数理解析研究所講究録
第2036巻 2017年 135-151

ヒルベルト形式からヒルベルト-ジーゲル形式へのリフティング

京大白眉センター/数学教室　山名俊介 (Shunsuke Yamana)
The Hakubi center/Department of Mathematics, Kyoto University

1 序

保型形式を具体的に構成することは難しい問題として知られている. アイゼンシュタイン級数の理論により, 一般の保型形式の構成は尖点形式の場合に帰着される. 肝心の尖点形式を構成する方法は, ポアンカレ級数, テータ対応, 跡公式, 降下法など幾つか知られている. ポアンカレ級数として構成された尖点形式は取り扱いが難しく具体的なことは分からない. 志村対応, 斉藤-黒川リフティング, ボーチャーズ積など興味ある例がテータ対応により構成されているが, そのような例は相当限られており, 高次のジーゲル尖点形式は構成できない. 跡公式は保形表現の存在や重複度など興味深い情報を与えるが, 具体的に構成する方法は一切示唆しない. 降下法は未だ発展途上であるが, 現時点では主に生成的保形表現の構成に応用され, 正則保型形式への応用は未開である.

今世紀の初めに, 池田保氏が一変数尖点形式のデータから高次のジーゲル尖点形式を造りだす, 池田リフティングを具体的にフーリエ展開まで与えて構成することに成功し, 高次正則保型形式の理論の新しい発展が切り開かれた. そのときの構成法は他の群の正則保型形式にも応用されたものの (それらについては [8, 21, 12] を参照), 一般化の余地に乏しかった. しかしその後, 池田氏は新たな手法を開発してヒルベルト-ジーゲル尖点形式の構成にも成功した. 約8年前の話であるが, この研究は今日まで殆ど顧みられることはなかった. 最近筆者により, フーリエ展開が与えられて見易くなり証明も簡略化されたので, 本稿で報告する.

1.1 設定

本稿では F は常に次数 d の総実代数体とし, そのアデール環を $\mathbb{A} = \mathbb{A}_\infty \cdot \mathbb{A}_\mathbf{f}$ と表す. ここで, $\mathbb{A}_\infty = F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$ であり, $\mathbb{A}_\mathbf{f}$ は F の有限アデール環である. F の素点 v に関する完備化を F_v と書く. ドイツ文字 $\mathfrak{p}$ は F の有限素点を表すことにする. $\mathfrak{S}_\infty$ を F の d 個の実素点の集合とする. m 次対称行列の空間を

$$\mathrm{Sym}_m = \{z \in \mathrm{M}_m \mid {}^t z = z\}$$

と書く. $2n$ 次元の非退化交代形式付きベクトル空間 W_m を固定し, 付随するシンプレクティック群を $Sp(W_m)$ と表す. 一方で, W_m の Witt 基底を固定して $Sp(W_m)$

を下記の行列群と同一視する:

$$Sp_m = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2m} \,\middle|\, g \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

二つの準同型 $\mathfrak{m} : \mathrm{GL}_m \to Sp_m$ と $\mathfrak{n} : \mathrm{Sym}_m \to Sp_m$ を以下で定義する:

$$\mathfrak{m}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{n}(b) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & b \\ 0 & \mathbf{1}_m \end{pmatrix}.$$

メタプレクティック群 $\mathrm{Mp}(W_m)_{\mathbb{A}} \twoheadrightarrow Sp_m(\mathbb{A})$ とは, シンプレクティック群のアデール群の非自明な二重被覆群である. 切断 $Sp_m(F) \to \mathrm{Mp}(W_m)_{\mathbb{A}}$ が唯一つ存在することが知られている. この切断により $Sp_m(F)$ は $\mathrm{Mp}(W_m)_{\mathbb{A}}$ の (離散的) 部分群と見做される. 無限アデール $Sp_m(\mathbb{A}_\infty)$, 有限アデール $Sp_m(\mathbb{A}_\mathbf{f})$ や $Sp_m(F_v)$ の逆像をそれぞれ $\mathrm{Mp}(W_m)_\infty$, $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathbf{f}$ や $\mathrm{Mp}(W_m)_v$ のように書くことにする.

準同型 $\mathbf{e}_\infty : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^\times$ を $\mathbf{e}_\infty(\mathcal{Z}) = \prod_{v \in \mathfrak{S}_\infty} e^{2\pi\sqrt{-1}\mathcal{Z}_v}$ のように定義し, アデールの加法指標 $\psi = \prod_v \psi_v$ を $\mathbb{A}_\infty$ への制限が $\mathbf{e}_\infty$ と一致し, 主アデールへの制限が自明になる (つまり $\mathbb{A}/F$ の) 唯一の指標であるとする. 更に F 上の m 次対称行列 ξ に対して指標 $\psi_\mathbf{f}^\xi = \prod_{v \notin \mathfrak{S}_\infty} \psi_v^\xi : \mathrm{Sym}_m(\mathbb{A}_\mathbf{f}) \to \mathbb{C}^\times$ を $\psi_\mathbf{f}^\xi(z) = \prod_\mathfrak{p} \psi_\mathfrak{p}(\mathrm{tr}(\xi z_\mathfrak{p}))$ のように定義する. ヴェイユ定数とは $t \in F_v^\times$ に対して等式

$$\int_{F_v} \phi(x_v)\psi_v(tx_v^2)\,\mathrm{d}x_v = \gamma(\psi_v^t)|2t|_v^{-1/2} \int_{F_v} \mathcal{F}\phi(x_v)\psi_v\left(-\frac{x_v^2}{4t}\right)\mathrm{d}x_v$$

が全てのシュヴァルツ関数 ϕ に関して成り立つような1の8乗根 $\gamma(\psi_v^t)$ であった. ここで $\mathrm{d}x_v$ はフーリエ変換

$$\mathcal{F}\phi(y) = \int_{F_v} \phi(x_v)\psi_v(x_v y)\,\mathrm{d}x_v$$

に関する F_v の自己双対測度である. ヴェイユ指数とは比 $\gamma^{\psi_v}(t) = \gamma(\psi_v)/\gamma(\psi_v^t)$ のことである. F の総正元の全体を $F_+^\times$, 階数 m の正定値対称実行列全体を $\mathrm{Sym}_m(\mathbb{R})^+$, そして F 上の階数 m の総正定値対称行列全体を Sym_m^+ と表す.

類体論により体拡大 $F(\sqrt{t})/F$ に対応するイデール類群の指標 $\hat{\chi}^t = \prod_v \hat{\chi}_v^t$ が存在する. その有限イデール $\mathbb{A}_\mathbf{f}^\times$ への制限を $\hat{\chi}_\mathbf{f}^t$ と書く. 実数の組 $\ell \in \mathbb{R}^d$ に対して $|t|^\ell = \prod_{v \in \mathfrak{S}_\infty} |t|_v^{\ell_v}$ とおく.

1.2 ヒルベルト-ジーゲル尖点形式

楕円保型形式の総実体への一般化はヒルベルト保型形式と呼ばれる. ジーゲル保型形式やエルミート保型形式は楕円保型形式の高次元化であり, その総実体への一般化をヒルベルト-ジーゲル保型形式, ヒルベルト-エルミート保型形式と呼ぶことにする. これらはヒルベルト保型形式の自然な高次元化であるが, その定義が少々複雑なこともあり, 知名度が高いとは言えない. 本節でヒルベルト-ジーゲル保型形式の定義を筆者の研究結果が述べ易い形で見直そう.

