

Modified Short Pulse 方程式の自己適合移動格子スキーム

早稲田大学基幹理工学研究科 徐 俊庭

早稲田大学理工学術院 丸野 健一

テキサス大学リオグランデバレー校 Bao-Feng Feng

神戸大学理学研究科 太田 泰広

Shuntei Jo

School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

Ken-ichi Maruno

Faculty of Science and Engineering, Waseda University

Bao-Feng Feng

School of Mathematical and Statistical Sciences, The University of Texas Rio Grande Valley

Yasuhiro Ohta

Graduate School of Science, Kobe University

1 はじめに

自己適合移動格子スキームとは、特異性のある解を持つ可積分な非線形波動方程式に対して解構造を保つ離散化を行うことで得られた格子間隔が自動的に調節される構造保存型差分スキームである。WKI 型の Lax ペアを持つソリトン方程式はホドグラフ変換と呼ばれる座標変換によって AKNS 型の Lax ペアを持つソリトン方程式に変換されることが知られている [1]。自己適合移動格子スキーム構築の鍵はホドグラフ変換の離散化である。非線形波動方程式のホドグラフ変換には保存則が対応しているが、自己適合移動格子スキームにおいては離散ホドグラフ変換に対応する離散保存則の保存密度が格子間隔になる [2, 3]。保存密度を格子間隔にとることによって、急激に変位が変化するところで格子間隔が自動的に調節されるからくりとなっている。例えば short pulse (SP) 方程式 (短パルス方程式)

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx} \quad (1)$$

(u は x と t の 2 変数関数であり、 u_x は u の x に関する偏微分、 u_t は t に関する偏微分を表す) に対して自己適合移動格子スキームが提案され、それが数値計算法として有効であることが示された [2, 3]。SP 方程式は非線形媒質中を伝播する超短パルスの近似モデルとして Schäfer と Wayne によって発見された方程式である [4]。これまで様々な方程式で自己適合移動格子スキームは構成されているが、Hunter-Saxton 方程式などのカस्प型のソリトン解を持つ方程式に対しては自己適合移動格子スキームを用いた数値計算が成功していない。最近、カस्प型のソリトン解とブリーザー解を持つ modified short pulse (mSP) 方程式

$$u_{xt} = u + \frac{1}{2}u(u^2)_{xx} \quad (2)$$

が Sakovich によって提案され [5], さらに mSP 方程式を 2 成分拡張した 2 成分 mSP 方程式

$$\begin{cases} u_{xt} = u + \frac{1}{2}v(u^2)_{xx}, \\ v_{xt} = v + \frac{1}{2}u(v^2)_{xx} \end{cases} \quad (3)$$

が松野によって提案された [6]. 2 成分 mSP 方程式で u, v を複素関数とし, $v = u^*$ (u^* は u の複素共役) とすることで, 複素 mSP 方程式

$$u_{xt} = u + \frac{1}{2}u^*(u^2)_{xx} \quad (5)$$

が得られる. これを書きかえて

$$u_{xt} = u + (|u|^2 u_x)_x - u|u_x|^2 \quad (6)$$

の形にすることもできる.

本稿では, カスパ型ソリトン解を持つ mSP 方程式, 2 成分 mSP 方程式, 複素 mSP 方程式の可積分自己適合移動格子スキームの構成とそれを用いた数値計算について報告する.

2 mSP 方程式の自己適合移動格子スキーム

mSP 方程式

$$u_{xt} = u + \frac{1}{2}u(u^2)_{xx} \quad (7)$$

はホドグラフ変換

$$X = \int \frac{1}{\rho(x,t)} dx = x_0 + \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(\tilde{x},t)} d\tilde{x}, \quad T = t, \quad \frac{1}{\rho} = 1 + u_x^2 \quad (8)$$

あるいは

$$x = \int \rho(X,T) dX = X_0 + \int_{X_0}^X \rho(\tilde{X},T) d\tilde{X}, \quad t = T, \quad \rho = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - u_x^2} \quad (9)$$

の元で, 連立非分散方程式 (coupled dispersionless system)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X}(u^2) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = u(2\rho - 1) \end{cases} \quad (10)$$

と等価である. X_0 は積分定数であり左側の境界の位置である. 以下でこのことを確認してみよう.

mSP 方程式を保存則

$$(1 + u_x^2)_t - (u^2(1 + u_x^2))_x = 0 \quad (12)$$

に変形し, 保存密度を

$$\rho^{-1} = 1 + u_x^2 \quad (13)$$

とにおいてホドグラフ変換を

$$dX = \rho^{-1} dx + \rho^{-1} u^2 dt, \quad dT = dt, \quad (14)$$

と定める. この式から

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \rho^{-1}, \quad \frac{\partial X}{\partial t} = \rho^{-1} u^2, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

となり, 微分則

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} - u^2 \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial X} = \rho \frac{\partial}{\partial x} \quad (16)$$

が得られる。同じ微分則を与える (8) はホドグラフ変換の積分表示である。

次に mSP 方程式を

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - u^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u - uu_x^2 \quad (17)$$

に変形し、これに微分則 (16) を適用すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = u(2\rho - 1) \quad (18)$$

が得られる。一方、保存則を ρ で書き直したものに対して、同じように微分則を用いることで

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (u^2) = 0 \quad (19)$$

が得られ、これは X, T に関する保存則を与える。 ρ は保存密度、 u^2 は流束である。以上の手続きで得られた連立微分方程式系 (18), (19) は、連立非分散方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (u^2) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = u(2\rho - 1) \end{cases} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = u(2\rho - 1) \quad (21)$$

と呼ばれるソリトン方程式である。ホドグラフ変換

$$dx = \rho dX - u^2 dT, \quad dt = dT \quad (22)$$

を用いれば連立非分散方程式 (20), (21) から mSP 方程式 (7) を導くこともできる。(9) は (22) と同じ微分則を与えることから、(9) はホドグラフ変換の積分表示であることがわかる。

次に連立非分散方程式 (20), (21) は従属変数変換

$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial T}, \quad \rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi, \quad (23)$$

により、それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (u^2) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{2} \phi_T \right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi_{XT} = \sin \phi, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = u(2\rho - 1) &\Leftrightarrow \frac{\partial^3 \phi}{\partial X \partial T^2} = \phi_T \cos \phi \\ &\Leftrightarrow \phi_{XT} = \sin \phi \end{aligned} \quad (25)$$

