数理解析研究所講究録
第2033巻 2017年 1-8

BUZANO の不等式とその拡張について (BUZANO INEQUALITY AND ITS EXTENSION)

大阪教育大学 富永 雅 (Masaru Tominaga)
Osaka Kyoika University

1. 序

1963 年、Wilf [20] は、複素数に対して、次の様な逆算術幾何平均不等式を示した：複素数 $t_1, \ldots, t_n$ に対して

$$|\arg t_i| \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

を仮定する。このとき

$$|t_1 \cdot t_2 \cdots t_n|^{\frac{1}{n}} \leq (\sec \phi) \frac{1}{n} |t_1 + t_2 + \cdots + t_n|. \tag{1.2}$$

が得られる。事実、仮定 (1.1) より

$$\cos \phi \cdot (|t_1| + |t_2| + \cdots + |t_n|) \leq |t_1 + t_2 + \cdots + t_n| \tag{1.3}$$

なので、算術幾何平均不等式より、不等式 (1.2) が導かれる。

その後、Diaz と Metcalf [2] は、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ で内積が定義されたヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ におけるベクトルの場合について、その結果を拡張した：

Diaz-Metcalf 不等式. z を $\mathscr{H}$ 上の単位ベクトルとする。$x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{H}$ を不等式

$$0 \leq r \leq \frac{\operatorname{Re} \langle x_i, z \rangle}{\|x_i\|} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が定数 r をもつよう与える。このとき、次の不等式

$$r \sum_i \|x_i\| \leq \left\| \sum_i x_i \right\|.$$

が得られる。

[9, Theorem 9] において、Diaz-Metcalf 不等式 は、Selberg 不等式 と関係づけられ、次のように拡張された ([12]):

定理 A. $z_1, \ldots, z_m$ を $\mathscr{H}$ 上のベクトルとする。$x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{H}$ を、任意の $j = 1, \ldots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle x_i, z_j \rangle}{\|x_i\|} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が定数 r_j を持つよう与える。このとき、$y \in \mathscr{H}$ が $j = 1, \ldots, m$ に対して $\langle y, z_j \rangle = 0$ を満たせば

$$|\langle x_1 + \cdots + x_n, y \rangle|^2 + \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \|x_i\| \right)^2 \|y\|^2 \leq \left\| \sum_i x_i \right\|^2 \|y\|^2$$

が成り立つ。但し、任意の $j=1,\dots,m$ に対して $c_j=\sum_h |\langle z_h,z_j\rangle|$ とする。

次に、Buzano 不等式 を紹介する。ここで、$\mathcal{B}(y_1,y_2)$ $(y_1,y_2\in\mathscr{H})$ を次のように定める：

$$\mathcal{B}(y_1,y_2):=\frac{1}{2}(\|y_1\|\,\|y_2\|+|\langle y_1,y_2\rangle|).$$

任意の $x,y_1,y_2\in\mathscr{H}$ に対して不等式

$$|\langle x,y_1\rangle\langle x,y_2\rangle|\le\mathcal{B}(y_1,y_2)\|x\|^2$$

が成り立つ。もし、$y_1=y_2$ ならば、Schwarz 不等式 になる。

拙稿 [8] において、Selberg と Buzano との同時拡張不等式を導いた：

定理 B. $y_1,y_2\in\mathscr{H}$ $(k=1,2)$ が 0 でないベクトル $\{z_j;j=1,2,\dots,m\}\subset\mathscr{H}$ に対して $\langle y_k,z_j\rangle=0$ を満たすとき、不等式

$$|\langle x,y_1\rangle\langle x,y_2\rangle|+\mathcal{B}(y_1,y_2)\sum_j\frac{|\langle x,z_j\rangle|^2}{\sum_h|\langle z_h,z_j\rangle|}\le\mathcal{B}(y_1,y_2)\|x\|^2 \tag{1.4}$$

がすべての $x\in\mathscr{H}$ に対して成り立つ。

本稿では、Diaz-Metcalf 不等式と Buzano 不等式に関係する 定理 A,B における不等式の同時拡張を導く。応用として、拡張した Heinz-Kato-Furuta 不等式 の改良を行う。更に、Furuta 不等式 と chaotic order を用いることにより導かれる不等式につい も触れる。