各実素点 $v \in \mathfrak{S}_\infty$ に関して, 実リー群 $\mathrm{Mp}(W_m)_v$ はジーゲル上半空間

$$\mathcal{H}_m = \{\mathcal{Z} \in \mathrm{Sym}_m(\mathbb{C}) \mid \Im\mathcal{Z} \in \mathrm{Sym}_m(\mathbb{R})^+\}$$

にシンプレクティック群 $Sp_m(F_v)$ を経由して作用する. 即ち, $\tilde{g}_v$ の実シンプレクティック群 $Sp_m(F_v)$ への射影を $\begin{pmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{pmatrix}$ のように書けば,

$$\tilde{g}\mathcal{Z} = (A_v\mathcal{Z} + B_v)(C_v\mathcal{Z} + D_v)^{-1}.$$

実メタプレクティック群の保型因子 $\jmath : \mathrm{Mp}(W_m)_v \times \mathcal{H}_m \to \mathbb{C}^\times$ は, その平方が

$$\jmath(\tilde{g}_v, \mathcal{Z}_v)^2 = \det(C_v\mathcal{Z}_v + D_v)$$

のようにシンプレクティック群の保型因子となるものである. d 個の整数の組 κ に対して, 保型因子 $J_{\kappa/2} : \mathrm{Mp}(W_m)_\infty \times \mathcal{H}_m^d \to \mathbb{C}^\times$ を積

$$J_{\kappa/2}(\tilde{g}, \mathcal{Z}) = \prod_{v \in \mathfrak{S}_\infty} \jmath(\tilde{g}_v, \mathcal{Z}_v)^{\kappa_v}$$

として定義する. d 個の半整数の組 $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ と $\tilde{g} \in \mathrm{Mp}(W_m)_\infty$ と上半空間 $\mathcal{H}_m^d$ 上の関数 $\mathcal{F}$ に対して, 新たな関数 $\mathcal{F}|_\ell \tilde{g}$ を関係式

$$\mathcal{F}|_\ell \tilde{g}(\mathcal{Z}) = \mathcal{F}(\tilde{g}\mathcal{Z}) J_\ell(\tilde{g}, \mathcal{Z})^{-1}$$

により定義する. 上半空間 $\mathcal{H}_m^d$ の原点及び実メタプレクティック群の標準的極大コンパクト部分群 を下記のように定義する:

$$\mathbf{i}_m = (\sqrt{-1}\mathbf{1}_m, \ldots, \sqrt{-1}\mathbf{1}_m) \in \mathcal{H}_m^d,$$
$$\tilde{\mathcal{K}}_m = \{\tilde{g} \in \mathrm{Mp}(W_m)_\infty \mid \tilde{g}(\mathbf{i}_m) = \mathbf{i}_m\}.$$

定義 1.1 (ヒルベルト-ジーゲル尖点形式). 次数 m, 重さ $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ のヒルベル-ジーゲル尖点形式 $\mathcal{F}$ とは, 次式の対称性と下記の (正則及び急減少) 条件を満たすメタプレクティック群 $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathbb{A}$ 上の滑らか関数である:

$$\mathcal{F}(\gamma\tilde{g}\tilde{k}) = \mathcal{F}(\tilde{g}) J_\ell(\tilde{k}, \mathbf{i}_m)^{-1} \qquad (\gamma \in Sp_m(F),\ \tilde{g} \in \mathrm{Mp}(W_m)_\mathbb{A},\ k \in \tilde{\mathcal{K}}_m)$$

$\tilde{\mathcal{K}}_m$ に関する性質により, 各有限アデール $\tilde{\Delta} \in \mathrm{Mp}(W_m)_\mathbf{f}$ に対して, 上半空間上の関数 $\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}} : \mathcal{H}_m^d \to \mathbb{C}$ を以下で定義できる:

$$\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}}|_\ell \tilde{g}(\mathbf{i}_m) = \mathcal{F}(\tilde{g}\tilde{\Delta}), \qquad \tilde{g} \in \mathrm{Mp}(W_m)_\infty.$$

この関数 $\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}}$ が以下のようなフーリエ展開を持つ正則関数であるとする:

$$\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}}(\mathcal{Z}) = \sum_{\xi \in \mathrm{Sym}_m^+} |\det\xi|^{\ell/2} \mathbf{w}_\xi(\tilde{\Delta}, \mathcal{F}) \mathbf{e}_\infty(\mathrm{tr}(\xi\mathcal{Z}))$$

ここで, $\mathbf{w}_\xi(\mathcal{F})$ は有限アデール群 $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathbf{f}$ 上の滑らか関数である.

次数 m で重さ ℓ のヒルベル-ジーゲル尖点形式の空間を $\mathfrak{C}_\ell^{(m)}$ と表す. 有限アデール群 $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathbf{f}$ はこの空間に右移動で作用する. 次の問題は基本的である:

(Q) $\mathfrak{C}_\ell^{(m)}$ が $\mathrm{Mp}(W_m)_{\mathbf{f}}$ のどのような既約表現の直和に分解するか?

非常に高度な跡公式の理論を開発して, アーサー [1] は, 保型形式の空間 (我々のヒルベルト-ジーゲル尖点形式の空間 $\mathfrak{C}_\ell^{(m)}$ よりも一般的なものである) の分解を内視論の視点から記述した. 次節で構成するヒルベルト-ジーゲル尖点形式は, 最も退化した内視的尖点形式であり, その存在や重複度はアーサー跡公式からも証明できるはずである. しかし, 存在定理だけでは数論への応用に不十分である. 具体的に構成された楕円保型形式のフーリエ係数の明示的計算が数論に重要な役割を果たすことを思えば, 高次元の保型形式にそのような具体例が欠如していることは物足りない.

ついでにヒルベルト尖点形式の定義も復習しておく.

$$\mathcal{K}_1 = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_\infty) \mid g(\mathbf{i}_1) = \mathbf{i}_1\}$$

とおく. リー群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\infty)$ の単位元の連結成分

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\infty)^+ := \{g = (g_v) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\infty) \mid \det g_v > 0 \text{ for all } v \in \mathfrak{S}_\infty\}$$

は上半平面 $\mathcal{H}_1^d$ に

$$g\mathcal{Z} = (g_v\mathcal{Z}_v)_{v\in\mathfrak{S}_\infty}, \qquad g_v\mathcal{Z}_v = (a_v\mathcal{Z}_v + b_v)(c_v\mathcal{Z}_v + d_v)^{-1}$$

のように作用し, 上半平面上の関数 $\mathcal{F}$ の空間にも

$$\mathcal{F}|_\kappa g(\mathcal{Z}) = \mathcal{F}(g\mathcal{Z})J_\kappa(g,\mathcal{Z})^{-1}, \quad J_\kappa(g,\mathcal{Z}) = |\det g|^{-\kappa/2}\prod_{v\in\mathfrak{S}_\infty}(c_v\mathcal{Z}_v + d_v)^{\kappa_v}$$

のように作用する. ここで g の v 成分を $\begin{pmatrix} a_v & b_v \\ c_v & d_v \end{pmatrix}$ と書いた.

イデール類群 $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ のユニタリ指標 ω を固定する. ω の $\mathbb{A}_\infty^\times$ への制限を ω_∞ と書き, ω の $\mathbb{A}_{\mathbf{f}}^\times$ への制限を $\omega_{\mathbf{f}}$ と書くことにする. $\omega_\infty^2 = 1$ を仮定する.

定義 1.2 (ヒルベルト尖点形式). 重さ $\kappa \in \mathbb{Z}^d$, 中心指標 ω のヒルベルト尖点形式 $\mathcal{F}$ とは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ 上の次式の対称性と以下に述べる条件を満たす滑らか関数である:

$$\mathcal{F}(z\gamma gk) = \omega(z)\mathcal{F}(g)J_\kappa(k,\mathbf{i}_1)^{-1} \quad (z \in \mathbb{A}^\times,\ \gamma \in \mathrm{GL}_2(F),\ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}),\ k \in \mathcal{K}_1)$$

$\mathcal{K}_1$ に関する性質より各 $\Delta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$ に対して, 関数 $\mathcal{F}_\Delta : \mathcal{H}_1^d \to \mathbb{C}$ を関係式

$$\mathcal{F}_\Delta|_{2\kappa}g(\mathbf{i}_1) = \mathcal{F}(g\Delta), \qquad g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\infty)^+.$$

により定義できる. この関数 $\mathcal{F}_\Delta$ は次の形のフーリエ展開を持つ正則関数とする:

$$\mathcal{F}_\Delta(\mathcal{Z}) = \sum_{t\in F_+^\times} |t|^{\kappa/2}\mathbf{w}_t(\Delta,\mathcal{F})\mathbf{e}_\infty(t\mathcal{Z}).$$

ここで $\mathbf{w}_t(\mathcal{F})$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$ 上の滑らか関数である.

重さ κ, 中心指標 ω のヒルベルト尖点形式の空間を $\mathfrak{C}_\kappa^\omega$ と書く. ω が自明な指標の時, PGL_2 上のヒルベルト尖点形式ということにする. 0 でない PGL_2 上のヒルベルト尖点形式の重さは偶数の組である. 重さ 2κ の PGL_2 上のヒルベルト尖点形式の空間を $\mathfrak{C}_{2\kappa}$ と書く.