となり、sine-Gordon 方程式に帰着する。従属変数変換

$$\phi = 2i \log \frac{F^*}{F} \quad (F: \text{複素関数}) \quad (26)$$

より、sine-Gordon 方程式の左辺、右辺を以下のように変形する:

$$\phi_X = \frac{\partial^2}{\partial X \partial T} \left(2i \log \frac{F^*}{F} \right) = i \left(\frac{D_X D_T F^* \cdot F^*}{F^{*2}} - \frac{D_X D_T F \cdot F}{F^2} \right), \quad (27)$$

$$\sin \phi = \sin \left(2i \log \frac{F^*}{F} \right) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = -\frac{i}{2} \left(\frac{F^2}{F^{*2}} - \frac{F^{*2}}{F^2} \right). \quad (28)$$

D_X と D_T は $D_X^m f \cdot g = (\partial_X - \partial_{X'})^m f(X) g(X')|_{X'=X}$ で定義される広田の D -演算子である。(27), (28) から

$$i \left(\frac{D_X D_T F^* \cdot F^*}{F^{*2}} - \frac{D_X D_T F \cdot F}{F^2} \right) = -\frac{i}{2} \left(\frac{F^2}{F^{*2}} - \frac{F^{*2}}{F^2} \right). \quad (29)$$

となり, これは

$$\frac{D_X D_T F^* \cdot F^*}{F^{*2}} = C - \frac{1}{2} \frac{F^2}{F^{*2}}, \quad (30)$$

$$\frac{D_X D_T F \cdot F}{F^2} = C - \frac{1}{2} \frac{F^{*2}}{F^2}. \quad (31)$$

と分離できる. ここで C は定数であるが, $C = \frac{1}{2}$ とすると (30), (31) は双線形形式

$$\begin{cases} D_X D_T F^* \cdot F^* = \frac{1}{2} (F^{*2} - F^2), \\ D_X D_T F \cdot F = \frac{1}{2} (F^2 - F^{*2}) \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} D_X D_T F^* \cdot F^* = \frac{1}{2} (F^{*2} - F^2), \\ D_X D_T F \cdot F = \frac{1}{2} (F^2 - F^{*2}) \end{cases} \quad (33)$$

に帰着する. mSP 方程式の解は双線形方程式 (32), (33) の解 F, F^* を用いて以下のように表される:

$$u = i \frac{\partial}{\partial T} \left(\log \frac{F^*}{F} \right), \quad (34)$$

$$x = \int \rho(X, T) dX = \int (1 - (\log FF^*)_{XT}) dX = X - (\log FF^*)_T, \quad t = T. \quad (35)$$

1-ソリトン解は

$$F = 1 + ie^\eta, \quad \eta = pX + \frac{1}{p}T + \eta_0 \quad (36)$$

と置けばよく,

$$u = \frac{1}{p} \operatorname{sech} \eta, \quad x = X - \frac{1}{p} e^\eta \operatorname{sech} \eta \quad (37)$$

となる.

Remark 1: 従属変数変換 $u = \frac{g}{f}, \rho = 1 - (\log f)_{XT}$ を用いると mSP 方程式は双線形形式

$$\begin{cases} D_T^2 f \cdot f = 2g^2, \\ D_X D_T g \cdot f = gf \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} D_T^2 f \cdot f = 2g^2, \\ D_X D_T g \cdot f = gf \end{cases} \quad (39)$$

に変換される.

双線形方程式 (32), (33) の空間変数 X についての離散化として以下の半離散双線形方程式を考える:

$$\begin{cases} \frac{2}{a} D_T F_{k+1}^* \cdot F_k^* = \frac{1}{2} (F_k^* F_{k+1}^* - F_k F_{k+1}), \\ \frac{2}{a} D_T F_{k+1} \cdot F_k = \frac{1}{2} (F_k F_{k+1} - F_k^* F_{k+1}^*). \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a} D_T F_{k+1}^* \cdot F_k^* = \frac{1}{2} (F_k^* F_{k+1}^* - F_k F_{k+1}), \\ \frac{2}{a} D_T F_{k+1} \cdot F_k = \frac{1}{2} (F_k F_{k+1} - F_k^* F_{k+1}^*). \end{cases} \quad (41)$$

ここで a は差分間隔である. この双線形方程式は N -ソリトン解を持つ. (40) の全体を $F_k^* F_{k+1}^*$ で割ると

$$\frac{2}{a} \left(\frac{(F_{k+1}^*)_T}{F_{k+1}^*} - \frac{(F_k^*)_T}{F_k^*} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{F_k F_{k+1}}{F_k^* F_{k+1}^*} \right) \quad (42)$$

となり, これを変形すると

$$\frac{4}{a} \left(\log \frac{F_{k+1}^*}{F_k^*} \right)_T - 1 = - \frac{F_k F_{k+1}}{F_k^* F_{k+1}^*} \quad (43)$$

が得られる. 同様にして (41) より

$$\frac{4}{a} \left(\log \frac{F_{k+1}}{F_k} \right)_T - 1 = - \frac{F_k^* F_{k+1}^*}{F_k F_{k+1}} \quad (44)$$

が得られる. (43) から (44) を引くと

$$\frac{1}{a} \left(2i \log \frac{F_{k+1}^*}{F_{k+1}} \right)_T - \frac{1}{a} \left(2i \log \frac{F_k^*}{F_k} \right)_T = \frac{i}{2} \left(\frac{F_{k+1}^* F_k^*}{F_{k+1} F_k} - \frac{F_{k+1} F_k}{F_{k+1}^* F_k^*} \right) \quad (45)$$

となる。ここで先ほど行った従属変数変換 (23) の離散化である離散従属変数変換

$$u_k = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_k}{\partial T}, \quad \rho_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\phi_{k+1} + \phi_k}{2}\right), \quad \phi_k = 2i \log \frac{F_k^*}{F_k} \quad (46)$$

を考える。(45)の右辺を変形すると

$$\frac{i}{2} \left(\frac{F_{k+1}^* F_k^*}{F_{k+1} F_k} - \frac{F_{k+1} F_k}{F_{k+1}^* F_k^*} \right) = \sin\left(i \log \frac{F_{k+1}^*}{F_{k+1}} + i \log \frac{F_k^*}{F_k}\right) = \sin\left(\frac{\phi_{k+1} + \phi_k}{2}\right) \quad (47)$$

となるので、(45)は半離散 sine-Gordon 方程式

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \phi_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial \phi_k}{\partial T} \right) = \sin\left(\frac{\phi_{k+1} + \phi_k}{2}\right) \quad (48)$$