2. Diaz-Metcalf 不等式と Buzano 不等式の同時拡張

まず、Diaz-Metcalf 不等式と Buzano 不等式の同時拡張を与える:

定理 2.1. $z_1,\dots,z_m$ を $\mathscr{H}$ 上の 0 でないベクトルとする。$x_1,\dots,x_n\in\mathscr{H}$ を、任意の $j=1,\dots,m$ に対して不等式

$$0\le r_j\le\frac{\mathrm{Re}\,\langle x_i,z_j\rangle}{\|x_i\|}\quad(i=1,\dots,n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、$y_1,y_2\in\mathscr{H}$ が $k=1,2$ と $j=1,\dots,m$ に対して $\langle y_k,z_j\rangle=0$ を満たせば

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle\sum_i x_i,y_1\right\rangle\left\langle\sum_i x_i,y_2\right\rangle\right|+\left(\sum_j\frac{r_j^2}{c_j}\right)\left(\sum_i\|x_i\|\right)^2\mathcal{B}(y_1,y_2)\\&\le\mathcal{B}(y_1,y_2)\left\|\sum_i x_i\right\|^2\end{aligned}\tag{2.1}$$

が成り立つ。但し、任意の $j=1,\dots,m$ に対して $c_j=\sum_h|\langle z_h,z_j\rangle|$ とする。

証明. 次の不等式により、(2.1) が得られる：

$$\mathcal{B}(y_1,y_2)\left\{\left\|\sum_i x_i\right\|^2-\sum_j\frac{r_j^2}{c_j}\left(\sum_i\|x_i\|\right)^2\right\}$$

$$\geq \mathcal{B}(y_1,y_2)\left(\left\|\sum_i x_i\right\|^2 - \sum_j \frac{(\mathrm{Re}\,\langle \sum_i x_i, z_j\rangle)^2}{c_j}\right)$$
$$\geq \mathcal{B}(y_1,y_2)\left(\left\|\sum_i x_i\right\|^2 - \sum_j \frac{|\langle \sum_i x_i, z_j\rangle|^2}{c_j}\right)$$
$$\geq \left|\left\langle \sum_i x_i, y_1\right\rangle \left\langle \sum_i x_i, y_2\right\rangle\right|.$$

ここで、3 番目の不等式は、定理 B により成り立つ。 □

次に、不等式 (2.1) の拡張を導く:

系 2.2. $T = U|T|$ を $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。$z_1,\dots,z_m$ を $\mathscr{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、α,β を $\alpha+\beta\geq 1\geq\alpha$ を満たす非負数とする。$x_1,\dots,x_n\in\mathscr{H}$ を、任意の $j=1,\dots,m$ に対して不等式

$$0\leq r_j\leq \frac{\mathrm{Re}\,\langle x_i, z_j\rangle}{\|x_i\|}\quad (i=1,\dots,n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、$y_1,y_2\in\mathscr{H}$ が $k=1,2$ と $j=1,\dots,m$ に対して $\langle |T^*|^{\beta+1-\alpha}y_k, z_j\rangle = 0$ (*resp.* $\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}z_j, y_k\rangle = 0$) を満たせば

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle \sum_i T|T|^{\alpha+\beta-1}x_i, y_1\right\rangle \left\langle \sum_i T|T|^{\alpha+\beta-1}x_i, y_2\right\rangle\right| \\ &+\mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right)\left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j}\right)\left(\sum_i \||T|^\alpha x_i\|\right)^2 \\ &\leq \mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right)\left\|\sum_i |T|^\alpha x_i\right\|^2\end{aligned}\tag{2.2}$$

が成り立つ。但し、任意の $j=1,\dots,m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)}z_h, z_j\rangle|$ (*resp.* $c_j=\sum_h |\langle |T|^{2\alpha}z_h, z_j\rangle|$) とする。

