数理解析研究所講究録
第2035巻 2017年 21-34

積と値域に関する情報をもつ $C_0(X), C_0(Y)$ 間の写像について

長岡工業高等専門学校　冨樫（新藤）瑠美

Rumi Shindo Togashi

National Institute of Technology, Nagaoka College

Acknowledgement. 本研究は、新潟大学の三浦毅先生からご紹介いただいた研究課題がきっかけとなっています。また、証明の一部は新潟大学の羽鳥理先生のご助言から得られたものです。この他にも、お二人には研究内容について様々なご助言をいただきました。お二人に心より感謝申し上げます。

1. はじめに

２つの Banach 環の間に定義された写像に関する研究、または写像を通して２つの Banach 環の関係を探る研究が古くから行われており、その中の一つとして preserver problem と呼ばれる種類の問題がある。preserver problem とは、Jarosz の論文 [5] によると以下のような問題のことである。

Preserver Problem. Let T be a map between two Banach algebras and assume that T preserves a given class of elements of the algebras. Does it follow that T is a Jordan morphism or that it preserves some other properties?

本研究は、この preserver problem に関連したものである。その中でも特に以下の Molnár による結果がこの研究内容を更に発展させたきっかけの一つとなっている。

Theorem 1.1 (Molnár [9]). *Let $C(X)$ be the algebra of all continuous complex-valued functions on the compact Hausdorff space X and $\sigma(f)$ be the spectrum of $f \in C(X)$. If X is first countable and $T : C(X) \to C(X)$ is a surjection with the property that*

$$\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg) \ (f, g \in C(X)),$$

then there exist a homeomorphism $\phi : X \to X$ and a continuous function $\alpha : X \to \{1, -1\}$ such that

$$T(f)(x) = \alpha(x)f(\phi(x)) \ (f \in C(X), x \in X).$$

ここで、Theorem 1.1 では仮定に線形性が含まれていないことに着目してもらいたい。これより以前に扱われていた preserver problem の多くは線形性を前提条件として議論されていた。しかし、この結果では線形性や乗法性を仮定せず、「積のスペクトル（この場合は関数の値域と一致する）を保存する全射」という仮定のみからその写像の構造を決定している。更に、得られた写像の構造から積のスペクトルを保存する写像は乗法的でかつ線形な荷重合成作用素であることがわかる。この結果は多くの研究者によって一般化され、さまざまな結果が発表されている。そのいくつかを抜粋して紹介する。

なお、本稿では以下の記号と定義を用いることとする。

Definition 1.

(1) $C(X)$: the space of all complex-valued continuous functions on a compact Hausdorff space X

(2) A complex function f on a locally compact Hausdorff space X vanishes at infinity

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ to every $\varepsilon > 0$ there exists a compact set $K \subset X$ such that $|f(x)| < \varepsilon$ for all x not in K

$C_0(X)$: the space of all complex-valued continuous functions on a locally compact Hausdorff space X that vanish at infinity

(3) $f \in C_0(X)$,

$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x)|$

$\sigma_\pi(f) \overset{\text{def}}{=} \{f(x_0) : x_0 \in X \text{ such that } |f(x_0)| = \|f\|\}$

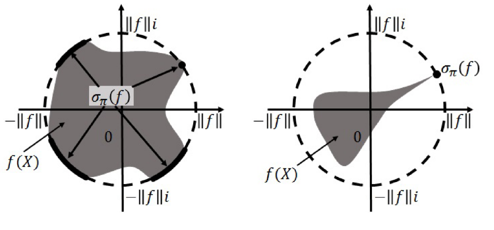

FIGURE 1. $\sigma_\pi(f), \|f\|$ のイメージ

(4) A: a uniform algebra on X $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(a) A is a closed subalgebra of $C(X)$

(b) A contains the constant functions

(c) for every $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, there exists an $f \in A$ such that $f(x_1) \neq f(x_2)$

(5) A: a function algebra on $X \overset{\text{def}}{\iff}$

(a) A is a closed subalgebra of $C_0(X)$

(b) for every $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, there exists an $f \in A$ such that $f(x_1) \neq f(x_2)$

Theorem 1.2 (Rao and Roy [11]). *Let A be a function algebra and $\sigma(f) \overset{\text{def}}{=} f(X) \cup \{0\}$ for $f \in A$. Assume that X is the maximal ideal space of A. If $T : A \to A$ is a surjection with the property that $\sigma(T(f)T(g)) = \sigma(fg)$ for every pair of functions $f, g \in A$, then there exist a homeomorphism $\phi : X \to X$ and a signum function $\alpha : X \to \{1, -1\}$ such that $T(f)(x) = \alpha(x)f(\phi(x))$ for all $f \in A$ and $x \in X$.*

Theorem 1.3 (Luttman and Tonev [7]). *Let A, B be uniform algebras and $Ch(A)$ be the Choquet boundary of A. If a surjective and unital operator $T : A \to B$ satisfies the condition $\sigma_\pi(T(f)T(g)) = \sigma_\pi(fg)$ for all $f, g \in A$, then there exists a homeomorphism $\phi : Ch(B) \to Ch(A)$ such that the equality $T(f)(y) = f(\phi(y))$ holds for all $f \in A$ and $y \in Ch(B)$.*

Theorem 1.4 (Hatori, Miura and Takagi [2]). *Let A, B be uniform algebras, $Ch(A)$ be the Choquet boundary of A, and T be a map from A onto B. If $\|T(f)T(g)\| = \|fg\|$ for all $f, g \in A$, then there exists a homeomorphism $\phi : Ch(B) \to Ch(A)$ such that $|T(f)(y)| = |f(\phi(y))|$ for all $f \in A$ and $y \in Ch(B)$.*

Theorem 1.5 (Lambert, Luttman and Tonev [6]). *Let A and B be uniform algebras. If a mapping $T : A \to B$ satisfies the conditions*

(1) *$\{h \in B : \sigma_\pi(h) = \{1\}\} = T(1) \cdot T(\{u \in A : \sigma_\pi(u) = \{1\}\})$ and*

(2) *$\sigma_\pi(T(f)T(g)) \cap \sigma_\pi(fg) \neq \emptyset$ for all $f, g \in A$,*

then there exists an isometric algebra isomorphism $S : A \to B$, such that $T(f) = T(1)S(f)$ for all $f \in A$.