1.3 主結果

一般射影群 PGL_n の表現は一般線形群 GL_n の表現で自明な中心指標を持つものと同一視される．$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbf{f})$ の既約許容的ユニタリ生成的表現 $\pi_\mathbf{f}$ を以下固定する．$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_\mathbf{f})$ は $\mathrm{PGL}_2(F_\mathfrak{p})$ の制限直積なので，$\pi_\mathbf{f}$ は $\mathrm{PGL}_2(F_\mathfrak{p})$ の既約許容的ユニタリ生成的表現 $\pi_\mathfrak{p}$ の制限テンソル積 $\otimes'_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}$ である．技術的理由から $\pi_\mathfrak{p}$ はいずれも超尖点的ではないとする．即ち F の各有限素点 $\mathfrak{p}$ に関して，乗法群 $F_\mathfrak{p}^\times$ の指標 $\mu_\mathfrak{p}$ が存在して，$\pi_\mathbf{f}$ は主系列表現 $\otimes'_\mathfrak{p}I(\mu_\mathfrak{p},\mu_\mathfrak{p}^{-1})$ の唯一の既約部分表現として実現される．当然殆ど全ての素点で $\mu_\mathfrak{p}$ は不分岐であり，有限イデール群 $\mathbb{A}_\mathbf{f}^\times$ の指標 $\mu_\mathbf{f}$ が $\mu_\mathbf{f}(t)=\prod_\mathfrak{p}\mu_\mathfrak{p}(t_\mathfrak{p})$ により定義される．

局所メタプレクティック群 $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathfrak{p}$ の退化主系列表現 $I_m^{\psi_\mathfrak{p}}(\mu_\mathfrak{p})$ とは，下記の性質を持つ $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathfrak{p}$ の滑らか関数 $h_\mathfrak{p}$ の空間に右移動の作用により得られる表現である:

$$h_\mathfrak{p}((\mathfrak{m}(a)\mathfrak{n}(b),\zeta)\tilde{g})=\zeta^m\gamma^{\psi_\mathfrak{p}}(\det a)^m\mu_\mathfrak{p}(\det a)|\det a|_\mathfrak{p}^{(m+1)/2}h_\mathfrak{p}(\tilde{g})$$
$$(\zeta\in\{\pm1\},\ a\in\mathrm{GL}_m(F_\mathfrak{p}),\ z\in\mathrm{Sym}_m(F_\mathfrak{p}),\ \tilde{g}\in\mathrm{Mp}(W_m)_\mathfrak{p}).$$

この表現はジーゲルアイゼンシュタイン級数の観点から既に [13, 18] に相当詳しく研究されている．制限直積 $I_m^{\psi_\mathbf{f}}(\mu_\mathbf{f})=\otimes'_\mathfrak{p}I_m^{\psi_\mathfrak{p}}(\mu_\mathfrak{p})$ は唯一つの既約部分表現 $A_m^{\psi_\mathbf{f}}(\mu_\mathbf{f})$ を持つ．これは $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathbf{f}$ の生成的でも緩増加でもないが，ユニタリ表現である．本稿では，次の問題に解答を与える．

(Q1) $A_m^{\psi_\mathbf{f}}(\mu_\mathbf{f})$ は，いつ $\mathfrak{C}_\ell^{(m)}$ の分解に現れるか?

(Q2) それが現れるとき，埋め込み $A_m^{\psi_\mathbf{f}}(\mu_\mathbf{f})\hookrightarrow\mathfrak{C}_\ell^{(m)}$ はどのように記述されるか?

定理 1.3 ([10])．$A_m^{\psi_\mathbf{f}}(\mu_\mathbf{f})$ の $\mathfrak{C}_{(2\kappa+m)/2}^{(m)}$ での重複度は高々1 である．$A_m^{\psi_\mathbf{f}}(\mu_\mathbf{f})$ が $\mathfrak{C}_{(2\kappa+m)/2}^{(m)}$ に現れるためには $\pi_\mathbf{f}$ が $\mathfrak{C}_{2\kappa}$ の分解に現れ，符号条件 $(-1)^{\sum_{v\in\mathfrak{S}_\infty}\kappa_v}\mu_\mathbf{f}(-1)=1$ を満たすことが必要かつ十分である．

注意 1.4. (1) 重複度高々1 の証明は池田保氏の着想であり，目が眩むような代数的技巧を駆使している．

(2) 符号条件はアーサー予想に適合している．アーサー予想に関しては [1, 2] や [3]，或いは [7] の 14 章などを参照すると良い．極小ウェイト $\pm2\kappa_v$ の離散系列を $D_{2\kappa_v}$ と書くと $\varepsilon(1/2,D_{2\kappa_v})=(-1)^{\kappa_v}$ であり，全ての有限素点で $\pi_\mathfrak{p}$ が既約主系列表現のとき，符号条件はルート数が 1 であることを意味する．

単に $A_m^{\psi_\mathbf{f}}(\mu_\mathbf{f})$ が尖点形式の空間に現れるかどうか知るだけでは数論的応用に不十分である．一体どのようにして $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathbf{f}$-同変な埋め込み $A_m^{\psi_\mathbf{f}}(\mu_\mathbf{f})\hookrightarrow\mathfrak{C}_{(2\kappa+m)/2}^{(m)}$ が得られるのか分からなければ片手落ちである．この問題に答えるために退化主系列表現の退化 Whittaker 模型についてまず述べる．

メタプレクティック群はユニポテントな部分群上では分裂するので，有限部分 $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathbf{f}$ の許容表現 $\Pi_\mathbf{f}$ のジャッケ加群や Whittaker 模型を考えることができ

る．準同型 $\mathfrak{n}$ のメタプレクティック群への持ち上げを同じ記号で表し，各 F 上の m 次非退化対称行列 ξ に関して指標 $\psi_{\mathbf{f}}^{\xi}$ による退化 Whittaker 空間

$$\mathrm{Wh}_{\xi}(\Pi_{\mathbf{f}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sym}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})}(\Pi_{\mathbf{f}} \circ \mathfrak{n}, \psi_{\mathbf{f}}^{\xi})$$

を考える．退化主系列表現は Whittaker 模型を持たないが，退化 Whittaker 模型を唯一つ持つことが知られている．即ち $\mathrm{Wh}_{\xi}(I_m^{\psi_{\mathbf{f}}}(\mu_{\mathbf{f}}))$ は一次元ベクトル空間である (詳しくは [11] を参照)．m 次対称行列の空間の $\mathrm{Sym}_m(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$ のハール測度 $db = \otimes_{\mathfrak{p}} db_{\mathfrak{p}}$ を固定すれば，局所退化 Whittaker 空間

$$\mathrm{Wh}_{\xi}(I_m^{\psi_{\mathfrak{p}}}(\mu_{\mathfrak{p}})) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sym}_m(F_{\mathfrak{p}})}(I_m^{\psi_{\mathfrak{p}}}(\mu_{\mathfrak{p}}) \circ \mathfrak{n}, \psi_{\mathfrak{p}}^{\xi})$$

の基底をジャッケ積分

$$w_{\xi}^{\mu_{\mathfrak{p}}}(h_{\mathfrak{p}}) = \int_{\mathrm{Sym}_m(F_{\mathfrak{p}})} h_{\mathfrak{p}}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_m \\ -\mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{n}(b_{\mathfrak{p}}), 1\right)\right) \overline{\psi_{\mathfrak{p}}^{\xi}(b_{\mathfrak{p}})}\, db_{\mathfrak{p}}$$
$$\times \frac{|\det \xi|_{\mathfrak{p}}^{(m+1)/4}}{L(\frac{1}{2}, \mu_{\mathfrak{p}} \hat{\chi}_{\mathfrak{p}}^{\det \xi})} \prod_{j=1}^{[(m+1)/2]} L(2j-1, \mu_{\mathfrak{p}}^2) \times \begin{cases} 1 & m \text{ が奇数}, \\ L\left(\frac{m+1}{2}, \mu_{\mathfrak{p}} \hat{\chi}_{\mathfrak{p}}^{(-1)^{m/2}}\right) & m \text{ が偶数} \end{cases}$$

として定義し，一次元空間 $\mathrm{Wh}_{\xi}(I_m^{\psi_{\mathbf{f}}}(\mu_{\mathbf{f}}))$ の基底 $w_{\xi}^{\mu_{\mathbf{f}}}$ を積

$$w_{\xi}^{\mu_{\mathbf{f}}}(\otimes_{\mathfrak{p}} h_{\mathfrak{p}}) = \prod_{\mathfrak{p}} w_{\xi}^{\mu_{\mathfrak{p}}}(h_{\mathfrak{p}})$$

として定義することができる．$w_{\xi}^{\mu_{\mathfrak{p}}}$ を定義する積分は収束しないが解析接続により定義され，殆ど全ての素点で $w_{\xi}^{\mu_{\mathfrak{p}}}(h_{\mathfrak{p}}) = 1$ である．