となる。これを T で微分すると

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 \phi_{k+1}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial T^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_{k+1}}{\partial T} + \frac{\partial \phi_k}{\partial T} \right) \cos\left(\frac{\phi_{k+1} + \phi_k}{2}\right) \quad (49)$$

となり、従属変数変換 (46) によって u_k と ρ_k の方程式

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial u_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial u_k}{\partial T} \right) = \frac{u_{k+1} + u_k}{2} (2\rho_k - 1) \quad (50)$$

が得られる。(46)より

$$\rho_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(i \log \frac{F_{k+1}^*}{F_{k+1}} + i \log \frac{F_k^*}{F_k}\right) \quad (51)$$

であることがわかるが、これを T で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k}{\partial T} &= -\frac{1}{2} \left(\left(i \log \frac{F_{k+1}^*}{F_{k+1}} \right)_T + \left(i \log \frac{F_k^*}{F_k} \right)_T \right) \sin\left(i \log \frac{F_{k+1}^*}{F_{k+1}} + i \log \frac{F_k^*}{F_k}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\left(i \log \frac{F_{k+1}^*}{F_{k+1}} \right)_T + \left(i \log \frac{F_k^*}{F_k} \right)_T \right) \left(\frac{1}{a} \left(2i \log \frac{F_{k+1}^*}{F_{k+1}} \right)_T - \frac{1}{a} \left(2i \log \frac{F_k^*}{F_k} \right)_T \right) \\ &= -\frac{u_{k+1}^2 - u_k^2}{a} \end{aligned} \quad (52)$$

となり、 ρ_k の時間発展方程式が得られる。連立微差分方程式系 (50), (52) は半離散連立非分散方程式

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial_T u_{k+1} - \partial_T u_k}{a} &= \frac{u_{k+1} + u_k}{2} (2\rho_k - 1), \\ \frac{\partial \rho_k}{\partial T} &= -\frac{u_{k+1}^2 - u_k^2}{a} \end{aligned} \right. \quad (53)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial_T u_{k+1} - \partial_T u_k}{a} &= \frac{u_{k+1} + u_k}{2} (2\rho_k - 1), \\ \frac{\partial \rho_k}{\partial T} &= -\frac{u_{k+1}^2 - u_k^2}{a} \end{aligned} \right. \quad (54)$$

である。最後にホドグラフ変換の離散化

$$x = X_0 + \int_{X_0}^x \rho(\tilde{X}, T) d\tilde{X} \Rightarrow x_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a \rho_j \quad k = 1, 2, \dots \quad (55)$$

を行う。ここで X_0 は左側境界である。また、 $\rho_k \equiv \rho(X_k, T)$ はパラメトリック座標 $T, X_k = X_0 + ak$ での ρ の値である。このとき、格子間隔

$$\delta_k := x_{k+1} - x_k \quad (56)$$

を導入すると、離散ホドグラフ変換から関係式

$$\delta_k = a \rho_k \quad (57)$$

が成り立つことがわかる。(57)を用いて半離散連立非分散方程式(53), (54)における ρ_k を δ_k におきかえると mSP 方程式の自己適合移動格子スキーム

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial u_k}{\partial T} = \frac{u_{k+1} + u_k}{2} (2\delta_k - a), & (58) \\ \frac{\partial \delta_k}{\partial T} = -(u_{k+1}^2 - u_k^2) & (59) \end{cases}$$

が得られる. mSP 方程式の自己適合移動格子スキームにおいて格子間隔 δ_k は空間離散の保存則(59)の保存密度になっている. このことから mSP 方程式の自己適合移動格子スキームは以下の性質を持つことがわかる:

1. $u_k^2 - u_{k+1}^2 < 0$ の時, すなわち流束 u_k^2 と u_{k+1}^2 の間の傾きが正の時, 格子間隔 δ_k は減少する.
2. $u_k^2 - u_{k+1}^2 > 0$ の時, すなわち流束 u_k^2 と u_{k+1}^2 の間の傾きが負の時, 格子間隔 δ_k は増大する.

Remark 2: 双線形方程式(38), (39)の空間離散化

$$\begin{cases} D_T^2 f_k \cdot f_k = 2g_k^2, & (60) \\ \frac{1}{a} D_T (g_{k+1} \cdot f_k - g_k \cdot f_{k+1}) = \frac{1}{2} (g_k f_{k+1} + g_{k+1} f_k) & (61) \end{cases}$$

を用いても全く同じ自己適合移動格子スキームを構築することができる. この方法は多成分 mSP 方程式の自己適合移動格子スキームを構築する場合にも適用できる. 第4章ではこちらの方法を用いて2成分 mSP 方程式の自己適合移動格子スキームの構築を行う.

3 自己適合移動格子スキームを用いた mSP 方程式の数値計算

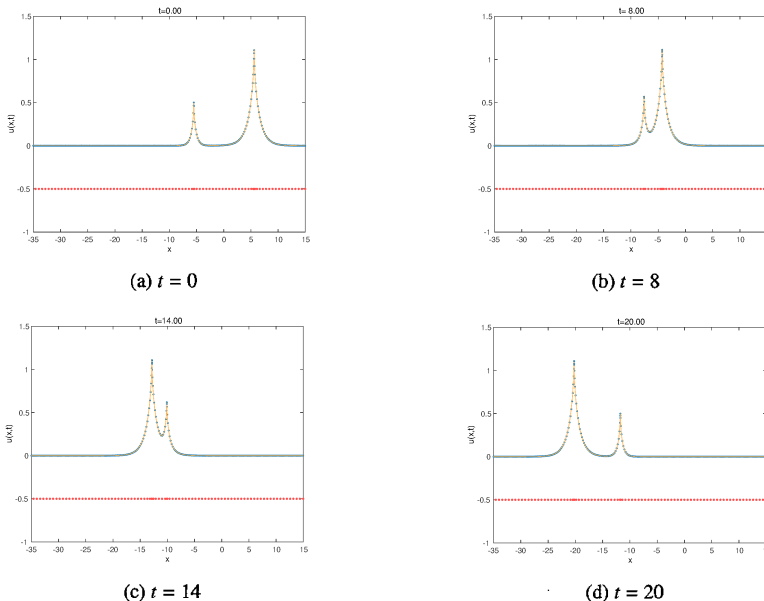


図 1: mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. パラメータは $p_1 = 2$, $p_2 = 0.9$. $t = 20$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\max_{\text{err}} = 7.34 \times 10^{-3}$.

