数理解析研究所講究録
第2036巻 2017年 173-182

ある2変数概均質ゼータ関数から構成される Maaß 形式

千葉工業大学　数学教室　杉山和成　(Kazunari Sugiyama)
(Department of Mathematics, Chiba Institute of Technology)

本稿の内容は，佐藤文広氏（立教大学・津田塾大学）と上野隆彦氏（聖マリアンナ医科大学）との共同研究に基づく．

1　2次形式に関連する2変数概均質ゼータ関数

$V=\mathbb{C}^{m+2}$ とし，$Q(x)$ を V 上の非退化整数係数2次形式とする．$Q(x)$ を

$$Q(x)=x_0x_{m+1}+\sum_{1\le i,j\le m}a_{ij}x_ix_j,$$

ただし, $a_{ij}=a_{ji}\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\ (i\neq j)$, $a_{ii}\in\mathbb{Z}$, の形に表す．$A=(a_{ij})$ とすると, Q に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & A & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

とかける．P を以下のように定義される $SO(Q)$ の極大放物型部分群とする:

$$P=\left\{ p=\begin{pmatrix} a & -2a\,{}^tuAh & -aA[u] \\ 0 & h & u \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a\in\mathbb{C},\, a\neq 0 \\ h\in SO(A) \\ u\in\mathbb{C}^m \end{matrix} \right\}.$$

群 $P\times GL_1(\mathbb{C})$ は V に

$$\rho(p,t)x=tpx \qquad (x\in V,(p,t)\in P\times GL_1(\mathbb{C})),$$
$$\rho^*(p,t)y=t^{-1}\,{}^tp^{-1}y \qquad (y\in V,(p,t)\in P\times GL_1(\mathbb{C}))$$

により作用するが，このとき三つ組 $(P\times GL_1(\mathbb{C}),\rho,V)$ および $(P\times GL_1(\mathbb{C}),\rho^*,V)$ は概均質ベクトル空間になる．[U] において，これらの概均質ベクトル空間に付随する2変

数ゼータ関数 $\zeta_\varepsilon(w,s), \zeta^*_\eta(w,s)$ の解析的性質が詳しく調べられている．その結果を簡単に紹介しよう．$D = -\det(2A)$ とおく．$n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$r(l,n) = \sharp\{v \in \mathbb{Z}^m/(l\mathbb{Z})^m \mid A[v] \equiv n \mod l\},$$

$$r^*(l,n) = \begin{cases} \sharp\{v^* \in \mathbb{Z}^m/2lA\mathbb{Z}^m \mid 2^{-1}\cdot|D|A^{-1}[v^*] \equiv n \mod 2|D|l\}, & \text{if } m \text{ is odd,} \\ \sharp\{v^* \in \mathbb{Z}^m/2lA\mathbb{Z}^m \mid 4^{-1}\cdot|D|A^{-1}[v^*] \equiv n \mod |D|l\}, & \text{if } m \text{ is even} \end{cases}$$

とおき，2 つの Dirichlet 級数 $Z(n,w)$ および $Z^*(n,w)$ を

$$Z(n,w) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r(l,n)}{l^w}, \qquad Z^*(n,w) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r^*(l,n)}{l^w},$$

と定義する．$Z(n,w)$ および $Z^*(n,w)$ は $\mathrm{Re}(w) > m$ において絶対収束する．このとき，$(P \times GL_1(\mathbb{C}), \rho, V)$ および $(P \times GL_1(\mathbb{C}), \rho^*, V)$ に付随するゼータ関数 $\zeta_\varepsilon(w,s)$ および $\zeta^*_\eta(w,s)$ は次のように書き表される:

$$\zeta_\varepsilon(w,s) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(\varepsilon n, w) n^{-s},$$

$$\zeta^*_\eta(w,s) = \begin{cases} |D|^s \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Z^*(\eta n, w) n^{-s} & (m : \text{even}, |D| \not\equiv 2 \bmod 4), \\ (4|D|)^s \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Z^*(\eta n, w)(4n)^{-s} & (m : \text{even}, |D| \equiv 2 \bmod 4), \\ (2|D|)^s \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Z^*(\eta n, w) n^{-s} & (m : \text{odd}). \end{cases}$$