Theorem 1.6 (Hatori, Miura and Takagi [2], Luttman and Lambert [8]). *Let A, B be uniform algebras and $Ch(A)$ be the Choquet boundary of A. If $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and $T : A \to B$ is a surjection satisfying $\|T(f)T(g) - \lambda\| = \|fg - \lambda\|$ for all $f, g \in A$, then there exist a homeomorphism $\phi : Ch(B) \to Ch(A)$, a continuous function $\alpha : Ch(B) \to \{1, -1\}$, and a clopen set $K \subset Ch(B)$ such that*

$$T(f)(y) = \alpha(y) \times \begin{cases} f(\phi(y)) & y \in K \\ \frac{\lambda}{|\lambda|}\overline{f(\phi(y))} & y \in Ch(B) \setminus K \end{cases}$$

holds for all $f \in A$ and $y \in Ch(B)$.

ここで紹介した結果は、それぞれ Theorem 1.1 を一般化することで得られる結果であるが、大きく分けて２つの一般化の方向があることが見えてくる。一つは保存するスペクトルや値域の中で十分条件として本質的でない部分をそぎ落とすことで一般化を行っており、もう一つはスペクトルや値域に含まれる点とある点との距離の最大値を用いて条件を設定することで一般化を行っている。前者で用いられている集合は複素数値の集合であり、必ずしも１点集合とは限らない。それに対して後者で用いられている条件式は各２つの要素についてただ１つの実数値が定まる。しかし、それぞれの一般化で得られる写像の構造はすべて荷重合成作用素に関連したものとなっている。そこで著者はこの２つの間にある条件が存在するか吟味し、これらの一般化の「境界にある条件」を発見することを目標として研究を行っているが、その結論は未だ得られていない。本稿ではこの過程において得られた結果を紹介する。

2. 条件で使用されている値や集合とその関係性について

現在、uniform algebras A, B の間に定義された写像 $T : A \to B$ についてはかなり多くの結果が発表されている。下の図はその中から Molnár [9], Hatori, Miura and Takagi [1, 2], Luttman and Tonev [7], Lambert, Luttman and Tonev [6], Hatori, Lambert, Luttman, Miura, Tonev and Yates [4] によって得られた結果を抜粋し、それらの条件式の関係性を図に示したものである。ここで $\Longrightarrow$ は必要または十分条件を示す矢印である。また、破線の矢印は未解決な部分である。

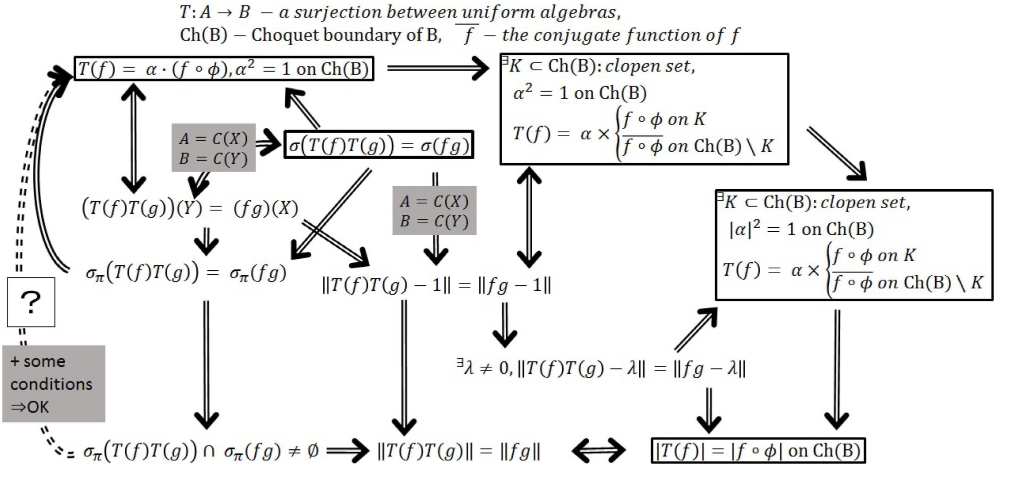

FIGURE 2. それぞれの条件式の関係（A, B が uniform algebras の場合）

これに対して定数関数を含んでいない function algebras A, B について同様な条件を考えてみる。ここで $\lambda \neq 0, f \in C_0(X)$ において $f - \lambda \notin C_0(X)$ であるが、$C_0(X)$ 上のノルム $\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x)|$ であることから、これ以降 $\|f - \lambda\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - \lambda|$ とし、ノルムの記号と同じ記号を用いることとする。さて、発表されている結果を調べてみると、解決されている部分については compact Hausdorff space 上の uniform algebras の間に定義された写像に関する結論と大変似た形の結論が Rao and Roy [11], Hatori, Miura, Oka and Takagi [3], Tonev [12] によって得られている。しかし $\|f - \lambda\|$ に関する条件をみたす写像などについて未解決な部分が多くあった（下図参照）。