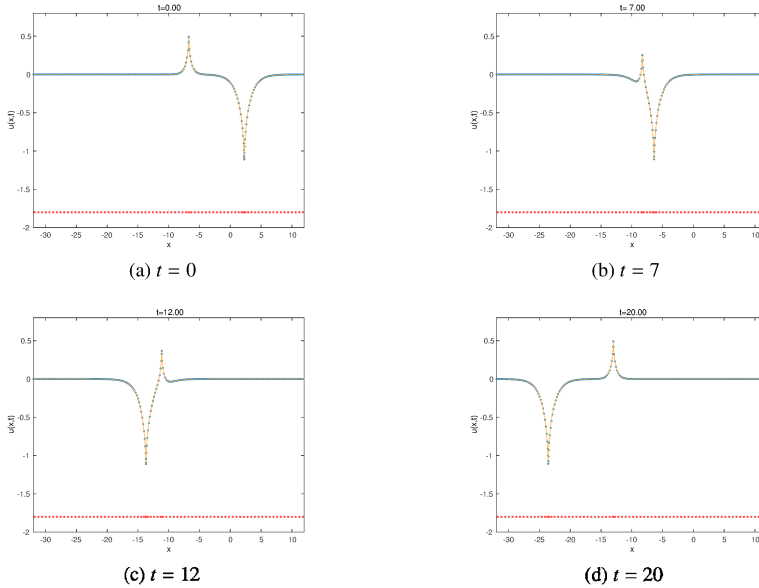


図 2: mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. パラメータは $p_1 = 2$, $p_2 = -0.9$. $t = 20$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\text{maxerr} = 7.40 \times 10^{-3}$.

mSP 方程式の自己適合移動格子スキーム (58), (59) を用いた数値計算例を示す. 時間発展解法には修正オイラー法を用い, 初期値として以下の mSP 方程式の 2-ソリトン解を与えた:

$$u = i \left(\log \frac{F^*}{F} \right)_T, \quad x = X - (\log FF^*)_T, \quad t = T, \quad (62)$$

$$F = 1 + ie^{\eta_1} + ie^{\eta_2} - \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 e^{\eta_1 + \eta_2}, \quad (63)$$

$$\eta_j = p_j X + \frac{1}{p_j} T + \eta_j^0, \quad j = 1, 2. \quad (64)$$

これは, p_1, p_2 が実の時は 2-カuspソリトン解となり, p_1 が複素数で p_2 が p_1 の複素共役の時にブリーザー解になる.

以下の数値計算では, 格子点の数を $N = 8000$, 空間の刻み幅を $a = 0.01$, 修正オイラー法の時間刻み幅を $\Delta t = 0.0001$ とした. 点線が数値解, 実線が厳密解, 赤の点はメッシュの分布を示す. 図 1, 図 2, 図 3 に mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算結果を示す. 図 1 は 2-カuspソリトンの場合, 図 2 は正のカuspソリトンと負のカuspソリトンの場合, 図 3 は mSP 方程式のブリーザーの場合である. 数値解が最も大きく変化しているところでの誤差を調べるため, 最大振幅周辺での最大相対誤差 maxerr を次式で評価する:

$$\text{maxerr} := \max_k \left| \frac{u_k^E - u_k^N}{u_k^E} \right| \quad \text{for } k \text{ such that } u_k > \max_k(u_k) \times 0.9.$$

ここで u^N は数値解, u^E は厳密解とする.

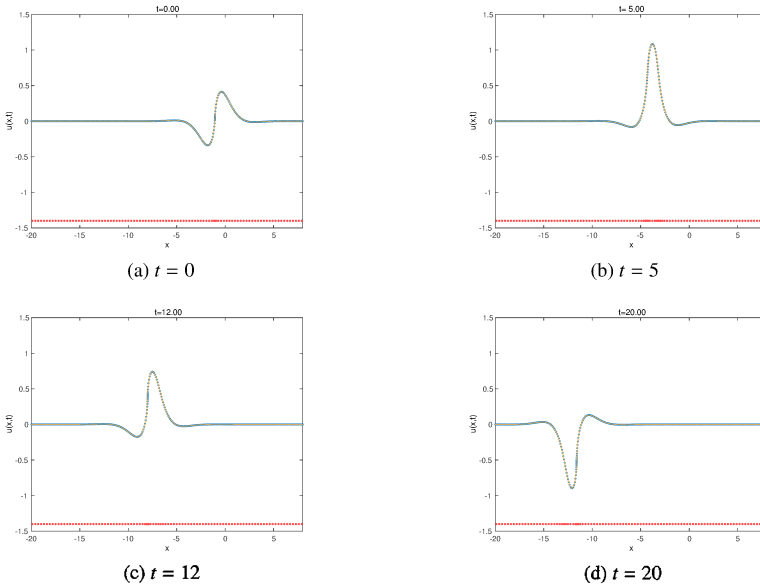


図 3: mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. パラメータは $p_1 = 0.999 + 0.9i$, $p_2 = 0.999 - 0.9i$ (ブリーザー解の場合). $t = 20$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\maxerr = 4.82 \times 10^{-3}$.

4 2成分 mSP 方程式と複素 mSP 方程式の自己適合移動格子スキーム

次に, mSP 方程式を 2 成分拡張した 2 成分 mSP 方程式

$$\begin{cases} u_{xt} = u + \frac{1}{2}v(u^2)_{xx}, \\ v_{xt} = v + \frac{1}{2}u(v^2)_{xx} \end{cases} \quad (65)$$

$$\quad (66)$$

を考えよう. u, v を複素関数として, $v = u^*$ (u^* は u の複素共役) とすれば, 複素 SP 方程式

$$u_{xt} = u + \frac{1}{2}u^*(u^2)_{xx} \quad (67)$$

が得られる. 複素 SP 方程式は

$$u_{xt} = u + (|u|^2 u_x)_x - |u|u_x|^2 \quad (68)$$

と書くこともできる.