定理 1.5 ([10])．$\pi_{\mathbf{f}}$ が $\mathfrak{C}_{2\kappa}$ に現れ，$(-1)^{\sum_{v \in \mathfrak{S}_\infty} \kappa_v} \mu_{\mathbf{f}}(-1) = 1$ であるとき，複素数の集合 $\{c_t\}_{t \in F_+^\times}$ が存在して，$\mathrm{Mp}(W_m)_{\mathbf{f}}$-同変な埋め込み $i_m^{\eta} : A_m^{\psi_{\mathbf{f}}}(\mu_{\mathbf{f}} \hat{\chi}_{\mathbf{f}}^{\eta}) \hookrightarrow \mathfrak{C}_{(2\kappa+m)/2}^{(m)}$ はすべての m と $\eta \in F_+^\times$ に対して下記のフーリエ級数で与えられる；

$$i_m^{\eta}(h)_{\tilde{\Delta}}(Z) = \sum_{\xi \in \mathrm{Sym}_m^+} |\det \xi|^{(2\kappa+m)/4} c_{\eta \det \xi} \mathbf{e}_{\infty}(\mathrm{tr}(\xi Z)) w_{\xi}^{\mu_{\mathbf{f}} \hat{\chi}_{\mathbf{f}}^{\eta}}(A_m^{\psi_{\mathbf{f}}}(\tilde{\Delta}, \mu_{\mathbf{f}} \hat{\chi}_{\mathbf{f}}^{\eta}) h).$$

注意 1.6.　(1) $A_1^{\psi_{\mathbf{f}}}(\mu_{\mathbf{f}})$ は志村対応の逆対応，$A_2^{\psi_{\mathbf{f}}}(\mu_{\mathbf{f}})$ は斉藤-黒川リフティングである．両方ともテータリフティングである．志村対応は志村五郎により逆定理を使って古典的保型形式の枠組みで証明された後，Waldspurger [19, 20] により表現論の観点から徹底的に研究された．斎藤-黒川リフティングは，斎藤裕と黒川信重が独立に予想し，Maass, Andrianov, Zagier により証明された後，Piatetski-Shapiro [16] により表現論の枠組みから詳しく研究された．定理 1.5 は，Duke-Imamoglu と伊吹山知義が独立に予想し，池田保氏が構成したリフティングの一般化である．池田氏の論文 [7] では，F が有理数体，m が偶数，全ての素数 p で $\mu_p \hat{\chi}_p^{(-1)^{m/2}}$ は $\mathbb{Q}_p^\times$ の不分岐ユニタリ指標であるときを扱っている．m が奇数のときは，[4] で扱われている．その証明は一般化

の余地に乏しかったが, その後池田氏 [9] は, 表現論の手法を駆使してもっと一般的な方法を編み出した. しかし, [9] は難解で具体的でもなかったので長らく無視されて来た. それが今回の池田氏との共同研究で具体的かつ簡明になったのが定理 1.5 である. 紆余曲折あれど, 歴史は繰り返すようである.

(2) 定数 c_t は半整数のヒルベルト尖点形式のフーリエ係数であり, コーネン-ザギエの結果より, その平方と中心特殊値 $L(\frac{1}{2}, \pi_{\mathbf{f}} \otimes \chi_{\mathbf{f}}^t)$ の間に関係式が知られている (例えば, [5] の定理 12.3 を読むと良い).

(3) 定理 1.5 のフーリエ級数の形は斉藤-黒川リフティングを特徴付けるマース関係式の面影が認められる.

(4) 同じ係数 $\{c_t\}$ を持つ類似のフーリエ係数により偶数次シンプレクティック群の内部形式の正則尖点形式を与えることもできる. しかし, 重複度 1 や定理 1.3 の必要性の類似は, この場合には証明できていない. 詳しくは著者と池田氏の論文 [10] を読んで欲しい. 特に $m = 2$ のときは斉藤-黒川リフティングの移送であり, Wee Teck Gan [3], Waldspurger [20], 織田 [15], 菅野 [17] などで考察されている.

(5) 次数 m が偶数のとき, これらのフーリエ級数は自然に similitude 群

$$\left\{ g \in \mathrm{GL}_{2m} \;\middle|\; g \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix} {}^t g = \lambda_m(g) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_m(g) \in \mathrm{GL}_1 \right\}$$

の尖点形式に拡張される. m が奇数のときは, 状況が異なるようで興味深い.

2 証明

2.1 ヴェイユ表現

$z \in \mathrm{Sym}_{m-1}$ と $x, y \in F^{m-1}$ に対して, 以下の記法を用いる:

$$\mathbf{u}(x, y; z) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{m-1} & x & z - y\,{}^t x & y \\ 0 & 1 & {}^t y & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \mathbf{1}_{m-1} & 0 \\ & & -{}^t x & 1 \end{array} \right).$$

このような行列からなる Sp_m の部分群を $\mathscr{N}$ と書く. 以下の埋め込みにより SL_2 を Sp_m の部分群と見做す:

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{m-1} & & & \\ & a' & & b' \\ \hline & & \mathbf{1}_{m-1} & \\ & c' & & d' \end{array} \right).$$

半直積 $\mathscr{J} = \mathrm{SL}_2 \ltimes \mathscr{N}$ は Sp_m のヤコビ群と呼ばれる.

$X=\mathbb{A}^{m-1}$, $\mathbb{A}_\infty^{m-1}$, $\mathbb{A}_\mathbf{f}^{m-1}$ であるとき, X のシュヴァルツ関数の空間を $\mathcal{S}(X)$ と表す. 総正定値対称行列 $R\in\mathrm{Sym}_{m-1}^+$ を固定し, 次のようなヴェイユ表現 $\omega_R^\psi:\mathrm{Mp}(W_1)_\mathbb{A}\ltimes\mathscr{N}(\mathbb{A})\curvearrowright\mathscr{S}(\mathbb{A}^{m-1})$ を考える:

$$(\omega_R^\psi(\mathbf{u}(x,y;z))\varphi)(u)=\varphi(u+x)\psi(\mathrm{tr}(Rz)+2\,{}^t\!uRy),$$
$$\left(\omega_R^\psi\left(\begin{pmatrix}t & bt^{-1}\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}\varphi\right)\right)(u)=\psi(b\,{}^t\!uRu)\gamma^\psi(t)^{m-1}\hat{\chi}^{\det R}(t)|t|^{(m-1)/2}\varphi(ut),$$
$$(\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}^{m-1}),\ u\in\mathbb{A}^{m-1},t\in\mathbb{A}^\times,\ b\in\mathbb{A}).$$

シュヴァルツ関数 $\varphi_R^\infty\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_\infty^{m-1})$ を Gaussian の積 $\varphi_R^\infty(x)=\mathbf{e}_\infty(\sqrt{-1}\,{}^t\!xRx)$ として定義する. 局所定数コンパクト台関数 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_\mathbf{f}^{m-1})$ に対して関数 $\phi_R\in\mathcal{S}(\mathbb{A}^{m-1})$ をテンソル積 $\phi_R=\varphi_R^\infty\otimes\phi$ により定義する. 和

$$\Theta(\varphi)=\sum_{x\in F^{m-1}}\varphi(x)$$

は $\mathrm{SL}_2(F)\times\mathscr{N}(F)$-不変な汎函数 $\Theta:\mathcal{S}(\mathbb{A}^{m-1})\to\mathbb{C}$ を定め, 群 $\mathscr{J}(\mathbb{A})$ 上のテータ関数 $\Theta(\omega_R^\psi(v\tilde{g}')\phi_R)$ を与える.

2.2 フーリエ-ヤコビ係数

定理 1.5 のフーリエ級数が絶対収束し, ジーゲル方物型部分

$$P_m=\{\mathfrak{m}(a)\mathfrak{n}(b)\mid a\in\mathrm{GL}_m,\ b\in\mathrm{Sym}_m\}$$

の F 有理点で左不変な $\mathrm{Mp}(W_m)_\mathbb{A}$ 上の関数を与えることは容易に分かる. 群 $Sp_m(F)$ は $P_m(F)$ と $\mathrm{SL}_2(F)$ で生成されるので, そのような $P_m(F)\backslash\mathrm{Mp}(W_m)_\mathbb{A}$ 上の関数 $\mathcal{F}$ が離散部分群 $Sp_m(F)$ で不変であることを示すには, 全ての $R\in\mathrm{Sym}_{m-1}^+$ に対して部分フーリエ係数

$$\mathcal{F}^R(\tilde{g})=\int_{\mathrm{Sym}_{m-1}(F)\backslash\mathrm{Sym}_{m-1}(\mathbb{A})}\mathcal{F}\left(\left(\left(\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},1\right)\tilde{g}\right)\right)\overline{\psi^R(z)}\,\mathrm{d}z$$

が離散部分群 $\mathrm{SL}_2(F)$ に関して左不変であることを示せば十分である. さらに $\mathcal{F}^R$ が $\mathrm{SL}_2(F)$ に関して左不変であることは全ての局所定数コンパクト台関数 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A}_\mathbf{f}^{m-1})$ に対してフーリエヤコビ係数

$$\mathcal{F}_\phi^R(\tilde{g}')=\int_{\mathscr{N}(F)\backslash\mathscr{N}(\mathbb{A})}\mathcal{F}(v\tilde{g}')\overline{\Theta(\omega_R^\psi(v\tilde{g}')\phi_R)(0)}\,\mathrm{d}v$$

が $\mathrm{SL}_2(F)$ に関して左不変であることと同値である.