証明. 定理 2.1 において x_i, z_j, y_k をそれぞれ $|T|^\alpha x_i$, $|T|^{1-\alpha}U^*z_j$, $U^*|T^*|^\beta y_k$ (resp. $U|T|^\alpha x_i$, $U|T|^\alpha z_j$, $|T^*|^\beta y_k$) に置き換えることにより得られる。 □

3. Extensions of Heinz-Kato-Furuta 不等式

[15] において、古田は、Heinz-Kato 不等式を次のように拡張した:

Heiz-Kato-Furuta 不等式. A と B を $\mathscr{H}$ 上の正作用素とする。T が $T^*T\leq A^2$ と $TT^*\leq B^2$ を満たすとき、

$$\left|\langle T|T|^{\alpha+\beta-1}x, y\rangle\right| \leq \|A^\alpha x\|\,\|B^\beta y\|$$

が任意の $x,y\in\mathscr{H}$ と $\alpha+\beta\geq 1$ を満たす $\alpha,\beta\in[0,1]$ に対して成り立つ。尚、A と B が逆作用素ならば、条件 $\alpha+\beta\geq 1$ を必要としない。

この不等式は、種々の一般化が考察されている ([9], [10], [11])。本章では、系 2.2 を適用し、Heinz-Kato-Furuta 不等式を拡張する。そのために、次の補題を提示する ([8]):

補題 C. ある $B \geq 0$ が $TT^* \leq B^2$ を満たしているならば、$\beta \in [0,1]$ に対して

$$\mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right) \leq \left\|B^\beta y_1\right\| \left\|B^\beta y_2\right\|$$

が任意の $y_1, y_2 \in \mathscr{H}$ に対して成り立つ。

ここで、系 2.2 と 補題 C から次の不等式を導く：

系 3.1. $T = U|T|$ を $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、$z_1, \ldots, z_m$ を $\mathscr{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、$\alpha, \beta \in [0,1]$ は $\alpha + \beta \geq 1 \geq \alpha$ を満たすとする。$x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{H}$ を、任意の $j = 1, \ldots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re}\langle Tx_i, z_j\rangle}{\||T|^\alpha x_i\|} \quad \left(resp.\ 0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re}\langle |T|^{2\alpha} x_i, z_j\rangle}{\||T|^\alpha x_i\|}\right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、ある $A, B \geq 0$ に対して $T^*T \leq A^2$ と $TT^* \leq B^2$ かつ、$y_1, y_2 \in \mathscr{H}$ が $k = 1, 2$ と $j = 1, \ldots, m$ に対して $\left\langle |T^*|^{\beta+1-\alpha} y_k, z_j\right\rangle = 0$ (*resp.* $\left\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} z_j, y_k\right\rangle = 0$) を満たせば

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \sum_i T|T|^{\alpha+\beta-1} x_i, y_1\right\rangle \left\langle \sum_i T|T|^{\alpha+\beta-1} x_i, y_2\right\rangle\right| \\
&\quad + \mathcal{B}\left(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2\right) \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j}\right) \left(\sum_i \||T|^\alpha x_i\|\right)^2 \qquad (3.1) \\
&\leq \left\|B^\beta y_1\right\| \left\|B^\beta y_2\right\| \left\|\sum_i A^\alpha x_i\right\|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ。但し、任意の $j = 1, \ldots, m$ に対して $c_j = \sum_h \left|\left\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_h, z_j\right\rangle\right|$ (*resp.* $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2\alpha} z_h, z_j\rangle|$) とする。

次に、更なる拡張のために Furuta 不等式 [13] を引用する：

The Furuta 不等式.
$A \geq B \geq 0$ ならば、任意の $r \geq 0$ に対して

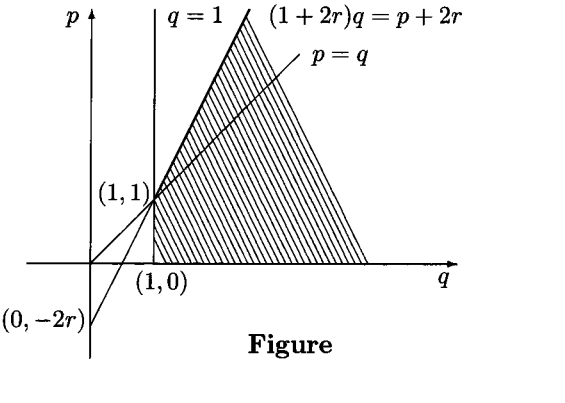
(i) $\quad (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq (B^r B^p B^r)^{\frac{1}{q}}$