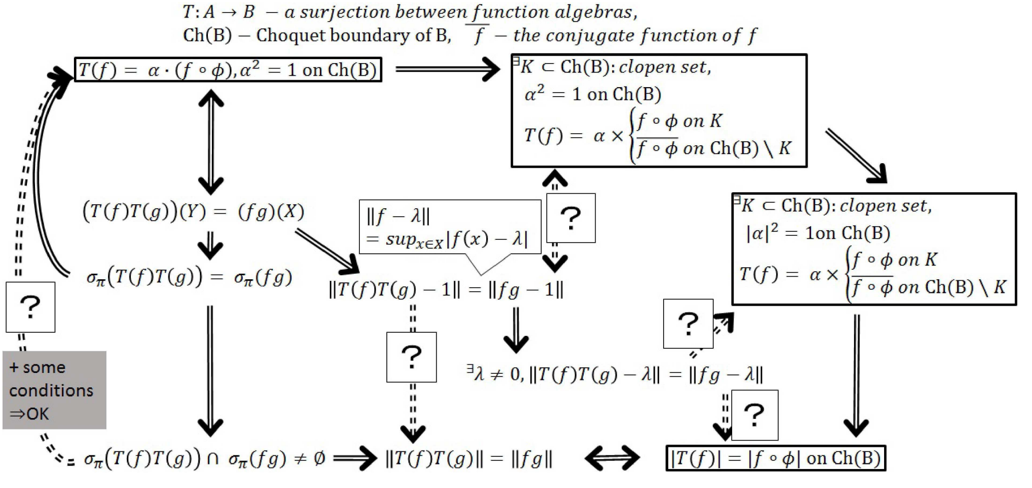

FIGURE 3. それぞれの条件式の関係（A, B が function algebras の場合）

そこで著者は可能な限り不要な情報を取り除き、条件式の本質をより探るための手がかりをつかむことを目的として、まずは $C_0(X), C_0(Y)$ の間に定義された写像について調査している。

3. 結果

ここから、T は $C_0(X)$ から $C_0(Y)$ への全射とする。Figure 3. の未解決部分に関する直接の解答はまだ得られていないが、それに関係すると思われる結果を得ることが出来た。なお、その内の一つは triple products を用いた結果であるが、この着想は Oi による講演 [10] がきっかけとなった。この他にも triple products に関連した結果は多く発表されているようである。今回得られた結果は以下の２つ（うち１つは未完成）である。

Theorem 3.1 (T., 2016). *If X is first countable and a surjection $T : C_0(X) \to C_0(Y)$ satisfies*

$$\sigma_\pi\left(T(f)T(g)\right) \cap \sigma_\pi\left(fg\right) \neq \emptyset$$

for all $f, g \in C_0(X)$, then there exist a homeomorphism $\phi : Y \to X$ and a continuous function $\alpha : Y \to \{1, -1\}$ such that

$$T(f) = \alpha \cdot (f \circ \phi)$$

for all $f \in A$.

Theorem 3.2 (T., 2017, 未完成). *If X is first countable and a surjection $T : C_0(X) \to C_0(Y)$ satisfies*

$$\|T(f)T(g)T(h) - 1\| = \|fgh - 1\|$$

for all $f, g, h \in C_0(X)$, then there exist a homeomorphism $\phi : Y \to X$ and a map $\alpha : Y \to \{1, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{\frac{4}{3}\pi i}\}$ such that for every point $y \in Y$ the equality

$$T(f)(y) = \alpha(y) \times (f \circ \phi)(y) \ \text{or}\ \alpha(y) \times \overline{(f \circ \phi)(y)}$$

holds for all $f \in C_0(X)$.

4. 結果の証明

本章では得られた結果の略証を紹介する。なお、以下の証明では過去の結果と同様に peak function と peak set の性質を随所で利用している。以下に定義を示す。

Definition 2.

$u \in C_0(X)$: peak function $\overset{\text{def}}{\iff} \sigma_\pi(u) = \{1\}$

$P(x) \overset{\text{def}}{=} \{u \in C_0(X) : \ \sigma_\pi(u) = \{1\}, u(x) = 1\}$

$x \in X$: peak point $\overset{\text{def}}{\iff}$ there is a $u \in P(x)$ such that $|u(\xi)| < 1$ for any $\xi \in X \setminus \{x\}$

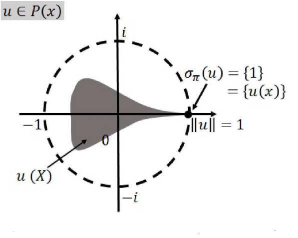

FIGURE 4. $u \in P(x)$ のイメージ

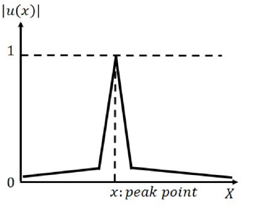

FIGURE 5. peak point のイメージ

また、X が first countable のとき、任意の点 $x \in X$ は peak point であることが知られている。

Theorem 3.1 と Theorem 3.2 では、以下の補題および定理を用いている。実際には、Lemma 4.1 と Theorem 4.3 はより一般的な形で発表されているが、ここではそれらの結果を今回適用する形に限定して紹介することにする。