2 成分 mSP 方程式 (65), (66) はホドグラフ変換

$$X = \int \frac{1}{\rho(x,t)} dx = x_0 + \int_{x_0}^x \frac{1}{\rho(\bar{x},t)} d\bar{x}, \quad T = t, \quad \frac{1}{\rho} = 1 + u_x v_x \quad (69)$$

あるいは

$$x = \int \rho(X,T) dX, \quad t = T, \quad \rho = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - u_X v_X} \quad (70)$$

の元で、2成分連立非分散方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X}(uv) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = u(2\rho - 1), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial T} = v(2\rho - 1) \end{array} \right. \quad (71)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = u(2\rho - 1), \quad (72)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial T} = v(2\rho - 1) \quad (73)$$

と等価である。このことを以下の示す。

2成分 mSP 方程式 (72), (73) を足し合わせると

$$(1 + u_x v_x)_t - (uv(1 + u_x v_x))_x = 0 \quad (74)$$

となる。この式からホドグラフ変換

$$dX = \rho^{-1} dx + \rho^{-1} uv dt, \quad dT = dt, \quad \rho^{-1} = 1 + u_x v_x \quad (75)$$

を考える。これから

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \rho^{-1}, \quad \frac{\partial X}{\partial t} = \rho^{-1} uv, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (76)$$

となり、微分則

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t} - uv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial X} = \rho \frac{\partial}{\partial x} \quad (77)$$

が得られる。同じ微分則を与える (69) はホドグラフ変換の積分表示である。

2成分 mSP 方程式 (72), (74) を

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - uv \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u - uu_x v_x, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - uv \frac{\partial}{\partial x} \right) v = v - vu_x v_x \end{array} \right. \quad (78)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - uv \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u - uu_x v_x, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - uv \frac{\partial}{\partial x} \right) v = v - vu_x v_x \end{array} \right. \quad (79)$$

に変形し、微分則 (77) から

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = (2\rho - 1)u, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial T} = (2\rho - 1)v \end{array} \right. \quad (80)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial T} = (2\rho - 1)v \quad (81)$$

が得られる。一方、保存則 (74) を ρ で書き直したものに対して、同じように微分則 (77) を用いることで

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X}(uv) = 0 \quad (82)$$

となり、2成分連立非分散方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X}(uv) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = (2\rho - 1)u, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial T} = (2\rho - 1)v \end{array} \right. \quad (83)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = (2\rho - 1)u, \quad (84)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial T} = (2\rho - 1)v \quad (85)$$

が得られる。ホドグラフ変換

$$dx = \rho dX - uv dT, \quad dt = dT \quad (86)$$

を用いれば、2成分連立非分散方程式から2成分 SP 方程式を導くこともできる。(70) は (86) と同じ微分則を与えることから、(70) はホドグラフ変換の積分表示であることがわかる。

ここで従属変数変換

$$u = \frac{g}{f}, \quad v = \frac{h}{f}, \quad \rho = 1 - (\log f)_{XT} \quad (87)$$

を2成分連立非分散方程式 (83), (84), (85) に適用すると, 双線形形式

$$\begin{cases} D_T^2 f \cdot f = 2gh, & (88) \\ D_X D_T g \cdot f = gf, & (89) \\ D_X D_T h \cdot f = hf & (90) \end{cases}$$

が得られる. この双線形方程式は N -ソリトン解を持つ.

この双線形方程式の空間変数 X を以下のように離散化する:

$$\begin{cases} D_T^2 f_k \cdot f_k = 2g_k h_k, & (91) \\ \frac{1}{a} D_T (g_{k+1} \cdot f_k - g_k \cdot f_{k+1}) = \frac{1}{2} (g_k f_{k+1} + g_{k+1} f_k), & (92) \\ \frac{1}{a} D_T (h_{k+1} \cdot f_k - h_k \cdot f_{k+1}) = \frac{1}{2} (h_k f_{k+1} + h_{k+1} f_k). & (93) \end{cases}$$

ここで a は差分間隔である. この半離散双線形方程式も N -ソリトン解を持つ. ここで先ほど行った従属変数変換 (87) の離散化である離散従属変数変換

$$u_k = \frac{g_k}{f_k}, \quad v_k = \frac{h_k}{f_k}, \quad \rho_k = 1 - \frac{1}{a} \left(\log \frac{f_{k+1}}{f_k} \right)_T \quad (94)$$

を用いる. (91) から

$$(\log f_k)_{TT} = u_k v_k \quad (95)$$

が得られ, これより

$$\begin{aligned} & (\log f_{k+1} - \log f_k)_{TT} = u_{k+1} v_{k+1} - u_k v_k \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{a} \log \left(\frac{f_{k+1}}{f_k} \right)_{TT} = -\frac{u_{k+1} v_{k+1} - u_k v_k}{a} \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \rho_k}{\partial T} = -\frac{u_{k+1} v_{k+1} - u_k v_k}{a} \end{aligned} \quad (96)$$

となり, ρ_k の時間発展方程式が得られる. 次に (92) を以下のように変形する:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} D_T (g_{k+1} \cdot f_k - g_k \cdot f_{k+1}) = \frac{1}{2} (g_k f_{k+1} + g_{k+1} f_k) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a} \frac{\partial g_{k+1}}{\partial T} f_k - g_{k+1} \frac{\partial f_k}{\partial T} - \frac{\partial g_k}{\partial T} f_{k+1} + g_k \frac{\partial f_{k+1}}{\partial T} = \frac{1}{2} \frac{g_k f_{k+1} + g_{k+1} f_k}{f_k f_{k+1}} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a} \left(\frac{\partial g_{k+1}}{\partial T} - \frac{g_{k+1}}{f_{k+1}} \frac{\partial f_{k+1}}{\partial T} + \frac{g_{k+1}}{f_{k+1}^2} \frac{\partial f_{k+1}}{\partial T} - \frac{g_{k+1}}{f_k f_{k+1}} \frac{\partial f_k}{\partial T} - \frac{\partial g_k}{\partial T} + \frac{g_k}{f_k} \frac{\partial f_k}{\partial T} - \frac{g_k}{f_k^2} \frac{\partial f_k}{\partial T} + \frac{g_k}{f_k f_{k+1}} \frac{\partial f_{k+1}}{\partial T} \right) = \frac{u_k + u_{k+1}}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u_{k+1}}{\partial T} + u_{k+1} \left(\log \frac{f_{k+1}}{f_k} \right)_T - \frac{\partial u_k}{\partial T} + u_k \left(\log \frac{f_{k+1}}{f_k} \right)_T \right) = \frac{u_k + u_{k+1}}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial u_k}{\partial T} \right) = \frac{u_k + u_{k+1}}{2} - \frac{u_k + u_{k+1}}{a} \left(\log \frac{f_{k+1}}{f_k} \right)_T \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial u_k}{\partial T} \right) = (2\rho_k - 1) \frac{u_k + u_{k+1}}{2} \end{aligned} \quad (98)$$