2.3 定理 1.5 の証明

池田氏 [7] の最初の証明では, アイゼンシュタイン級数が用いられているが, 今回の証明には全く現れない. 退化主系列表現の表現論を駆使し, 主として局所的議論を用いて証明されることに特徴があり, [7] の証明と比べても簡明である.

次の積分は絶対収束しないが解析接続により意味を持ち, $A_m^{\psi_{\mathfrak{p}}}(\mu_{\mathfrak{p}}) \otimes \overline{\omega_R^{\psi_{\mathfrak{p}}}}$ から $A_1^{\psi_{\mathfrak{p}}}(\mu_{\mathfrak{p}}\hat{\chi}_{\mathfrak{p}}^{\det R})$ への $\mathscr{N}(F_{\mathfrak{p}})$-不変かつ $\mathrm{Mp}(W_1)_{\mathfrak{p}}$-同変な全射準同型を与える:

$$\beta_R^{\psi_{\mathfrak{p}}}(\tilde{g}'_{\mathfrak{p}}; h_{\mathfrak{p}} \otimes \bar{\phi}_{\mathfrak{p}}) = \prod_{j=1}^{[(m-1)/2]} L(m'+2j, \mu_{\mathfrak{p}}^2)$$
$$\times \int_{F_{\mathfrak{p}}^{m-1}} \int_{\mathrm{Sym}_{m-1}(F_{\mathfrak{p}})} h_{\mathfrak{p}}\left(\left(\left(\left(\begin{array}{cc|c} & 1 & -\mathbf{1}_{m-1} \\ \hline \mathbf{1}_{m-1} & & \\ & & 1 \end{array}\right)\mathbf{u}(x,0;z), 1\right)\tilde{g}'_{\mathfrak{p}}\right)\right.$$
$$\times \overline{(\omega_R^{\psi_{\mathfrak{p}}}(\mathbf{u}(x,0;z)\tilde{g}'_{\mathfrak{p}})\phi_{\mathfrak{p}})(0)}\, \mathrm{d}z\mathrm{d}x \times \begin{cases} 1 & m\text{ が奇数のとき}, \\ L\left(\frac{m+1}{2}, \mu_{\mathfrak{p}}\hat{\chi}_{\mathfrak{p}}^{(-1)^{m/2}}\right) & m\text{ が偶数}. \end{cases}$$

これを用いて, $\mathscr{N}(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$-不変かつ $\mathrm{Mp}(W_1)_{\mathbf{f}}$-同変な全射準同型

$$\beta_R^{\psi_{\mathbf{f}}} : A_m^{\psi_{\mathbf{f}}}(\mu_{\mathbf{f}}) \otimes \overline{\omega_R^{\psi_{\mathbf{f}}}} \twoheadrightarrow A_1^{\psi_{\mathbf{f}}}(\mu_{\mathbf{f}}\hat{\chi}_{\mathbf{f}}^{\det R})$$

をテンソル積

$$\beta_R^{\psi_{\mathbf{f}}}(\otimes_{\mathfrak{p}}(h_{\mathfrak{p}} \otimes \bar{\phi}_{\mathfrak{p}})) = \prod_{\mathfrak{p}} \beta_R^{\psi_{\mathfrak{p}}}(h_{\mathfrak{p}} \otimes \bar{\phi}_{\mathfrak{p}})$$

により定義する. 右辺の無限積は実質的に有限積である.

定理 1.5 の証明は, 次式により $m=1$ の場合に帰着される:

$$\iota_m^{\eta}(h)_{\phi}^{R} = \iota_1^{\eta \det R}(\beta_R^{\psi_{\mathbf{f}}}(h \otimes \bar{\phi})).$$

$m=1$ の場合は, Waldspurger [19, 20] の志村対応の理論そのものなので, 証明は完結する. 上の関係式から埋め込み $A_m^{\psi_{\mathbf{f}}}(\mu_{\mathbf{f}}) \hookrightarrow \mathfrak{C}_{(2\kappa+m)/2}^{(m)}$ が存在すれば, そのフーリエ-ヤコビ係数が埋め込み $A_1^{\psi_{\mathbf{f}}}(\mu_{\mathbf{f}}) \hookrightarrow \mathfrak{C}_{(2\kappa+1)/2}^{(1)}$ を与える. 故に定理 1.3 の必要条件が従う.

注意 2.1. 次式はジャッケ積分の変数変換からすぐに従う:

$$w_{\xi}^{\mu_{\mathbf{f}}} \circ \mathbf{m}(a) = \mu_{\mathbf{f}}(\det a)^{-1} w_{{}^t a\xi a}^{\mu_{\mathbf{f}}}, \qquad a \in \mathrm{GL}_m(F).$$

特に ${}^t a\xi a = \xi$ のとき

$$w_{\xi}^{\mu_{\mathbf{f}}} \circ \mathbf{m}(a) = \mu_{\mathbf{f}}(\det a)^{-1} w_{\xi}^{\mu_{\mathbf{f}}}.$$

符号条件の必要性はこのことからも容易に分かる.

重複度 1 も (重さ半整数の) ヒルベルト形式の重複度 1 定理から R を動かしたときのフーリエヤコビ係数のフーリエ係数の間に様々な関係式が得られ, 結局定理 1.5 のような係数に限られることから証明される.

3 ヒルベルト-エルミート尖点形式へのリフティング

ヒルベルト-エルミート尖点形式に関してもヒルベルト-ジーゲル尖点形式の場合に類似したリフトを構成することができる. ヒルベルト-ジーゲル尖点形式のフーリエ係数が F 上の正定値二次形式により配列されるのに対して, ヒルベルト-エルミート尖点形式のフーリエ係数は CM 拡大 E/F に関する正定値エルミート形式により配列される. エルミート形式の理論が二次形式の理論に比べて簡単なことはよく知られているが, 実はリフティングの場合もヒルベルト-エルミート尖点形式へのリフティングの方が断然簡単である. 現状, ヒルベルト-ジーゲル尖点形式へのリフティングには制限があり, 超尖点的表現を局所表現に持たない場合にしか適用できないが, ヒルベルト-エルミート尖点形式へのリフティングはすべてのヒルベルト尖点形式に適用可能である. このことを説明して本稿を終える.

3.1 ヒルベルト-エルミート尖点形式

ヒルベルト-エルミート尖点形式の定義はヒルベルト-ジーゲル尖点形式の定義にそっくりであるが, ここではユニタリ群 $\mathrm{U}(n,n)$ ではなく, その similitude 群 $\mathrm{GU}(n,n)$ 上の尖点形式を考える. 敢えて $\mathrm{GU}(n,n)$ を考えること定理 3.2 の定式化する上で重要な意味がある.