Lemma 4.1 (Hatori, Miura, Oka and Takagi [3], Tonev [12]). *If $f \in C_0(X)$ and $x \in X$ is a peak point with $f(x) \neq 0$, then there exists a peak function $u \in P(x)$ with $|u(\xi)| < 1$ for any $\xi \in X \setminus \{x\}$ such that $\sigma_\pi(fu) = \{f(x)\}$ and $|fu(\xi)| < |f(x)|$ for any $\xi \in X \setminus \{x\}$. If $f \in C_0(X)$ and $x \in X$ is a peak point with $f(x) = 0$, then for any $\varepsilon > 0$ there exists a peak function $u \in P(x)$ such that $|fu(\xi)| < \varepsilon$ for any $\xi \in X \setminus \{x\}$.*

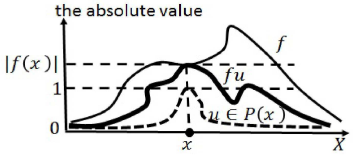

FIGURE 6. Lemma 4.1 のイメージ

さらに、Theorem 3.2 の証明ではより特別な peak function を用いる。

Lemma 4.2. *Let $0 < A < \frac{\pi}{4}$ be an angle. If $f \in C_0(X)$ and $x \in X$ is a peak point with $f(x) \neq 0$, then there exists a peak function $u \in P(x)$ with $|u(\xi)| < 1$ for any $\xi \in X \setminus \{x\}$ such that $\sigma_\pi(fu) = \{f(x)\}$, $|fu(\xi)| < |f(x)|$ for any $\xi \in X \setminus \{x\}$, and $u(X)$ is in the triangle depicted in* Figure 7.

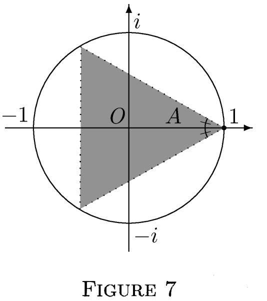

FIGURE 7

Proof. $u \in P(x)$ とする。$0 < A < \dfrac{\pi}{4}$ を角度として、複素数平面 $\mathbb{C}$ 上の写像 t_A を

$$t_A(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\sin A}{\sin(\arg z + A)} z & 0 \leqq \arg z < \pi - 2A \\ -\dfrac{\cos 2A}{\cos(\arg z)} z & \pi - 2A \leqq \arg z < \pi + 2A \\ -\dfrac{\sin A}{\sin(\arg z - A)} z & \pi + 2A \leqq \arg z < 2\pi \end{cases} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

と定義する。するとこの t_A に関して $t_A \circ u \in P(x)$ で更に $t_A \circ u$ の値域は Figure 7 にある三角形に含まれる。この t_A と Lemma 4.1 から結論が導かれる。 □

Theorem 4.3 (Tonev [12]). *If* $\|T(f)T(g)\| = \|fg\|$ *for all* $f, g \in C_0(X)$*, then* T *is a* ϕ*-composition operator in modulus on* Y *for a homeomorphism* $\phi : Y \to X$*, i.e.*

$$|T(f)(y)| = |f(\phi(y))|$$

for all $f \in C_0(X)$ *and* $y \in Y$*.*

もし T が $\sigma_\pi(T(f)T(g)) \cap \sigma_\pi(fg) \neq \emptyset$ for all $f, g \in C_0(X)$ をみたすとき、$\|TfTg\| = \|fg\|$ for all $f, g \in C_0(X)$ であるから、Theorem 4.3 より次が成り立つ。

Lemma 4.4. *If* $\sigma_\pi(T(f)T(g)) \cap \sigma_\pi(fg) \neq \emptyset$ *for all* $f, g \in C_0(X)$*, then* T *is a* ϕ*-composition operator in modulus on* Y *for a homeomorphism* $\phi : Y \to X$*.*

また、$\|T(f)T(g)T(h) - 1\| = \|fgh - 1\|$ for all $f, g, h \in C_0(X)$ をみたす T についても、以下が示される。

Lemma 4.5. *If* $\|T(f)T(g)T(h) - 1\| = \|fgh - 1\|$ *for all* $f, g, h \in C_0(X)$*, then* T *is a* ϕ*-composition operator in modulus on* Y *for a homeomorphism* $\phi : Y \to X$*.*

Proof. $f, g, h \in C_0(X)$、n を positive integer とする。仮定より、

$$\|T(nh)\|^3 = \left\|T(nh)^3\right\| \leq \left\|T(nh)^3 - 1\right\| + 1 = \left\|(nh)^3 - 1\right\| + 1 \leq n^3\|h\|^3 + 1 + 1$$

であるから $\|T(nh)\| \leq \sqrt[3]{n^3\|h\|^3 + 2}$ が成り立つ。これより

$$\begin{aligned} \left\|fgh - \frac{1}{n}\right\| &= \frac{1}{n}\|fg(nh) - 1\| = \frac{1}{n}\|T(f)T(g)T(nh) - 1\| \\ &\leq \frac{1}{n}\|T(f)T(g)\|\,\|T(nh)\| + \frac{1}{n} \leq \sqrt[3]{\|h\|^3 + \frac{2}{n^3}}\,\|T(f)T(g)\| + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

となる。$n \to \infty$ として、$\|fgh\| \leq \|T(f)T(g)\|\,\|h\|$ を得る。Lemma 4.1 より、$\|fgh\| = \|fg\|$ でかつ $\|h\| = 1$ となる $h \in C_0(X)$ が存在する。したがって $\|fg\| \leq \|T(f)T(g)\|$ for all $f, g \in C_0(X)$ が示された。同様にし

て、$\|T(f)T(g)\| \le \|fg\|$ がわかる。以上より $\|TfTg\| = \|fg\|$ for all $f, g, h \in C_0(X)$ である。Theorem 4.3 より、T は ϕ-composition operator in modulus on Y for a homeomorphism $\phi : Y \to X$ である。 □