ここで，$\varepsilon = \pm, \eta = \pm$ は符号である．

[U, Theorem 4.1] において，次の補題が証明されている．

補題 1. ゼータ関数 $\zeta_\varepsilon(w,s)$ および $\zeta^*_\eta(w,s)$ は領域 $\{(w,s) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(w) > m\}$ 上の有理型関数に解析接続され，次の関数等式をみたす．

$$\begin{pmatrix} \zeta^*_+ \\ \zeta^*_- \end{pmatrix} \left(w, \frac{m}{2} + 1 - w - s\right) = \gamma(w,s) \begin{pmatrix} \zeta_+ \\ \zeta_- \end{pmatrix} (w,s).$$

ただし，

$$\gamma(w,s) = 2|D|^{-1/2}(2\pi)^{m/2-w-2s}\Gamma(s)\Gamma\left(w+s-\frac{m}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi(w+2s-p)}{2} & \cos\frac{\pi(w-p)}{2} \\ \cos\frac{\pi(w-q)}{2} & \cos\frac{\pi(w+2s-q)}{2} \end{pmatrix}.$$

ここで，p (resp. q) は A の正の固有値 (resp. 負の固有値) の個数をあらわす．

[U] ではさらに，適当な整数 k をとり w に代入して特殊化すると，$\zeta_\varepsilon(k,s), \zeta_\eta^*(k,s)$ は Weil の逆定理の仮定をみたす Dirichlet 級数になること，すなわち正則保型形式の Mellin 変換として現れるものであることが示されている．(Peter [P] も本質的に同じ Dirichlet 級数を別の方法で研究している．) 今回，変数 w を特殊化する前の $\zeta_\varepsilon(w,s)$ 自身が実解析的保型形式（いわゆる Maaß 形式）の Mellin 変換であることが分かったので，その結果について報告する．

2 $\zeta_\varepsilon(w,s)$ から構成される Maaß 形式

Maaß 形式の定義を，重さ半整数の場合も含めて復習しよう．$\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\, y > 0\}$ を Poincaré 上半平面とし，$G = SL_2(\mathbb{R})$ の被覆群を

$$\widetilde{G} = \left\{ \tilde{g} = (g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varphi);\ \begin{array}{l} g \in G \text{ で}, \varphi(z) \text{ は } \mathcal{H} \text{ 上の正則関数で}, \\ \varphi(z)^2 = \pm(cz+d) \text{ をみたす} \end{array} \right\}$$

と定義する．$l \in \mathbb{Z}$ および関数 $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ に対して，重さ $l/2$ の作用を

$$\left(F\big|_l\, \tilde{g}\right)(z) = F(gz) \cdot \varphi(z)^{-l}$$

と定義する．gz は 1 次分数変換をあらわす．正整数 N（ただし l が奇数のときは $4|N$ を仮定）に対して，$\widetilde{\Gamma}_0(N)$ を $\widetilde{G}$ のレベル N の主合同部分群とする．また，χ を $\bmod N$ の Dirichlet 指標とする．$\mathcal{H}$ 上の複素数値 C^∞ 級関数 $F(z)$ が次の 3 条件をみたすとき，$\widetilde{\Gamma}_0(N)$ に関する重さ $l/2$ の Maaß 形式であるという．

(1) $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_0(N)$ に対して，$\left(F\big|_l\, \gamma\right) = \chi(\gamma) \cdot F$ となる．

(2) F は双曲型ラプラシアン $\Delta = -y^2 \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \dfrac{ily}{2} \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i \dfrac{\partial}{\partial y} \right)$ の固有関数である．すなわち，ある $\Lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\Delta F = \Lambda \cdot F$ となる．

(3) F は各カスプにおいて緩増加である．

我々の主結果は以下の通りである．

定理 1. A の符号を (p,q) とし，$l = p - q$ とおく．また，$D = -\det(2A)$ とし，λ を $\mathrm{Re}(\lambda) > (q+1)/2$ など適当な条件をみたす複素数とする．

$a(n) = Z(n, 2\lambda{+}p{-}1)\ (n \neq 0)$, $\quad a(0) = e^{-\pi l i/2} |D|^{-1/2} Z(0, 2\lambda{+}p{-}1)$, $\quad a(\infty) = \zeta(2\lambda{-}q)$