と

(ii) $\quad (A^r A^p A^r)^{\frac{1}{q}} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}}$

が次の不等式 $(1 + 2r)q \geq p + 2r$

を満たす $p \geq 0$ と $q \geq 1$ に対して成り立つ。



Figure

尚、[17] と [3] にもその証明が記載されており、特に、[14] ではその証明が 1 頁でなされている。図中において、印づけられた範囲が、最良であることは棚橋により示されている [18]。また、Heinz -Kato-Furuta 不等式 は、[16] において Furuta 不等式を用いることで拡張された。

ここで、Furuta 不等式により、次に示す通り 系 2.2 の拡張を与える：

定理 3.2. A を $\mathscr{H}$ 上の正作用素とし、$T = U|T|$ は、$T^*T \leq A^2$ を満たす $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。$z_1, \ldots, z_m$ を $\mathscr{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、$\alpha, \beta \geq 0$ は、任意の $r, s \geq 0$ に対して $(1+r)\alpha + (1+s)\beta \geq 1 \geq (1+r)\alpha$ を満たすとする。$x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{H}$ を、任意の $j = 1, \ldots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re}\langle Tx_i, z_j\rangle}{\||T|^{(1+r)\alpha}x_i\|} \quad \left(\textit{resp. } 0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re}\left\langle |T|^{2(1+r)\alpha}x_i, z_j\right\rangle}{\||T|^{(1+r)\alpha}x_i\|}\right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、$y_1, y_2 \in \mathscr{H}$ が $k = 1, 2$ と $j = 1, \ldots, m$ に対して $\left\langle |T^*|^{(1+s)\beta+1-(1+r)\alpha}y_k, z_j\right\rangle = 0$ (*resp.* $\left\langle T|T|^{(1+r)\alpha+(1+s)\beta-1}z_j, y_k\right\rangle = 0$) を満たせば次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \sum_i T|T|^{(1+r)\alpha+(1+s)\beta-1}x_i, y_1\right\rangle \left\langle \sum_i T|T|^{(1+r)\alpha+(1+s)\beta-1}x_i, y_2\right\rangle\right| \\
&\quad + \mathcal{B}\left(|T^*|^{(1+s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+s)\beta}y_2\right)\left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j}\right)\left(\sum_i \||T|^{(1+r)\alpha}x_i\|\right)^2 \\
&\leq \mathcal{B}\left(|T^*|^{(1+s)\beta}y_1, |T^*|^{(1+s)\beta}y_2\right)\left\langle \left(|T|^r A^{2p}|T|^r\right)^{\frac{(1+r)\alpha}{p+r}} \sum_i x_i, \sum_i x_i\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

但し、$p \geq 1$、かつ、任意の $j = 1, \ldots, m$ に対して $c_j = \sum_h \left|\left\langle |T^*|^{2(1-(1+r)\alpha)}z_h, z_j\right\rangle\right|$ (*resp.* $c_j = \sum_h \left|\left\langle |T|^{2(1+r)\alpha}z_h, z_j\right\rangle\right|$) とする。

証明. 系 2.2 において α と β をそれぞれ $\alpha_1 = (1+r)\alpha$ と $\beta_1 = (1+s)\beta$ とに置き換えることにより次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \sum_i T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x_i, y_1\right\rangle \left\langle \sum_i T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1}x_i, y_2\right\rangle\right| \\
&\quad + \mathcal{B}\left(|T^*|^{\beta_1}y_1, |T^*|^{\beta_1}y_2\right)\left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j}\right)\left(\sum_i \||T|^{\alpha_1}x_i\|\right)^2 \\
&\leq \mathcal{B}\left(|T^*|^{\beta_1}y_1, |T^*|^{\beta_1}y_2\right)\left\langle |T|^{2\alpha_1}\sum_i x_i, \sum_i x_i\right\rangle.
\end{aligned}$$