Proof of Theorem 3.1. Lemma 4.4 より

$$|T(f)(y)| = |f(\phi(y))| \tag{4.1}$$

for all $f \in C_0(X)$ and $y \in Y$ をみたす homeomorphism $\phi : Y \to X$ が存在する。まず、

$$T(f)(y) = 0 \Leftrightarrow f(\phi(y)) = 0$$

である。次に $T(f)(y)f(\phi(y)) \neq 0$ とする。Lemma 4.1 より

$$|u_0(x)| < 1 \text{ for any } x \in X \setminus \{\phi(y)\},$$

$$\sigma_\pi(fu_0) = \{f(\phi(y))\} \text{ and } |fu_0(x)| < |f(\phi(y))| \text{ for any } x \in X \setminus \{\phi(y)\}$$

であるような $u_0 \in P(\phi(y))$ が存在する。

$$\sigma_\pi(T(f)T(u_0)) \cap \sigma_\pi(fu_0) = \sigma_\pi(T(f)T(u_0)) \cap \{f(\phi(y))\} \neq \emptyset$$

であるから、$T(f)(y')T(u_0)(y') = f(\phi(y))$ をみたす $y' \in Y$ が存在する。(4.1)より

$$|f(\phi(y))| = |T(f)(y')T(u_0)(y')| = |f(\phi(y'))u_0(\phi(y'))| = |(fu_0)(\phi(y'))|$$

だから、$y' = y$ となり

$$T(f)(y)T(u_0)(y) = f(\phi(y)) \tag{4.2}$$

が成り立つ。

ここで、任意の $u \in P(\phi(y))$ と $|u_1(x)| < 1$ for any $x \in X \setminus \{\phi(y)\}$ をみたす $u_1 \in P(\phi(y))$ に対して、

$$\sigma_\pi(T(u)T(u_1)) \cap \sigma_\pi(uu_1) = \sigma_\pi(T(u)T(u_1)) \cap \{1\} \neq \emptyset$$

であるから、$T(u)(y')T(u_1)(y') = 1$ をみたす $y' \in Y$ が存在する。等式 (4.1)より

$$1 = |T(u)(y')T(u_1)(y')| = |u(\phi(y'))u_1(\phi(y'))|$$

だから、$y' = y$ となり $T(u)(y)T(u_1)(y) = 1$ が成り立つ。$u = u_1$ とすると、$T(u_1)(y)^2 = 1$ が成り立つ。したがって

$$T(u)(y) = T(u)(y)T(u_1)(y)^2 = T(u_1)(y)$$

となる。つまり、各 $y \in Y$ において、すべての $u \in P(\phi(y))$ に対する値 $T(u)(y)$ は unique に定まり、$T(u)(y)^2 = 1$ for all $u \in P(\phi(y))$ である。

$$\alpha(y) \stackrel{\text{def}}{=} T(u)(y) \ (u \in P(\phi(y)))$$

とすると α は well-defined で (4.2)より

$$T(f)(y) = T(f)(y)T(u_0)(y)^2 = T(u_0)(y)f(\phi(y)) = \alpha(y)f(\phi(y))$$

for all $f \in A$ and $y \in Y$ を得る。これより α が連続であることも示される。 □

Theorem 3.2 の証明をする前に次の Lemma を示す。

Lemma 4.6. *If*

$$\|T(f)T(g)T(h) - 1\| = \|fgh - 1\| \tag{4.3}$$

for all $f, g, h \in C_0(X)$ *and there exists a homeomorphism* $\phi : Y \to X$ *such that*

$$|T(f)(y)| = |f(\phi(y))| \tag{4.4}$$

for all $f \in C_0(X)$ *and* $y \in Y$*, then for every point* $y \in Y$ *the equalities*

$$T(-u)(y) = -T(u)(y) \tag{4.5}$$

and

$$T(u)(y)^3 = 1$$

hold and $T(u)(y)$ *is unique for all* $u \in P(\phi(y))$.

なお、(4.5)の証明は新潟大学の羽鳥理先生によるものです。大変ありがとうございました。

Proof. $y \in Y$ を固定する。the one point compactification of X を X_∞ とする。

$$\phi(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \infty, f(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to\infty} f(x), T(f)(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y\to\infty} T(f)(y)$$

と定義すると $f \in C(X_\infty), T(f) \in C(Y_\infty)$ で更に $\phi : Y_\infty \to X_\infty$ は homeomorphism であり (4.4)が任意の $f \in C_0(X)$ と $y \in Y_\infty$ で成り立つ。$u, v \in P(\phi(y))$ を任意に選ぶ。また、$|u_1(x)| < 1$ for all $x \in X \setminus \{\phi(y)\}$ and $u_1(\infty) = 0$ となる $u_1 \in P(\phi(y))$ を固定する。(実際、そのような $u_1 \in P(\phi(y))$ が存在する。) (4.3)より

$$\|T(-u)T(v)T(u_1) - 1\| = \|-uvu_1 - 1\| = 2 \text{ and } \left\|T(-u_1)^3 - 1\right\| = \left\|-u_1{}^3 - 1\right\| = 2$$

であるから $T(-u)(y_1)T(v)(y_1)T(u_1)(y_1) = T(-u_1)(y_2)^3 = -1$ となる $y_1, y_2 \in Y_\infty$ が存在する。(4.4)より

$$|-u(\phi(y_1))v(\phi(y_1))u_1(\phi(y_1))| = |T(-u)(y_1)T(v)(y_1)T(u_1)(y_1)| = 1$$
$$|-u_1(\phi(y_2))^3| = |T(-u_1)(y_2)^3| = 1$$