よって u_k の時間発展方程式が得られる. (93) に対して同様の計算を行うと v_k の時間発展方程式

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial v_k}{\partial T} \right) = (2\rho_k - 1) \frac{v_k + v_{k+1}}{2} \quad (99)$$

が得られる。(96), (98), (99) は半離散 2 成分連立非分散方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_k}{\partial T} = -\frac{u_{k+1}v_{k+1} - u_k v_k}{a}, \end{array} \right. \quad (100)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial u_k}{\partial T} \right) = (2\rho_k - 1) \frac{u_k + u_{k+1}}{2}, \end{array} \right. \quad (101)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial v_k}{\partial T} \right) = (2\rho_k - 1) \frac{v_k + v_{k+1}}{2} \end{array} \right. \quad (102)$$

を与える。最後に離散ホドグラフ変換と格子間隔

$$x_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a\rho_j, \quad \delta_k := x_{k+1} - x_k \quad (103)$$

を導入することで、自己適合移動格子スキーム

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta_k}{\partial T} = -(u_{k+1}v_{k+1} - u_k v_k), \end{array} \right. \quad (104)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial u_k}{\partial T} = (2\delta_k - a) \frac{u_{k+1} + u_k}{2}, \end{array} \right. \quad (105)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial v_k}{\partial T} = (2\delta_k - a) \frac{v_{k+1} + v_k}{2} \end{array} \right. \quad (106)$$

が導かれる。 $v_k = u_k^*$ と置くことで複素 mSP 方程式の自己適合移動格子スキーム

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta_k}{\partial T} = -(|u_{k+1}|^2 - |u_k|^2), \end{array} \right. \quad (107)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial T} - \frac{\partial u_k}{\partial T} = (2\delta_k - a) \frac{u_{k+1} + u_k}{2} \end{array} \right. \quad (108)$$

が得られる。

5 自己適合移動格子スキームを用いた2成分 mSP 方程式と複素 mSP 方程式の数値計算

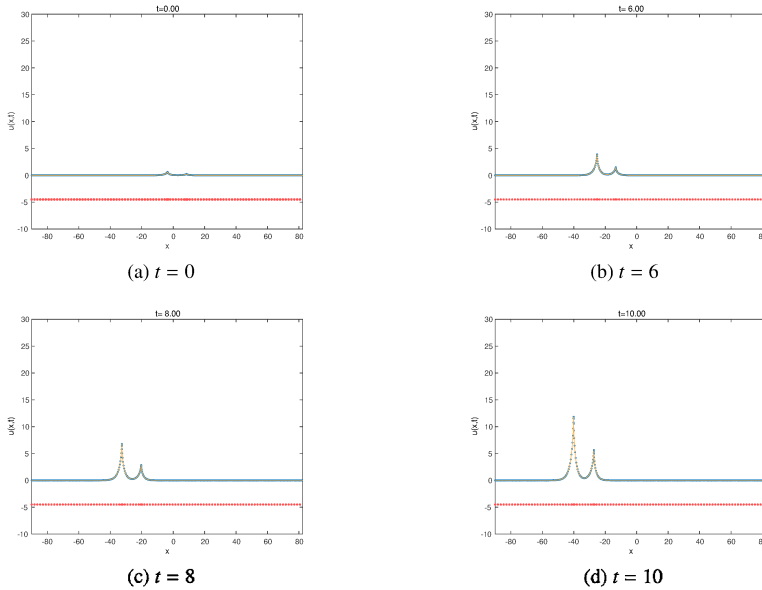


図 4: 2 成分 mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. u のグラフ. パラメータは $p_1 = 0.95, p_2 = 1, p_3 = 1.1, p_4 = 1.2, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 10, a_4 = 20$. $t = 10$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\max_{\text{err}} = 5.95 \times 10^{-3}$.

2 成分 mSP 方程式の自己適合移動格子スキーム (104) (105), (106) を用いた数値計算例と複素 mSP 方程式の自己適合移動格子スキーム (107), (108) を用いた数値計算例を示す. 時間発展解法は修正オイラー法を用い, 初期値として以下の 2 成分 mSP 方程式の 2-ソリトン解を与えた:

$$u = \frac{g}{f}, \quad v = \frac{h}{f}, \quad x = X - (\log f)_T, \quad t = T, \quad (109)$$

$$f = 1 + \frac{a_1 a_3}{4} b_{13} e^{\eta_1 + \eta_3} + \frac{a_2 a_3}{4} b_{23} e^{\eta_2 + \eta_3} + \frac{a_1 a_4}{4} b_{14} e^{\eta_1 + \eta_4} + \frac{a_2 a_4}{4} b_{24} e^{\eta_2 + \eta_4} + \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{16} (p_1 - p_2)^2 (p_3 - p_4)^2 \frac{b_{13} b_{23} b_{14} b_{24}}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2} e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4}, \quad (110)$$

$$g = a_1 e^{\eta_1} + a_2 e^{\eta_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{4} (p_1 - p_2)^2 \frac{b_{13} b_{23}}{p_1^2 p_2^2} e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} + \frac{a_1 a_2 a_4}{4} (p_1 - p_2)^2 \frac{b_{14} b_{24}}{p_1^2 p_2^2} e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_4}, \quad (111)$$

$$h = a_3 e^{\eta_3} + a_4 e^{\eta_4} + \frac{a_1 a_3 a_4}{4} (p_3 - p_4)^2 \frac{b_{13} b_{14}}{p_3^2 p_4^2} e^{\eta_1 + \eta_3 + \eta_4} + \frac{a_2 a_3 a_4}{4} (p_3 - p_4)^2 \frac{b_{23} b_{24}}{p_3^2 p_4^2} e^{\eta_2 + \eta_3 + \eta_4}, \quad (112)$$

$$\eta_j = \frac{p_j}{2} X + \frac{2}{p_j} T, \quad b_{jl} = \left(\frac{p_j p_l}{p_j + p_l} \right)^2, \quad j, l = 1, 2, 3, 4. \quad (113)$$

以下の数値計算では, 格子点の数を $N = 8000$, 空間の刻み幅を $a = 0.0225$, 修正オイラー法での時間刻み幅を $\Delta t = 0.0001$ とした. 点線が数値計算, 実線が厳密解, 赤の点はメッシュの分布を示す. 図 4, 図 5, 図 6,