但し、$j = 1, \ldots, m$ に対して $c_j = \sum_h \left|\left\langle |T^*|^{2(1-\alpha_1)}z_h, z_j\right\rangle\right|$ (resp. $c_j = \sum_h \left|\left\langle |T|^{2\alpha_1}z_h, z_j\right\rangle\right|$) とする。次に、Furuta 不等式において A, B, r, q をそれぞれ A^2, $|T|^2$, $\frac{r}{2}$, $\frac{p+r}{(1+r)\alpha}$ に置き換える。このとき

$$|T|^{2\alpha_1} = |T|^{2(1+r)\alpha} \leq \left(|T|^r A^{2p}|T|^r\right)^{\frac{(1+r)\alpha}{p+r}}$$

が得られ、上記 2 式より不等式 (3.2) が導かれる。 □

ここで上記定理において、T が正、あるいは、可逆であれば、$(1+r)\alpha+(1+s)\beta\geq 1$ は、必要でない。

$\log A \geq \log B$ により定義される順序は chaotic order と呼ばれ、$A \gg B$ と表される [4]。対数関数の作用素単調性からこの順序は $A \geq B$ よりも弱い。Furuta 型作用素不等式の観点から chaotic order の特徴づけが得られる ([5], [6], [7])。そこで、chaotic order により 系 2.2 に関わる不等式を与える。このために、次の chaotic order の特徴づけを紹介する ([4], [5], [6], [7], [19]) :

定理 D. 作用素 $A, B>0$ が $A \gg B$ である必要十分条件は

$$(B^rA^pB^r)^{\frac{1}{q}} \geq (B^rB^pB^r)^{\frac{1}{q}}$$

が $2rq \geq p+2r$ を満たす $q\geq 1,\ p,r\geq 0$ に対して成り立つことである。

ここで、定理 D を適用することにより、系 2.2 の chaotic 版が導かれる :

定理 3.3. A を $\mathscr{H}$ 上の正作用素とし、$T=U|T|$ は、$T^*T \ll A^2$ を満たす $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。$z_i \notin \ker(T^*)$ $(i=1,2,\ldots,n)$、$\alpha\in[0,1]$ とする。$z_1,\ldots,z_m$ を $\mathscr{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、$\alpha,\beta\in[0,1]$ は、任意の $r,s\geq 0$ に対して $r\alpha+s\beta\geq 1\geq r\alpha$ を満たすとする。$x_1,\ldots,x_n\in\mathscr{H}$ を、任意の $j=1,\ldots,m$ に対して不等式

$$0\leq r_j \leq \frac{\mathrm{Re}\,\langle Tx_i, z_j\rangle}{\||T|^{r\alpha}x_i\|} \quad \left(\mathit{resp.}\ 0\leq r_j\leq \frac{\mathrm{Re}\,\langle |T|^{2r\alpha}x_i, z_j\rangle}{\||T|^{r\alpha}x_i\|}\right) \qquad (i=1,\ldots,n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、$y_1,y_2\in\mathscr{H}$ が $k=1,2$ と $j=1,\ldots,m$ に対して $\left\langle |T^*|^{s\beta+1-r\alpha}y_k, z_j\right\rangle=0$ (*resp.* $\left\langle T|T|^{r\alpha+s\beta-1}z_j, y_k\right\rangle=0$) を満たせば次が成り立つ :

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \sum_i T|T|^{r\alpha+s\beta-1}x_i, y_1\right\rangle\left\langle \sum_i T|T|^{r\alpha+s\beta-1}x_i, y_2\right\rangle\right| \\
&\quad + \mathcal{B}\left(|T^*|^{s\beta}y_1, |T^*|^{s\beta}y_2\right)\left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j}\right)\left(\sum_i \||T|^{r\alpha}x_i\|\right)^2 \\
&\leq \mathcal{B}\left(|T^*|^{s\beta}y_1, |T^*|^{s\beta}y_2\right)\left\langle (|T|^rA^{2p}|T|^r)^{\frac{r\alpha}{p+r}}\sum_i x_i, \sum_i x_i\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