であるから、$y_1 = y_2 = y$ となり

$$T(-u)(y)T(v)(y)T(u_1)(y) = T(-u_1)(y)^3 = -1$$

がわかる。$u = v = u_1$ とすると $T(-u_1)(y)T(u_1)(y)^2 = T(-u_1)(y)^3$ より $T(u_1)(y)^2 = T(-u_1)(y)^2$ である。もし、$T(-u_1)(y) = T(u_1)(y)$ とすると、(4.3)より

$$\left\|u_1^3 - 1\right\| = \left\|T(u_1)^3 - 1\right\| = 2$$

であるから $u_1(\phi(y'))^3 = -1$ となる $y' \in Y_\infty$ が存在するが、これは u_1 の仮定に矛盾する。したがって、$T(-u_1)(y) = -T(u_1)(y), T(u_1)(y)^3 = 1$ がわかる。$v = u_1$ または $u = u_1$ とすると、

$$T(-u)(y)T(u_1)(y)^2 = T(v)(y)T(-u_1)(y)T(u_1)(y) = -1$$

であるから、

$$T(-u)(y) = -T(v)(y) = -T(u_1)(y)$$

となり、$T(u)(y)$ はすべての $u \in P(\phi(y))$ で unique に定まり、$T(u)(y)^3 = 1$ である。 □

Proof of Theorem 3.2. Lemma 4.5 より、(4.4) をみたす homeomorphism $\phi: Y \to X$ が存在する。Lemma 4.6 より各 $y \in Y$ において、$T(u)(y)$ はすべての $u \in P(\phi(y))$ で unique に定まり、$T(u)(y)^3 = 1$ である。

$$\alpha(y) \stackrel{\text{def}}{=} T(u)(y) \ (u \in P(\phi(y)))$$

とすると α は well-defined で $\alpha(y) \in \{1, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{\frac{4}{3}\pi i}\}$ となる。

ここで $y_0 \in Y$ を 1 点固定する。$T_{y_0}: C_0(X) \to C_0(Y)$ を

$$T_{y_0}(f) \stackrel{\text{def}}{=} T(f)/\alpha(y_0) \ (f \in C_0(X))$$

と定義すると T_{y_0} は surjection で (4.3) (4.4)をみたす。更に T_{y_0} の定義と (4.5)より

$$T_{y_0}(u)(y_0) = 1 = -T_{y_0}(-u)(y_0)$$

for all $u \in P(\phi(y_0))$ をみたす。

最後に

$$T_{y_0}(f)(y_0) = (f \circ \phi)(y_0) \text{ or } \overline{(f \circ \phi)(y_0)}$$

for all $f \in C_0(X)$ であることを示す。$T_{y_0}(f)(y_0)f(\phi(y_0)) = 0$ のとき (4.4)より

$$T_{y_0}(f)(y_0) = 0 \Longleftrightarrow f(\phi(y_0)) = 0$$

であるから $T(f)_{y_0}(y_0) = f(\phi(y_0)) = \overline{f(\phi(y_0))}$ が成り立つ。よって $T_{y_0}(f)(y_0)f(\phi(y_0)) \neq 0$ の場合を示せば十分である。

(1) Lemma 4.1 より

$$\sigma_\pi(fu) = \{f(\phi(y_0))\} \text{ and } |fu(x)| < |f(\phi(y_0))| \text{ for all } x \in X_\infty \setminus \{\phi(y_0)\}$$

をみたす $u \in P(\phi(y_0))$ が存在する。また $\alpha = -\dfrac{\overline{f(\phi(y_0))}}{|T_{y_0}(f)(y_0)|} = -\dfrac{\overline{f(\phi(y_0))}}{|f(\phi(y_0))|}$ とおくと $|\alpha| = 1$ である。この u と α について $T_{y_0}(f)(y_0)T_{y_0}(\alpha u)(y_0) = -|f(\phi(y_0))|$ である。

($\because$) (4.3)より

$$\|T_{y_0}(f)T_{y_0}(u)T_{y_0}(\alpha u) - 1\| = \|\alpha f u^2 - 1\| = |f(\phi(y_0))| + 1$$

であるから $(T_{y_0}(f)T_{y_0}(u)T_{y_0}(\alpha u))(y') = -|f(\phi(y_0))|$ となる $y' \in Y_\infty$ が存在する。(4.4)より

$$|f(\phi(y_0))| = |(T_{y_0}(f)T_{y_0}(u)T_{y_0}(\alpha u))(y')| = |\alpha f(\phi(y'))u(\phi(y'))^2| = |fu(\phi(y'))|$$

となり、$y' = y_0$ であることがわかる。したがって

$$T_{y_0}(f)(y_0)T_{y_0}(\alpha u)(y_0) = (T_{y_0}(f)T_{y_0}(u)T_{y_0}(\alpha u))(y_0) = -|f(\phi(y_0))|$$

となる。

(2) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| = |\beta| = 1$, $u \in P(\phi(y_0))$ とすると、$T_{y_0}(\alpha u)(y_0)$ はすべての $u \in P(\phi(y_0))$ で unique に定まる。更に

(4.6) $$T_{y_0}(\overline{\alpha}u)(y_0) = \overline{T_{y_0}(\alpha u)(y_0)},$$

(4.7) $$T_{y_0}(-\alpha u)(y_0) = -T_{y_0}(\alpha u)(y_0), \text{ and } T_{y_0}(\alpha\beta u)(y_0) = T_{y_0}(\alpha u)(y_0)T_{y_0}(\beta u)(y_0)$$