E を CM 体, 即ち総実体 F の総虚二次拡大とし, そのアデール環を $\mathbb{E}$, E の F 上非自明自己同型を $a \mapsto a^\tau$, 二次拡大 E/F に対応する F のイデール類群の位数 2 の指標を $\epsilon_{E/F} = \prod_v \epsilon_{E_v/F_v}$ と表す. n 次エルミート行列の空間を

$$\mathrm{Her}_n = \{z \in \mathrm{R}^E_F \mathrm{M}_n \mid {}^t z^\tau = z\}$$

と書く. ヴェイユの係数制限を R^E_F と書いた. 下記の行列群を考える:

$$\begin{aligned} &\mathrm{GU}(n,n) &(3.1)\\ &= \left\{ g \in \mathrm{R}^E_F \mathrm{GL}_{2n} \,\middle|\, g \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix} {}^t g^\tau = \lambda_n(g) \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_m \\ \mathbf{1}_m & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_n(g) \in \mathrm{GL}_1 \right\}. \end{aligned}$$

準同型 $\lambda_n : \mathrm{GU}(n,n) \to \mathrm{GL}_1$ の核は, 準分裂なユニタリ群 $\mathrm{U}(n,n)$ である. 二つの準同型 $\mathbf{m} : \mathrm{R}^E_F \mathrm{GL}_n \to G_n$ と $\mathbf{n} : \mathrm{Her}_n \to G_n$ を以下で定義する:

$$\mathbf{m}(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t(A^{-1})^\tau \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & z \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}.$$

E 上の n 次エルミート行列 B に対して指標 $\psi^B_{\mathbf{f}} = \prod_{\mathfrak{p}} \psi^B_{\mathfrak{p}} : \mathrm{Her}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{f}}) \to \mathbb{C}^\times$ を $\psi^B_{\mathfrak{p}}(z) = \psi_{\mathfrak{p}}(\mathrm{tr}(Bz_{\mathfrak{p}}))$ のように定義する. n 次正定値複素エルミート行列全体を $\mathrm{Her}_n(\mathbb{R})^+$, そして E 上 n 次総正定値エルミート行列全体を Her^+_n と表す.

各実素点 $v \in \mathfrak{S}_\infty$ に関して, $\mathrm{GU}(n,n;F_v)$ の単位元の連結成分を $\mathrm{GU}(n,n;F_v)^+$ と書く. この実リー群はエルミート上半空間

$$\mathfrak{H}_m = \{Z \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \sqrt{-1}({}^t Z^\tau - Z) \in \mathrm{Her}_n(F_v)^+\}$$

に推移的に作用する. 即ち, $g_v = \begin{pmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{pmatrix}$ のように書けば,

$$g_v Z_v = (A_v Z_v + B_v)(C_v Z_v + D_v)^{-1}.$$

整数の組 $\varkappa \in \mathbb{Z}^d$ に対して, $\mathbb{E}_\infty^\times$ の指標 $\varepsilon^\varkappa$ を

$$\varepsilon^\varkappa(a) = \prod_{v \in \mathfrak{S}_\infty} \left(\frac{a_v}{a_v^\tau}\right)^{\varkappa_v}$$

により定義する. さて, $\mathrm{GU}(n,n;\mathbb{A}_\infty)^+ = \prod_{v\in\mathfrak{S}_\infty} \mathrm{GU}(n,n;F_v)^+$ と書き, 保型因子 $j_\ell^\varkappa : \mathrm{GU}(n,n;\mathbb{A}_\infty)^+ \times \mathfrak{H}_n^d \to \mathbb{C}^\times$ を $\varkappa, \ell \in \mathbb{Z}^d$ に対して, 積

$$j_\ell^\varkappa(g,Z) = \varepsilon^\varkappa(\det g) \prod_{v\in\mathfrak{S}_\infty} \det(C_v Z_v + D_v)^{\ell_v}$$

として定義する. $g \in \mathrm{GU}(n,n;\mathbb{A}_\infty)^+$ と上半空間 $\mathfrak{H}_n^d$ 上の関数 $\mathcal{F}$ に対して, 新たな関数 $\mathcal{F}|_\ell^\varkappa g$ を関係式

$$\mathcal{F}|_\ell^\varkappa g(Z) = \mathcal{F}(gZ) j_\ell^\varkappa(g,Z)^{-1}$$

により定義する. 上半空間 $\mathfrak{H}_n^d$ の原点及び $\mathrm{U}(n,n;\mathbb{A}_\infty)$ の標準的極大コンパクト部分群を下記のように定義する:

$$\mathbf{i}_n = (\sqrt{-1}\mathbf{1}_n, \ldots, \sqrt{-1}\mathbf{1}_n) \in \mathfrak{H}_n^d,$$
$$K_n = \{g \in \mathrm{U}(n,n;\mathbb{A}_\infty) \mid g(\mathbf{i}_n) = \mathbf{i}_n\}.$$

定義 3.1 (ヒルベルト-エルミート尖点形式). 次数 n, 重さ $\ell \in \mathbb{Z}^d$, 指標 $\varepsilon^\varkappa$ のヒルベルト-エルミート尖点形式 $\mathcal{F}$ とは, 次式の対称性と下記の (正則及び急減少) 条件を満たす群 $\mathrm{GU}(n,n;\mathbb{A})$ 上の滑らか関数である:

$$\mathcal{F}(\gamma g k) = \mathcal{F}(g) j_\ell^\varkappa(k,\mathbf{i}_n)^{-1} \quad (\gamma \in \mathrm{GU}(n,n;F),\ g \in \mathrm{GU}(n,n;\mathbb{A}),\ k \in K_n)$$

K_n に関する性質により, 各有限アデール $\Delta \in \mathrm{GU}(n,n;\mathbb{A}_\mathbf{f})$ に対して, 上半空間上の関数 $\mathcal{F}_\Delta : \mathfrak{H}_n^d \to \mathbb{C}$ を以下で定義できる:

$$\mathcal{F}_\Delta|_\ell^\varkappa g(\mathbf{i}_n) = \mathcal{F}(g\Delta), \qquad g \in \mathrm{GU}(n,n;\mathbb{A}_\infty)^+.$$

この関数 $\mathcal{F}_\Delta$ が以下のようなフーリエ展開を持つ正則関数であるとする:

$$\mathcal{F}_\Delta(Z) = \sum_{B\in\mathbf{Her}_n^+} |\det B|^{\ell/2} \mathbf{w}_B(\Delta,\mathcal{F}) \mathbf{e}_\infty(\mathrm{tr}(BZ))$$

ここで, $\mathbf{w}_B(\mathcal{F})$ は有限アデール群 $\mathrm{GU}(n,n;\mathbb{A}_\mathbf{f})$ 上の滑らか関数である. 次数 n, 重さ $\ell \in \mathbb{Z}^d$, 指標 $\varepsilon^\varkappa$ のヒルベル-エルミート尖点形式の空間を $\mathfrak{C}_\ell^{n,\varkappa}$ と表す.

3.2 ヒルベルト-エルミート尖点形式の構成

まず F のイデール類群のヘッケ指標 ω を固定し, 前と同じように $\omega_\infty^2 = 1$ を仮定する. さらに ω を E のイデール類群のヘッケ指標 χ に拡張する. そのような拡張は存在するが, 一意的ではない. どれでもよいので, χ を固定しよう. χ の無限イデール $\mathbb{E}_\infty^\times$ への制限を ω_∞, 有限イデール $\mathbb{E}_\mathbf{f}^\times$ への制限を $\omega_\mathbf{f}$ と書くことにする. ω

の仮定より整数の組 $\varkappa(\chi) \in \mathbb{Z}^d$ が存在して, χ_∞ は $\varepsilon^{\varkappa(\chi)}$ のように表される. さて, $\pi_{\mathbf{f}} \simeq \otimes'_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$ の既約許容的ユニタリ生成的表現であり, ω を中心指標に持つものとする. $\mathrm{GU}(1,1)$ は直積 $\mathrm{R}^E_F\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$ の対角部分群 GL_1 による商なので, テンソル積 $\chi_{\mathbf{f}}^{-1} \boxtimes \pi_{\mathbf{f}}$ を $\mathrm{GU}(1,1;\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$ の既約表現と見做すことができる.

以下では常に n は奇数とする. $\mathrm{GU}(n,n)$ の放物型部分群の中で, その Levi 部分群が直積 $(\mathrm{R}^E_F\mathrm{GL}_2)^{(n-1)/2} \times \mathrm{GU}(1,1)$ に同型となるもの $\mathfrak{P}_{\mathrm{e}}$ を選ぶ. このような放物型部分群は, 共役の差を除けば一意的である. 有限アデール群 $\mathfrak{P}_{\mathrm{e}}(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$ のモジュラス指標を $\delta_{\mathfrak{P}_{\mathrm{e}}}$ と書く. ガロア捻り ${}^{\tau}\chi$ は, χ に共役写像 $a \mapsto a^{\tau}$ を合成したものである. 次の誘導表現は, 唯一つの既約部分表現 $\Pi_{\mathbf{f}}$ を持つ:

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{P}_{\mathrm{e}}(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})}^{\mathrm{GU}(n,n;\mathbb{A}_{\mathbf{f}})} \delta_{\mathfrak{P}_{\mathrm{e}}}^{-1/4} \otimes \{({}^{\tau}\chi_{\mathbf{f}}^{-1} \otimes \pi_{\mathbf{f}}^{E})^{\boxtimes(n-1)/2} \boxtimes (\chi_{\mathbf{f}}^{-1} \boxtimes \pi_{\mathbf{f}})\}.$$

ここで, $\pi_{\mathbf{f}}^{E} = \otimes'_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}^{E_{\mathfrak{p}}}$ は $\pi_{\mathbf{f}}$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{E}_{\mathbf{f}})$ への二次基底変換である.