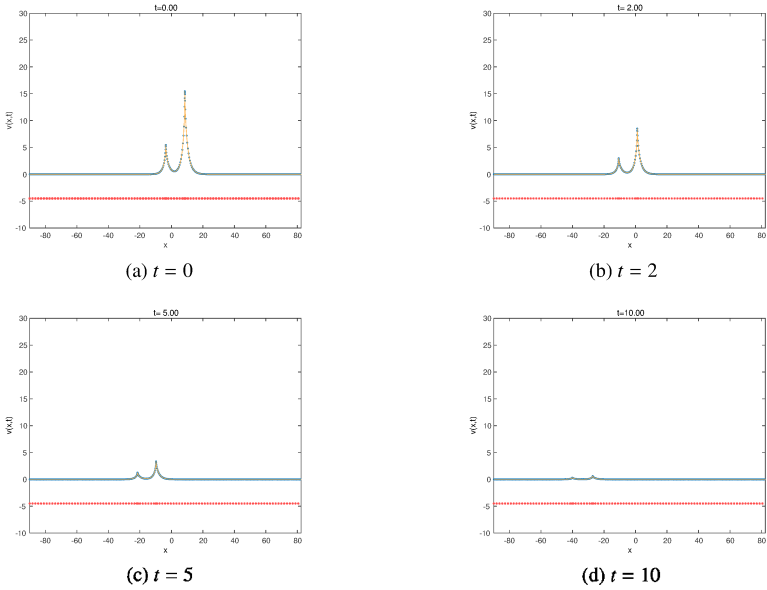


図 5: 2 成分 mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. v のグラフ. パラメータは $p_1 = 0.95$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1.1$, $p_4 = 1.2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 10$, $a_4 = 20$. $t = 10$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\text{maxerr} = 3.39 \times 10^{-3}$.

図 7 に 2 成分 mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算結果を示す. 複素 SP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算結果を図 8, 図 9, 図 10 に示す. それぞれ $|u|$, u の実部, u の虚部をプロットしたものである. 誤差評価には mSP 方程式の数値計算で用いた maxerr を用いた.

6 まとめ

本稿では, カスプソリトン解を持つ mSP 方程式, 2 成分 mSP 方程式, 複素 mSP 方程式の自己適合移動格子スキームを構築した. 自己適合移動格子スキームを用いることでこれまで数値計算が困難であったカスプソリトン解に対して数値計算ができることを示した.

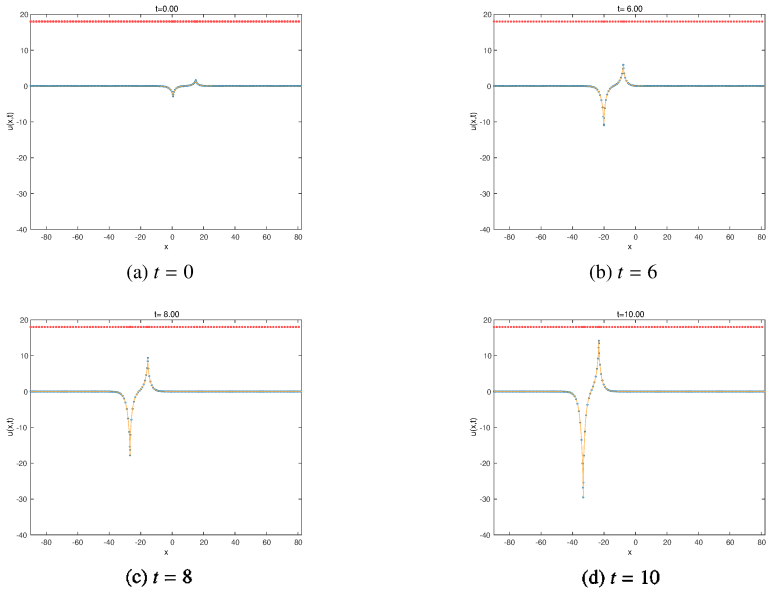


図 6: 2 成分 mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. u のグラフ. パラメータは $p_1 = 0.98, p_2 = 1, p_3 = 1.1, p_4 = 1.122, a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -4$. $t = 10$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\text{maxerr} = 4.75 \times 10^{-3}$.

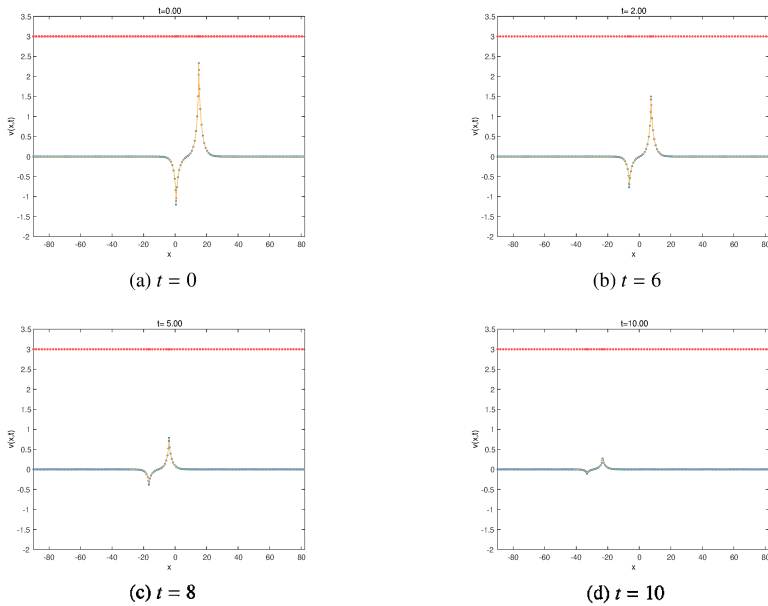


図 7: 2 成分 mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. v のグラフ. パラメータは $p_1 = 0.98, p_2 = 1, p_3 = 1.1, p_4 = 1.122, a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -4$. $t = 10$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\text{maxerr} = 4.42 \times 10^{-3}$.