但し、$p\geq 0$、かつ、任意の $j=1,\ldots,m$ に対して $c_j=\sum_h\left|\left\langle |T^*|^{2(1-r\alpha)}z_h, z_j\right\rangle\right|$ (*resp.* $c_j=\sum_h|\langle |T|^{2r\alpha}z_h, z_j\rangle|$) とする。

証明. 系 2.2 において α と β をそれぞれ $r\alpha$ と $s\beta$ に置き換えることにより次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \sum_i T|T|^{r\alpha+s\beta-1}x_i, y_1\right\rangle\left\langle \sum_i T|T|^{r\alpha+s\beta-1}x_i, y_2\right\rangle\right| \\
&\quad + \mathcal{B}\left(|T^*|^{s\beta}y_1, |T^*|^{s\beta}y_2\right)\left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j}\right)\left(\sum_i \||T|^{r\alpha}x_i\|\right)^2 \\
&\leq \mathcal{B}\left(|T^*|^{s\beta}y_1, |T^*|^{s\beta}y_2\right)\left\langle |T|^{2r\alpha}\sum_i x_i, \sum_i x_i\right\rangle.
\end{aligned}$$

但し、$j=1,\dots,m$ に対して $c_j=\sum_h|\langle |T^*|^{2(1-r\alpha)}z_h,z_j\rangle|$ (resp. $c_j=\sum_h|\langle |T|^{2r\alpha}z_h,z_j\rangle|$) とする。次に、定理 D において A, B, r, q をそれぞれ $A^2, |T|^2, \frac{r}{2}, \frac{p+r}{r\alpha}$ に置き換える。このとき、

$$|T|^{2r\alpha}\le (|T|^rA^{2p}|T|^r)^{\frac{r\alpha}{p+r}}.$$

が得られ、上記 2 式より不等式 (3.3) が導かれる。 □

次に、Furuta 不等式と 定理 D を補間する Furuta 型作用素不等式を適用することにより 定理 3.2 と 定理 3.3 を補間する次の結論が導かれる：

定理 3.4. A を $\mathscr{H}$ 上の正作用素とし、$T=U|T|$ は、ある $\delta\in(0,1]$ に対して $|T|^{2\delta}\le A^{2\delta}$ を満たす $\mathscr{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。$z_i\notin\ker(T^*)$ $(i=1,2,\dots,n)$、$\alpha\in[0,1]$ とする。$z_1,\dots,z_m$ を $\mathscr{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、$\alpha,\beta\in[0,1]$ は、任意の $r,s\ge 0$ に対して $(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta\ge 1\ge(\delta+r)\alpha$ を満たすとする。$x_1,\dots,x_n\in\mathscr{H}$ を、任意の $j=1,\dots,m$ に対して不等式

$$0\le r_j\le\frac{\operatorname{Re}\langle Tx_i,z_j\rangle}{\||T|^{(\delta+r)\alpha}x_i\|}\quad\left(\textit{resp. } 0\le r_j\le\frac{\operatorname{Re}\left\langle |T|^{2(\delta+r)\alpha}x_i,z_j\right\rangle}{\||T|^{(\delta+r)\alpha}x_i\|}\right)\quad(i=1,\dots,n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、$y_1,y_2\in\mathscr{H}$ が $k=1,2$ と $j=1,\dots,m$ に対して $\left\langle |T^*|^{(\delta+s)\beta+1-(\delta+r)\alpha}y_k,z_j\right\rangle=0$ (*resp.* $\left\langle T|T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1}z_j,y_k\right\rangle=0$) を満たせば次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle\sum_i T|T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1}x_i,y_1\right\rangle\left\langle\sum_i T|T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1}x_i,y_2\right\rangle\right|\\
&\quad+\mathcal{B}\left(|T^*|^{(\delta+s)\beta}y_1,|T^*|^{(\delta+s)\beta}y_2\right)\left(\sum_j\frac{r_j^2}{c_j}\right)\left(\sum_i\||T|^{(\delta+r)\alpha}x_i\|\right)^2\\
&\le\mathcal{B}\left(|T^*|^{(\delta+s)\beta}y_1,|T^*|^{(\delta+s)\beta}y_2\right)\left\langle(|T|^rA^{2p}|T|^r)^{\frac{(\delta+r)\alpha}{p+r}}\sum_i x_i,\sum_i x_i\right\rangle.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