がなりたつ。

(∵) $u, v \in P(\phi(y_0))$, $u_1 \in P(\phi(y))$ such that $|u_1(x)| < 1$ for all $x \in X \setminus \{\phi(y)\}$ and $u_1(\infty) = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ とする。$\alpha\beta\gamma = -1$ のとき、(4.3)より

$$\|T_{y_0}(\alpha u)T_{y_0}(\beta v)T_{y_0}(\gamma u_1) - 1\| = \|\alpha\beta\gamma uvu_1 - 1\| = 2$$

で $T_{y_0}(\alpha u)(y')T_{y_0}(\beta v)(y')T_{y_0}(\gamma u_1)(y') = -1$ となる $y' \in Y_\infty$ が存在する。(4.4)より $y' = y_0$ で

$$T_{y_0}(\alpha u)(y_0)T_{y_0}(\beta v)(y_0)T_{y_0}(\gamma u_1)(y_0) = -1$$

がわかる。$\beta = \overline{\alpha}, \gamma = -1$ とすると

$$T_{y_0}(\overline{\alpha}v)(y_0) = \overline{T_{y_0}(\alpha u)(y_0)}$$

であり、特に $u = v$ のとき (4.6) を得る。したがって $T_{y_0}(\alpha u)(y_0) = T_{y_0}(\alpha v)(y_0)$ for all $u, v \in P(x)$ だから $T_{y_0}(\alpha u)(y_0)$ はすべての $u \in P(\phi(y_0))$ で unique に定まる。つまり、

$$T_{y_0}(\alpha u)(y_0)T_{y_0}(\beta u)(y_0)T_{y_0}(\gamma u)(y_0) = -1 \text{ and } T_{y_0}(\overline{\alpha}u)(y_0) = \overline{T_{y_0}(\alpha u)(y_0)}$$

for all $u \in P(x)$ である。更に $\alpha = 1, \beta = -\alpha, \gamma = \overline{\alpha}$ または $\beta = \overline{\alpha\beta}, \gamma = -\beta$ とすると (4.7) が成り立つことがわかる。

(3) 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| = 1$ について $T_{y_0}(\alpha u)(y_0) \in \{\alpha, \overline{\alpha}\}$ for all $u \in P(\phi(y_0))$ がなりたつ。

(∵)$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| = |\beta| = 1$, $u \in P(\phi(y_0))$ とする。(4.7)において $\alpha = \beta = i$ とすると、$T_{y_0}(iu)(y_0) \in \{\pm i\}$ がわかる。((2) より $T_{y_0}(iu)(y_0)$ は unique であることに注意する。) また、(4.3)(4.4)(4.6)より

$$\begin{aligned}|T_{y_0}(\alpha u)(y_0) - T_{y_0}(\beta u)(y_0)| &= |T_{y_0}(\alpha u)(y_0)T_{y_0}(\overline{\beta}u)(y_0) - 1| \\ &\leq \left\|T_{y_0}(\alpha u)T_{y_0}(\overline{\beta}u)T(u) - 1\right\| = \left\|\alpha\overline{\beta}u^3 - 1\right\| = \left\|\alpha u^3 - \beta\right\|\end{aligned}$$

である。特に $\beta = \pm 1, \pm i$ のとき、

$$|T_{y_0}(\alpha u)(y_0) - 1| \leq \|\alpha u^3 - 1\|,\ |T_{y_0}(\alpha u)(y_0) + 1| \leq \|\alpha u^3 + 1\|,$$

$$|T_{y_0}(\alpha u)(y_0) - T_{y_0}(iu)(y_0)| \leq \|\alpha u^3 - i\|, \text{ and } |T_{y_0}(\alpha u)(y_0) + T_{y_0}(iu)(y_0)| \leq \|\alpha u^3 + i\|$$

である。更に、以下が成り立つことがわかる。

Case 1 $T_{y_0}(iu)(y_0) = i \Rightarrow T_{y_0}(\alpha u)(y_0) = \alpha$

Case 2 $T_{y_0}(iu)(y_0) = -i \Rightarrow T_{y_0}(\alpha u)(y_0) = \overline{\alpha}$

(∵) ここでは Case 1 のみ示すこととする。

(a) $0 < \arg\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$\beta = -1, -i$ について、Lemma 4.2 より

$$|T_{y_0}(\alpha u)(y_0) - T_{y_0}(\beta u)(y_0)| \leqq \|\alpha u_\beta^3 - \beta\| \leqq |\alpha - \beta|$$

となる $u_\beta \in P(\phi(y_0))$ が存在する。(Figure 8 参照。)

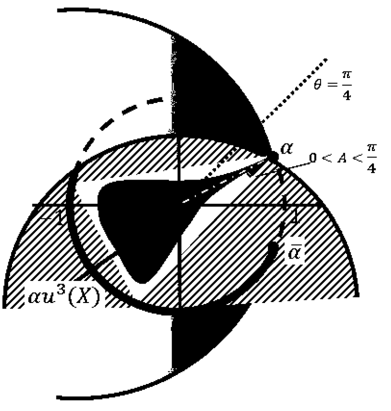

FIGURE 8

$\beta = 1, i$ について、Lemma 4.2 より任意の $\gamma \in \mathbb{C}$ with $|\gamma| = 1$ and $|\gamma - 1| > |\alpha i - 1|$ および