(Q3) いつ埋め込み $\Pi_{\mathbf{f}}, \mu_{\mathbf{f}}^{n}) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{\ell}^{n,\varkappa}$ が存在するか?

(Q4) 存在するとき, どのように与えられるか?

各次節で $B \in \mathrm{Her}_n^+$ に関する退化 Whittaker 模型 $\beth_B^{\chi_{\mathbf{f}}} : \Pi_{\mathbf{f}} \to \mathbb{C}$ を具体的に構成する. さらに組 $\{\beth_B^{\chi_{\mathbf{f}}}\}_{B\in\mathrm{Her}_n^+}$ を, 全ての $z \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{A}_{\mathbf{f}})$, $\xi \in F_+^{\times}$, $A \in \mathrm{GL}_n(E)$, $B \in \mathrm{Her}_n^+$ に対して次の条件を満足するように選ぶことができる:

$$\beth_B^{\chi_{\mathbf{f}}} \circ \Pi_{\mathbf{f}}(\mathbf{n}(z)\mathbf{d}(\xi)\mathbf{m}(A)) = \varepsilon^{-\varkappa(\chi)}(\det A)\psi(\mathrm{tr}(Bz))\beth^{\chi_{\mathbf{f}}}_{\xi^{-1}{}^tA^{\tau}BA}. \tag{3.2}$$

定理 3.2 ([22]). n は奇数であり, $\pi_{\mathbf{f}}$ は重さ κ のヒルベルト尖点形式の空間 $\mathfrak{C}_{\kappa}^{\omega}$ のある既約成分に同型であるとする. $\varkappa = \frac{1}{2}(\kappa + n - 1 + \varkappa(\chi))$ とおく. このとき, 次のフーリエ級数

$$J_{\kappa}^{\varkappa}(f)_{\Delta}(Z) = \sum_{B\in\mathrm{Her}_n^+} |\det B|^{(\kappa+n-1)/2}\beth_B^{\chi_{\mathbf{f}}}(\Pi_{\mathbf{f}}(\Delta)f)\mathbf{e}_{\infty}(\mathrm{tr}(BZ))$$

は, 次数 n, 重さ $\kappa+n-1$, 指標 $\varepsilon^{\varkappa}$ のヒルベルト-エルミート尖点形式である.

定理 3.2 は池田保氏のリフティング [8] を特別な場合として含んでいる.

3.3 退化 Whittaker 模型の構成

線形汎関数 $\beth_B^{\chi_{\mathbf{f}}}$ は, 局所表現の汎関数 $\beth_B^{\chi_{\mathfrak{p}}}$ のテンソル積として構成される. 以下, F の有限素点 $\mathfrak{p}$ を固定し, 局所的設定に切り替える. 即ち, $F = F_{\mathfrak{p}}$, $\chi = \chi_{\mathfrak{p}}$, $\pi = \pi_{\mathfrak{p}}$, $\Pi = \Pi_{\mathfrak{p}}$, ..., etc.

本節では $\mathrm{GU}(n,n)$ を $2n$ 次の分裂歪エルミート形式付きベクトル空間 $(W_n, \langle\ ,\ \rangle)$ の similitude 群と見做す. 一方, W_n の Witt 基底 $e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n$ を固定して, 行列表示 (3.1) も利用する. $\mathrm{GU}(n,n)$ は W_n の等方部分空間に作用する. ジーゲル放物型部分群

$$\{\mathbf{d}(\xi)\mathbf{m}(A)\mathbf{n}(z) \mid \xi \in F^{\times},\ A \in \mathrm{GL}_n(E),\ z \in \mathrm{Her}_n\}$$

は $e_1,\dots,e_n$ が生成する等方部分空間の安定部分群である．そのべき単根基を $N_n=\{\mathbf{n}(z)\mid z\in \mathrm{Her}_n\}$ と書く．各 $1\le i\le \frac{n-1}{2}$ に対して $\mathfrak{X}_{2i}$ を次の等方ベクトルで生成される W_n の部分空間とする:

$$e_1, f_2, e_3, f_4, \dots, e_{2i-1}, f_{2i}.$$

放物型部分群 $\mathfrak{P}_{\mathbf{e}}$ を, 次の等方部分空間からなる旗

$$\mathfrak{X}_2\subset \mathfrak{X}_4\subset\cdots\subset \mathfrak{X}_{n-1}\subset \mathfrak{X}_{n-1}\oplus Ee_n$$

の安定部分群となるように選ぶ.

$\mathcal{W}(\pi)$ を π の ψ に関する Whittaker 模型, すなわち次の性質を持つ $\mathrm{GL}_2(F)$ 上の関数の空間の部分空間で, $\mathrm{GL}_2(F)$ の右移動による作用が π と同型になるものである:

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)=\psi(x)f(g).$$

このような空間は一意的であることが知られている．同様に $\mathcal{W}(\pi^E)$ を π^E の $\psi\circ\mathrm{Tr}^E_F$ に関する Whittaker 模型とする．Π を次の空間の唯一つの既約部分表現と見做すことにする:

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{GU}(n,n)}_{\mathfrak{P}_{\mathbf{e}}}\delta^{-1/4}_{\mathfrak{P}_{\mathbf{e}}}\otimes\{({}^{\tau}\chi^{-1}\otimes\mathcal{W}(\pi^E))^{\boxtimes(n-1)/2}\boxtimes(\chi^{-1}\boxtimes\mathcal{W}(\pi))\}.$$

n 次の分裂エルミート行列を次のように定義する:

$$H_n=\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc|c} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ \hline & & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ \hline & & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 & 0 & \\ \hline & & & & & & & 1 \end{array}\right)\in \mathrm{Her}_n.$$

退化 Whittaker 模型 $\beth^{\chi}_{H_n}:\Pi\to\mathbb{C}$ を以下の積分で定義する:

$$\beth^{\chi}_{H_n}(f)=\int_{N_n\cap\mathfrak{P}_{\mathbf{e}}\backslash N_n} f(\mathbf{n}(z))\overline{\psi(\mathrm{tr}(H_nz))}\,\mathrm{d}z.$$

この積分が収束し, Π 上 0 でないことは初等的フーリエ解析から容易に分かる．次の不変性は重要である.

命題 3.3. もし $\xi^{-1}\,{}^{t}A^{\tau}H_nA=H_n$ であれば,

$$\beth^{\chi}_{H_n}\circ\Pi(\mathbf{d}(\xi)\mathbf{m}(A))=\chi(\xi^{(1-n)/2}\det A)\beth^{\chi}_{H_n}.$$

注意 3.4. $E=F\oplus F$ のとき, $\mathrm{U}(n,n)\simeq\mathrm{GL}_{2n}(F)$ であり, 上の性質を持つ Whittaker 模型は Shalika 模型と呼ばれる.

$\mathrm{GU}(n,n)$ を考え, n を奇数にしたのは, 次の事実を利用するためである:

補題 3.5 (Landherr). n が奇数のとき, 任意の $B \in \mathrm{Her}_n \cap \mathrm{GL}_n(E)$ に対して, $\xi \in F^\times$ と $A \in \mathrm{GL}_n(E)$ が存在して, $B = \xi^{-1}\,{}^t\!A^\tau H_n A$.

定義 3.6. $B \in \mathrm{Her}_n \cap \mathrm{GL}_n(E)$ に対して, $\xi \in F^\times$ と $A \in \mathrm{GL}_n(E)$ を $B = \xi^{-1}\,{}^t\!A^\tau H_n A$ となるように選び, $\gimel_B^\chi : \mathit{\Pi} \to \mathbb{C}$ を次式で定義する:

$$\gimel_B^\chi := \chi(\xi^{(1-n)/2}\det A)^{-1}\gimel_{H_n}^\chi \circ \mathit{\Pi}(\mathbf{d}(\xi)\mathbf{m}(A)).$$

この定義は命題3.3 より ξ と A の選び方に依存しない.

定義 3.6 より自動的に (3.2) が成立する.