但し、$p\ge\delta$、かつ、任意の $j=1,\dots,m$ に対して $c_j=\sum_h|\langle |T^*|^{2(1-(\delta+r)\alpha)}z_h,z_j\rangle|$ (*resp.* $c_j=\sum_h|\langle |T|^{2(\delta+r)\alpha}z_h,z_j\rangle|$) とする。

証明. 系 2.2 より

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle\sum_i T|T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1}x_i,y_1\right\rangle\left\langle\sum_i T|T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1}x_i,y_2\right\rangle\right|\\
&\quad+\mathcal{B}\left(|T^*|^{(\delta+s)\beta}y_1,|T^*|^{(\delta+s)\beta}y_2\right)\left(\sum_j\frac{r_j^2}{c_j}\right)\left(\sum_i\||T|^{(\delta+r)\alpha}x_i\|\right)^2\\
&\le\mathcal{B}\left(|T^*|^{(\delta+s)\beta}y_1,|T^*|^{(\delta+s)\beta}y_2\right)\left\langle|T|^{2(\delta+r)\alpha}\sum_i x_i,\sum_i x_i\right\rangle.
\end{aligned}$$

が成り立つ。但し、$j = 1, \ldots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-(\delta+r)\alpha)} z_h, z_j \rangle|$ (resp. $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2(\delta+r)\alpha} z_h, z_j \rangle|$) とする。ここで、[6] における不等式

$$|T|^{2(\delta+r)\alpha} \leq (|T|^r A^{2p} |T|^r)^{\frac{(\delta+r)\alpha}{p+r}}$$

を用いることにより、不等式 (3.4) が導かれる。 □

References

[1] M.L. Buzano, *Generalizzazione della diseguaglianza di Cauchy-Schwarz*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politech. Torino **31** (1971-73). (1974), 405-409.

[2] J. B. Diaz and F. T. Metcalf, *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **17**(1966), 88-97.

[3] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator theory **23**(1990), 67–72.

[4] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Alg. and its Appl. **179**(1993), 161–169.

[5] M. Fujii, J.-F. Jiang and E. Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **125**(1997), 3655–3658.

[6] M. Fujii, J.-F. Jiang, E. Kamei and K. Tanahashi, *A characterization of chaotic order and a problem*, J. Inequal. Appl. **2**(1998), 149-156.

[7] M. Fujii and E. Kamei, *Furuta's inequality and a generalization of Ando's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **115**(1992), 409–413.

[8] M. Fujii, A. Matsumoto and M. Tominaga, *Simultaneous extensions of Selberg and Buzano inequalities*, Nihonkai Math. J. **25**(2014), 45–63.

[9] M. Fujii and R. Nakamoto, *Simultaneous extensions of Selberg inequality and Heinz-Kato-Furuta inequality*, Nihonkai Math. J. **9**(1998), 219–225.

[10] M. Fujii and R. Nakamoto, *Extensions of Heinz-Kato-Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**(2000), 223–228.

[11] M. Fujii and R. Nakamoto, *Extensions of Heinz-Kato-Furuta inequality, II*, J. Inequal. Appl. **3**(1999), 293–302.

[12] M. Fujii and H. Yamada, *Around the Bessel inequality*, Math. Japon. **37**(1992), 979–983.

[13] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ *assures* $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ *with* $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc. **101**(1987), 85–88.

[14] T. Furuta, *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. **65**(1989), 126.

[15] T. Furuta, *An extension of the Heinz-Kato theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **120**(1994), 785–787.

[16] T. Furuta, *Determinant type generalizations of the Heinz-Kato theorem via the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **120**(1994), 223–231.

[17] E. Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon. **33**(1988), 883–886.

[18] K. Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **124**(1996), 141–146.

[19] M.Uchiyama, *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl. **2**(1999), 469–471.

[20] H. S. Wilf, *Some applications of the inequality of arithmetic and geometric means to polynomial equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **14**(1963), 263–265.