れた Dunkl 作用素の三角函数版 (Heckman 作用素または Cherednik 作用素）と関係付けられるのかも知れないが，有理函数の場合と異なり 1 階の作用素 (24) の形と適合しない.

今後の展望

本稿で考えたのと同様の問題が他の対称空間やルート系の場合に考えられる. $G/K=Sp(2,\mathbb{R})/U(2)$, τ が $U(2)$ の 2 次元表現の場合に可換な微分作用素の動径成分 ([9]) の一般化を得ているが，固有函数についてはまだ調べていない.

参考文献

[1] R. Camporesi, *Harmonic analysis for spinors on real hyperbolic spaces*, Coloq. Math. **87** (2001), 245–287.

[2] A. Debiard, *Polynômes de Tchébychev et de Jacobi dans un espace euclidien de dimension p*, C. R. Acad. Sci. Paris I **296** (1983), 529–532.

[3] C. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Mat. Soc., **311** (1989), 167–183.

[4] G. Heckman and H. Schlichtkrull, *Harmonic Analysis and Special Functions on Symmetric Spaces*, Academic Press, 2011.

[5] A. Deitmar, *Invariant operators on higher K-types*, J. reine angew. Math. **412** (1990), 97–107.

[6] P.-Y. Gaillard, *Harmonic spinors on hyperbolic space*, Canad. Math. Bull. **36** (1993), 257–262.

[7] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[8] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, 1984.

[9] M. Iida, *Spherical functions of the principal series representation of $Sp(2,\mathbb{R})$ as hypergeometric functions of C_2-type*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **32** (1996), 689–727. (Errata: Publ. RIMS, Kyoto Univ. **43** (2007), 521–524).

[10] T. Koornwinder, *Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups*, Mathematics and Its Applications **18** (1984), 1–85.

[11] H. Manabe, T. Ishii, and T. Oda. *Principal series Whittaker functions on $SL(3,\mathbb{R})$*, Japan. J. Math. (N. S.), **30** (2004), 183–226.

[12] K. Minemura, *Invariant differential operators and spherical sections on a homogeneous vector bundle*, Tokyo J. Math. **15** (1992), 231–245.

[13] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, *Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras*, Invent. Math. **37** (1976), 93–108.

[14] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 『特殊函数』 (岩波 数学公式 3), 岩波書店, 1987.

[15] E.M. Opdam, *Lecture Notes on Dunkl Operators for Real and Complex Reflection Groups*, MSJ Memoirs, Math. Soc. Japan, 2000.

[16] T. Oshima, *Commuting differential operators with regular singularities*, in Algebraic Analysis of Differential Equations: from Microlocal Analysis to Exponential Asymptotics, Springer, 2008.

[17] T. Oshima, *Completely integrable systems associated with classical root systems*, SIGMA **3** (2007), 061.

[18] 大島利雄述, 廣惠一希記 『特殊関数と代数的線型常微分方程式』東京大学数理科学レクチャーノート, **11**, 2011.

[19] T. Oshima *Classification of Fuchsian systems and their connection problem,* RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B37** (2013), 163–192.

[20] T. Oshima and H. Sekiguchi, *Commuting families of differential operators invariant under the action of a Weyl group*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 1–75.

[21] T. Oshima and N. Shimeno , *Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations*, RIMS Kkyroku Bessatsu, vol. **B20** (2010), 129–162.

[22] S. N. M. Ruijsenaars, *Systems of Calogero-Moser type*, CRM series in Mathematical Physics, 251–352, Springer, 1999.

[23] J. Sekiguchi, *Zonal spherical functions on some symmetric spaces*, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **12** Suppl. (1977), 455–464.

[24] J. Sekiguchi, *On Harish-Chandra's c-function*, Seminar Reports of Unitary Representation **1**, (1981), 68–114 (in Japanese).

[25] N. Shimeno, *The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K-type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type*, Jour. Funct. Anal., **121** (1994), 330–388.

[26] N. Shimeno, *Matrix-valued commuting differential operators with A_2 symmetry and their joint eigenfunctions*, in preparation.

[27] K. Sono, *Matrix coefficients with minimal K-types of the spherical and non-spherical principal series representations of $SL(3,\mathbb{R})$*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **19** (2012), 1–55.

[28] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups* II, Springer, 1972.