$\delta \in \mathbb{C}$ with $|\delta| = 1$ and $|\delta - i| > |\overline{\alpha} - i|$ に対して
$|T_{y_0}(\alpha u)(y_0) - 1| \leqq \|\alpha u_\gamma^3 - 1\| \leqq |\gamma - 1|$, $|T_{y_0}(\alpha u)(y_0) - i| \leqq \|\alpha u_\delta^3 - i\| \leqq |\delta - i|$

となる $u_\gamma, u_\delta \in P(\phi(y_0))$ が存在する。(Figure 9 参照。)

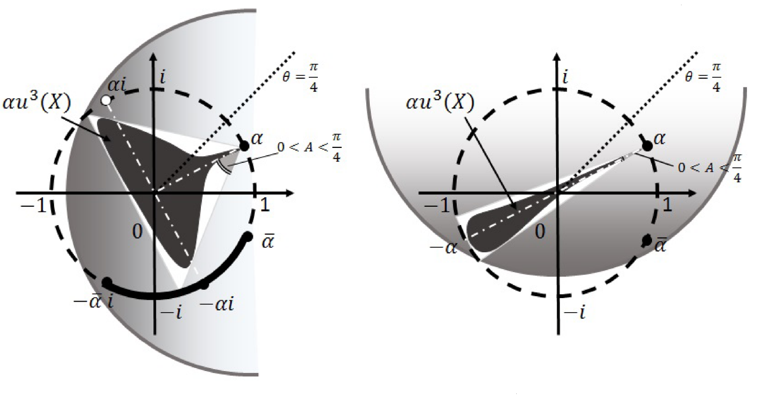

FIGURE 9

以上より $T_{y_0}(\alpha u)(y_0) \in \{\alpha, \overline{\alpha}\}$ である。

(b) $\arg \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき、(4.7) より $T_{y_0}(\alpha u)(y_0)^2 = i$ であるから $T_{y_0}(\alpha u)(y_0) \in \{\alpha, -\alpha\}$ がわかる。

$\dfrac{\pi}{4} < \arg \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき、(a) の場合と同様にして $T_{y_0}(\alpha u)(y_0) \in \{\alpha, -\overline{\alpha}\}$ がわかる。

(4.7) と (a) より $T_{y_0}(\alpha^2 u)(y_0) = T_{y_0}(\alpha u)(y_0)^2 \in \{\alpha^2, \overline{\alpha}^2\}$ for $\dfrac{\pi}{8} \leq \arg \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ となるから、

$$T_{y_0}(\alpha u)(y_0) = \alpha \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq \arg \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

を得る。同様の議論により

$$T_{y_0}(\alpha u)(y_0) = \alpha \quad \left(0 < \arg\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。また、T_{y_0} の定義と仮定より $\arg\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$ のときも $T_{y_0}(\alpha u)(y_0) = \alpha$ である。

(c) $\alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| = 1$ とする。

$$\alpha = \alpha_0\beta_0,\ |\alpha_0| = |\beta_0| = 1,\ 0 \le \arg\alpha_0 \le \frac{\pi}{2},\ \beta_0 \in \{\pm 1, \pm i\}$$

となる $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{C}$ が存在する。(4.7)より

$$T_{y_0}(\alpha u)(y_0) = T_{y_0}(\alpha_0 u)(y_0) T_{y_0}(\beta_0 u)(y_0) = \alpha_0\beta_0 = \alpha$$

を得る。

(1)(3) より

$$T_{y_0}(f)(y_0) = \begin{cases} f(\phi(y_0)) & \text{if } T_{y_0}(iu)(y_0) = i \\ \overline{f(\phi(y_0))} & \text{if } T_{y_0}(iu)(y_0) = -i \end{cases}$$

となるから、$T_{y_0}(f)(y_0) = f(\phi(y_0))$ or $\overline{f(\phi(y_0))}$ である。 □

References

[1] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via non-linear range-preserving property*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2923–2930.

[2] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Multiplicatively spectrum-preserving and norm-preserving maps between invertible groups of commutative Banach algebras*, (2006), preprint.

[3] O. Hatori, T. Miura, H. Oka and H. Takagi, *Peripheral multiplicativity of maps on uniformly closed algebras of continuous functions which vanish at infinity*, Tokyo. J. Math., **32** (2009), no.1, 91–104.

[4] O. Hatori, S. Lambert, A. Luttman, T. Miura, T. Tonev and R. Yates, *Spectral preservers in commutative Banach algebras*, Contemp. Math., **547** (2011), 103–123.

[5] K.Jarosz, *When is a linear functional multiplicative?, Function Spaces*, American Mathematical Society, 232(1999)201–210

[6] S. Lambert, A. Luttman and T. Tonev, *Weakly peripherally-multiplicative mappings between uniform algebras*, Contemp. Math., **435** (2007), 265–281.

[7] A. Luttman and T. Tonev, *Uniform algebra isomorphisms and peripheral multiplicativity*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), no.11, 3589–3598.

[8] A. Luttman and S. Lambert, *Norm conditions for uniform algebra isomorphisms*, Cent. Eur. J. Math., **6(2)** (2008), 272–280.

[9] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2001), 111–120.

[10] S. Oi, *Peripheral spectrum conditions for triple products of Lipschitz functions on non-compact metric spaces*, Talks at International Conference on Preserver Problems and Related Topics, (2015).

[11] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras II*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **48** (2005), 219–229.

[12] T. Tonev, *Weak multiplicative operators on function algebras without units*, Banach Center Publications, **91** (2010), 411–421.

〒 940-8532 新潟県長岡市西片貝町 888　長岡工業高等専門学校

888 Nishikatakai, Nagaoka, Niigata 940-8532, Japan
E-mail address: `rumi@nagaoka-ct.ac.jp`