とおき，$\mathcal{H}$ 上の関数 $F(z)$ を

$$F(z)=a(\infty)\cdot y^{\lambda}+a(0)\cdot\frac{(2\pi)2^{1-2\lambda-\frac{l}{2}}\Gamma(2\lambda+\frac{l}{2}-1)}{\Gamma(\lambda+\frac{l}{2})\Gamma(\lambda)}\cdot y^{1-\lambda-(l/2)}$$
$$+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\pi^{\lambda+\frac{l}{4}}\cdot i^{-\frac{l}{2}}\cdot|n|^{\lambda+\frac{l}{4}-1}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{(1+\mathrm{sgn}(n))\cdot l}{2}\right)}a(n)\cdot y^{-l/4}W_{\frac{l}{4}\cdot\mathrm{sgn}(n),\lambda+\frac{l}{4}-\frac{1}{2}}(4\pi|n|y)\cdot e^{2\pi inx}$$

と定める．ここで，$W_{\mu,\nu}(z)$ は Whittaker 関数である．このとき，F は重さ $l/2=(p-q)/2$ の Maaß 形式になる．$F(z)$ のレベル N は

$$N=\begin{cases}|D| & (m\text{ が偶数かつ }|D|\not\equiv 2 \bmod 4)\\ 4|D| & (m\text{ が偶数かつ }|D|\equiv 2 \bmod 4)\\ 2|D| & (m\text{ が奇数})\end{cases}$$

で与えられ，対応して指標 χ は $\left(\frac{(-1)^{m/2+1}D}{*}\right)$, $\left(\frac{(-1)^{m/2+1}4D}{*}\right)$, $\left(\frac{2|D|}{*}\right)$ となる．

注意 1. (1) [Sh] において，新谷卓郎氏は次のような Dirichlet 級数を研究した: $\mathrm{Re}(s_i)>1$ なる s_1,s_2 に対して，

$$\xi_i(s_1,s_2)=2^{-1}\sum_{n,m=1}A(4m,(-1)^{i-1}n)m^{-s_1}n^{-s_2},$$
$$\xi_i^*(s_1,s_2)=\sum_{n,m=1}A(m,(-1)^{i-1}n)m^{-s_1}(4n)^{-s_2},$$

ただし，$A(m,n)$ は合同式 $x^2\equiv n \bmod m$ の異なる解の個数をあらわす．これらは概均質ベクトル空間 $(B_2(\mathbb{C}),\mathrm{Sym}(2))$ に付随するゼータ関数であり，[U] のゼータ関数 $\zeta_\varepsilon(w,s),\zeta_\eta^*(w,s)$ の特別な場合であると考えられる．Diamantis-Goldfeld [DG] は $\xi_i(s_1,s_2)$, $\xi_i^*(s_1,s_2)$ が重さ 1/2, レベル 4 の実解析的アイゼンシュタイン級数の 1 次結合を Mellin 変換したものであることを示した．

(2) 水野義紀氏により，$\zeta_\varepsilon(w,s),\zeta_\eta^*(w,s)$ と実解析的 Jacobi Eisenstein 級数との関係が調べられている．

3 合同部分群に関する Maaß 形式に対する逆定理

定理 1 の証明には，合同部分群に関する Maaß 形式に対する逆定理を用いる．ごく最近まで，実解析的保型形式に対しては，正則保型形式における Weil の逆定理のよ

うなものはあまり考えられていなかったが，Diamantis と Goldfeld は指標でなく指標和で Dirichlet 級数をひねることにより，Weil の議論を実解析的保型形式に対しても適用できるということを指摘した．我々はさらに，保型超関数の理論と組み合わせることにより，レベルの大きい場合でも容易に適用できるような逆定理を定式化した．(Diamantis-Goldfeld が定式化した逆定理では，各カスプに対応して関数等式をみたす Dirichlet 級数の存在が仮定されており，レベルが大きい場合では，これらの Dirichlet 級数の族を実際に構成することは容易ではない．）保型超関数と Maaß 形式の逆定理の関係については，[Su] を参照していただくこととし，ここでは（[Su] には書いていない）重さが半整数の場合の合同部分群に関する Maaß 形式に対する逆定理のステートメントを述べるにとどめる．