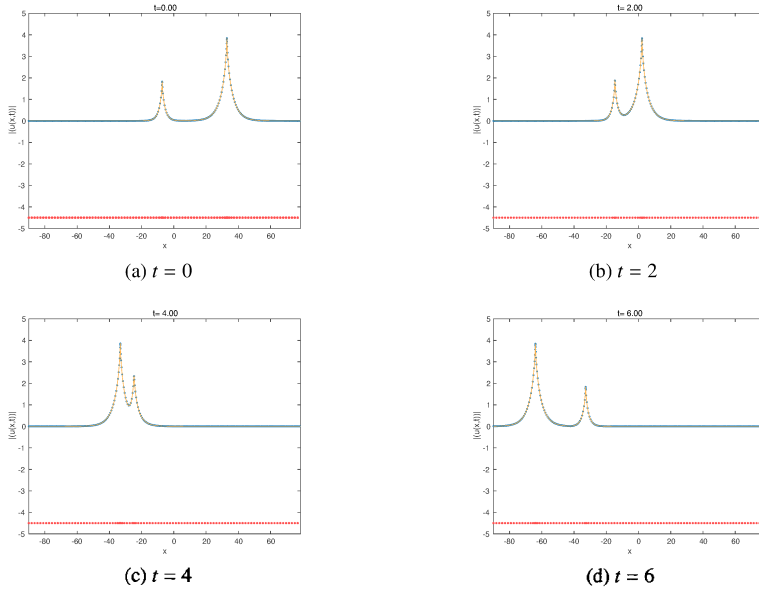


図 8: 複素 mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. $|u|$ のグラフ. パラメータは $p_1 = 0.5 + 0.1i$, $p_2 = 1 + 0.3i$, $p_3 = p_1^*$, $p_4 = p_2^*$, $a_1 = a_3 = \exp(-6)$, $a_2 = a_4 = \exp(4)$. $t = 6$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\text{maxerr} = 8.34 \times 10^{-3}$.

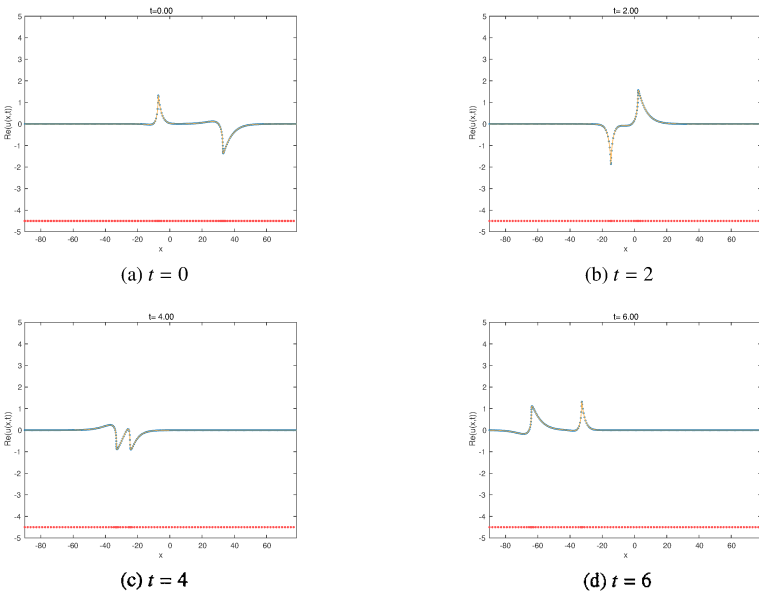


図 9: 複素 mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. $\text{Re } u$ のグラフ. パラメータは $p_1 = 0.5 + 0.1i$, $p_2 = 1 + 0.3i$, $p_3 = p_1^*$, $p_4 = p_2^*$, $a_1 = a_3 = \exp(-6)$, $a_2 = a_4 = \exp(4)$. $t = 6$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\text{maxerr} = 8.69 \times 10^{-3}$.

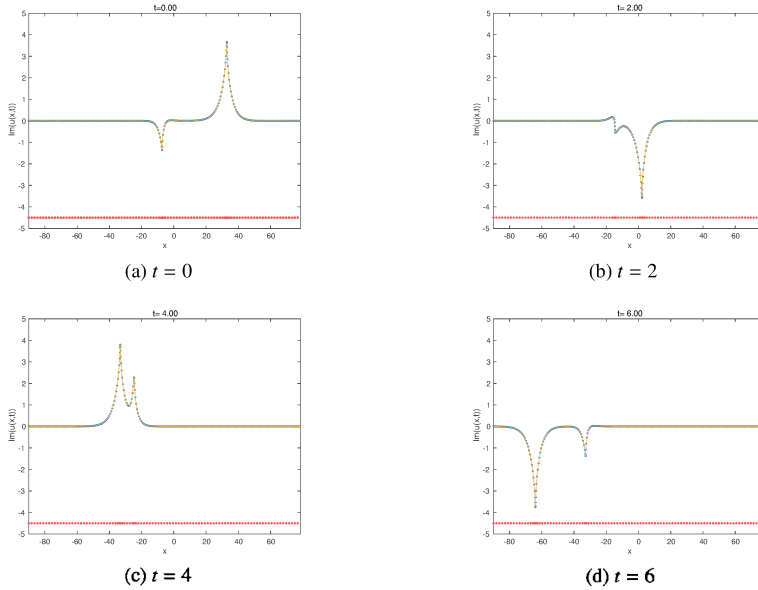


図 10: 複素 mSP 方程式の 2-ソリトン解を初期値として与えた場合の数値計算. $\text{Im } u$ のグラフ. パラメータは $p_1 = 0.5 + 0.1i$, $p_2 = 1 + 0.3i$, $p_3 = p_1^*$, $p_4 = p_2^*$, $a_1 = a_3 = \exp(-6)$, $a_2 = a_4 = \exp(4)$. $t = 6$ における最大振幅周辺での最大相対誤差 $\text{maxerr} = 7.57 \times 10^{-3}$.

参考文献

- [1] Y. Ishimori, A relationship between the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur and Wadati-Konno-Ichikawa schemes of the inverse scattering method, J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 3036-3041.
- [2] B-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, Integrable discretizations of the short pulse equation, J. Phys. A Math. Theor. 43 (2010) 085203.
- [3] B-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, Self-adaptive moving mesh schemes for short pulse type equations and their Lax pairs, Pacific J. Math. for Industry 6 (2014) 1-14.
- [4] T. Schäfer and C. E. Wayne, Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media, Physica D 196 (2004) 90-105.
- [5] S. Sakovich, Transformation and integrability of a generalized short pulse equation, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 39 (2016) 21-28.
- [6] Y. Matsuno, Integrable multi-component generalization of a modified short pulse equation, J. Math. Phys. 57.11 (2016) 111507.