実は π が超尖点的でなければ, $\mathit{\Pi}$ や $\gimel_B^\chi$ をもっと簡単に記述することができる. 乗法群 $E^\times$ の指標 ν と $F^\times$ の指標 μ に対して, $\mathrm{GU}(n,n)$ の退化主系列表現 $J_n(\nu,\mu)$ とは, 下記の性質を持つ $\mathrm{GU}(n,n)$ の滑らか関数 h の空間への右移動作用により得られる表現である:

$$h(\mathbf{d}(\xi)\mathbf{m}(A)\mathbf{n}(z)g) = \mu(\xi)\nu(\det A)|\xi^{-n}\mathrm{N}_F^E(\det A)|^{n/2}h(g)$$
$$(\xi \in F^\times,\ A \in \mathrm{GL}_n(E),\ z \in \mathrm{Her}_n(F),\ g \in \mathrm{GU}(n,n)).$$

以前と同様ジャッケ積分 $w_B^\chi : J_n(\nu,\mu) \to \mathbb{C}$

$$w_B^\nu(h) = |\det B|^{n/2}\prod_{j=1}^{n} L(j,\nu^\dagger\epsilon_{E/F}^{n+j})\int_{\mathrm{Her}_n(F)} h\left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}\mathbf{n}(z)\right)\overline{\psi(\mathrm{tr}(Bz))}\mathrm{d}z$$

(詳しくは [11] を参照). 指標 ν の $F^\times$ へ制限して得られる指標を $\nu^\dagger$ と書いた.

命題 3.7. π が主系列表現 $I(\mu,\mu^{-1}\omega)$ の部分表現であるとき, $\mathit{\Pi}$ は退化主系列表現 $J_n({}^\tau\chi^{-1}\cdot\mu\circ\mathrm{N}_F^E, \mu^{-n}\omega^{(n+1)/2})$ の唯一つの既約部分表現に同型であり, $\gimel_B^\chi$ はジャッケ積分 $\mu(\det B)^{-1}w_B^{{}^\tau\chi^{-1}\cdot\mu\circ\mathrm{N}_F^E}$ に対応する.

2.2 節のように $z \in \mathrm{Her}_{n-1}$ と $x, y \in E^{m-1}$ に対して, 以下の記法を用いる:

$$\mathbf{v}(x,y;z) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{m-1} & x & z - y\,{}^t\!x^\tau & y \\ 0 & 1 & {}^t\!y^\tau & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbf{1}_{m-1} & 0 \\ & & -\,{}^t\!x^\tau & 1 \end{array}\right).$$

このような行列からなる $\mathrm{GU}(n,n)$ の部分群を $\mathcal{N}$ と書く. 以下の埋め込みにより $\mathrm{GL}_2(F)$ を $\mathrm{GU}(n,n)$ の部分群と見做す:

$$g' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{m-1} & & & \\ & a' & & b' \\ \hline & & (\det g')\mathbf{1}_{m-1} & \\ & c' & & d' \end{array}\right).$$

ヤコビ群 $U(1,1) \ltimes \mathcal{N}$ は半直積 $\mathcal{J} = \mathrm{GU}(1,1) \ltimes \mathcal{N}$ の部分群である.

非退化エルミート行列 $S \in \mathrm{Her}_{m-1}$ を固定する. そのユニタリ群と similitude 群を以下で定義する:

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(S) &= \{A \in \mathrm{GL}_{n-1}(E) \mid {}^{t}A^{\tau}SA = S\}, \\ \mathrm{GU}(S) &= \{A \in \mathrm{GL}_{n-1}(E) \mid {}^{t}A^{\tau}SA = \lambda_S(A)S,\ \lambda_S(A) \in \mathrm{GL}_1\}. \end{aligned}$$

直積群 $\mathrm{GU}(S) \times \mathrm{GU}(1,1)$ の次の部分群を考える:

$$R_S = \{(A, g') \in \mathrm{GU}(S) \times \mathrm{GL}_2(F) \mid \lambda_S(A) = \det g\}.$$

ヤコビ群のヴェイユ表現は $R_S \ltimes \mathcal{N}$ の表現 Ω_S^{χ} に拡張することができる.

$\beth_B^{\chi}$ は, フーリエ-ヤコビ加群に関してもある種の性質を持っていて, 定理 3.2 の証明に重要な役割を果たす. 次の積分は $U_S \ltimes \mathcal{N}$-不変な $\varPi \otimes \Omega_S^{\chi}$ の汎関数を与えることが容易に分かる:

$$\int_{E^{n-1}} \beth_{S\oplus 1}^{\chi}\left(\varPi\left(\mathbf{m}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)f\right)\overline{\phi(x)}\,\mathrm{d}x.$$

従って, $\mathrm{GL}_2(F)$ 上の関数 W を以下のように定義することができる:

$$W(g) = \int_{E^{n-1}} \beth_{S\oplus 1}^{\chi}\left(\varPi\left(\mathbf{m}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)(A,g)f\right)\overline{(\Omega_S^{\chi}(A,g)\phi)(x)}\,\mathrm{d}x.$$

ここで, $A \in \mathrm{GU}(S)$ を $\det g = \lambda_S(A)$ となるように選んだ. U_S-不変性より, 右辺は A の取り方によらない. 以上の設定で次の命題が成立する:

命題 3.8. $W \in \mathcal{W}(\pi)$.

注意 3.9. π が超尖点的でなければ, 命題 3.7 を使って命題 3.3 と命題 3.8 を直接証明することができる. 実は, $\beth_B^{\chi}$ はある留数的保型表現の B に関するフーリエ係数の分解に現れる. π が超尖点的であるときは, π を GL_2 の尖点的保型表現に局所因子として埋め込んで, この事実を利用して命題 3.3 と命題 3.8 を証明する.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 26800017 の助成を受けたものです.

References

[1] J. Arthur, Unipotent automorphic representations: conjectures, Orbites unipotentes et représentations, II. Astérisque No. 171–172 (1989), 13–71.

[2] J. Arthur, The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups, American Mathematical Society Colloquium Publications, **61**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. xviii+590 pp.

[3] W. T. Gan, The Saito-Kurokawa space of PGSp_4 and its transfer to inner forms, Eisenstein series and applications, 87–123, Progr. Math., **258**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.

[4] S. Hayashida, Fourier-Jacobi expansion and the Ikeda lift, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **81** (2011) 1–17.

[5] K. Hiraga and T. Ikeda, On the Kohnen plus space for Hilbert modular forms of half-integral weight I, Compos. Math. **149** (2013), no. 12, 1963–2010.

[6] T. Ikeda, On the theory of Jacobi forms and the Fourier-Jacobi coefficients of Eisenstein series, J. Math. Kyoto Univ. **34** (1994) 615–636.

[7] T. Ikeda, On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$, Ann. of Math. **154** (2001) 641–681.

[8] T. Ikeda, On the lifting of hermitian modular forms, Compositio Math. **144** (2008) 1107-1154.

[9] T. Ikeda, On the lifting of automorphic representations of $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ to $Sp_{2n}(\mathbb{A})$ or $\widetilde{Sp}_{2n+1}(\mathbb{A})$ over a totally real field, preprint.

[10] T. Ikeda and S. Yamana, On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Siegel cusp forms, preprint.

[11] M. Karel, Functional equations of Whittaker functions on p-adic groups, Amer. J. Math. **101** (1979), no. 6, 1303–1325.

[12] H. H. Kim and T. Yamauchi, Cusp forms on the exceptional group of type E_7, Compos. Math. to appear.

[13] S. S. Kudla and S. Rallis, Ramified degenerate principal series representations for $Sp(n)$, Israel J. Math. **78** (1992), no. 2-3, 209–256.

[14] S. S. Kudla, W. J. Sweet, Jr., Degenerate principal series representations for $U(n,n)$, Israel J. Math. **98** (1997) 253–306.

[15] T. Oda, On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. **231** (1997) 97–144.

[16] I. Piatetski-Shapiro, On the Saito-Kurokawa lifting, Invent. Math., **71** (1983) pp. 309–338.

[17] T. Sugano, On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **31** (1985), no. 3, 521–568.

[18] W. J. Sweet, Jr., Functional equations of p-adic zeta integrals and representations of the metaplectic group, preprint (1995)

[19] J.-L. Waldspurger, Correspondance de Shimura, J. Math. Pures et Appl. (9) **59** (1980), no. 1, 1–132.

[20] J.-L. Waldspurger, Correspondance de Shimura et quaternions, Forum Math. **3** (1991), no. 3, 219–307.

[21] S. Yamana, On the lifting of elliptic cusp forms to cusp forms on quaternionic unitary groups, J. Number Theory **130** (2010), no. 11, 2480–2527.

[22] S. Yamana, On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Hermitian cusp forms,

Graduate School of Mathematics, Kyoto University, Kitashirakawa, Kyoto, 606-8502, Japan
e-mail:yamana07@math.kyoto-u.ac.jp