以下では，l は奇数であるとする．

定理 2. N を $4|N$ なる正整数，l を奇数，λ を $\mathrm{Re}(\lambda) \geq (2-l)/4$, $\lambda + (l/4) \notin \mathbb{Z}_{>0}, \lambda \notin (2-l)/4 + \mathbb{Z}_{>0}$ をみたす複素数とする．さらに，χ を mod N の Dirichlet 指標とする．複素数列 $\boldsymbol{a} = \{a(n)\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}, \boldsymbol{b} = \{b(n)\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ で多項式増大度をもつものに対して，Dirichlet 級数 $\xi_\pm(\boldsymbol{a};s), \xi_\pm(\boldsymbol{b};s)$ およびその完備化 $\Xi_\pm(\boldsymbol{a};s), \Xi_\pm(\boldsymbol{b};s)$ を

$$\xi_\pm(\boldsymbol{a};s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(\pm n)}{n^s}, \qquad \Xi_\pm(\boldsymbol{a};s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\xi_\pm(\boldsymbol{a};s),$$
$$\xi_\pm(\boldsymbol{b};s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(\pm n)}{n^s}, \qquad \Xi_\pm(\boldsymbol{b};s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\xi_\pm(\boldsymbol{b};s).$$

により定義する．r を $(N,r)=1$ なる奇素数とし，mod r の任意の Dirichlet 指標 ψ をとる．指標和 $\tau_\psi(n)$ を

$$\tau_\psi(n) = \sum_{\substack{(m,r)=1 \\ \mathrm{mod}\ r}} \psi(m) e^{2\pi\sqrt{-1}mn/r}.$$

と定義し，指標和でひねった Dirichlet 級数 $\xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi;s), \Xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi;s), \xi_\pm(\boldsymbol{b},\psi;s), \Xi_\pm(\boldsymbol{b},\psi;s)$ を

$$\xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi;s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(\pm n)\tau_\psi(\pm n)}{n^s}, \qquad \Xi_\pm(\boldsymbol{a};\psi,s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi;s),$$
$$\xi_\pm(\boldsymbol{b},\psi;s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(\pm n)\tau_\psi(\pm n)}{n^s}, \qquad \Xi_\pm(\boldsymbol{b},\psi;s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\xi_\pm(\boldsymbol{b},\psi;s),$$

により定義する．任意の ψ に対して，次の [A1]–[A4] が成立すると仮定する．

[A1] $\xi_\pm(\boldsymbol{a};s), \xi_\pm(\boldsymbol{b};s)$ は $\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき絶対収束し，全平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される．

[A2] (1) $\Xi_\pm(\boldsymbol{a};s), \Xi_\pm(\boldsymbol{b};s)$ は関数等式

$$\gamma(s)\begin{pmatrix} \Xi_+(\boldsymbol{a};s) \\ \Xi_-(\boldsymbol{a};s) \end{pmatrix} = N^{2-2\lambda-(l/2)-s}\cdot\Sigma(l)\cdot\gamma(2-2\lambda-\tfrac{l}{2}-s)\begin{pmatrix} \Xi_+\left(\boldsymbol{b};2-2\lambda-\frac{l}{2}-s\right) \\ \Xi_-\left(\boldsymbol{b};2-2\lambda-\frac{l}{2}-s\right) \end{pmatrix},$$

をみたす．ここで，$\gamma(s)$ および $\Sigma(l)$ は

$$\gamma(s)=\begin{pmatrix} e^{\pi s\sqrt{-1}/2} & e^{-\pi s\sqrt{-1}/2} \\ e^{-\pi s\sqrt{-1}/2} & e^{\pi s\sqrt{-1}/2} \end{pmatrix},\qquad \Sigma(l)=\begin{pmatrix} 0 & i^l \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

により定義される．

(2) $\Xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi;s),\Xi_\pm(\boldsymbol{b},\psi;s)$ は関数等式

$$\gamma(s)\begin{pmatrix} \Xi_+(\boldsymbol{a},\psi;s) \\ \Xi_-(\boldsymbol{a},\psi;s) \end{pmatrix}=\overline{\chi(r)}\cdot\varepsilon_r^l\left(\frac{-N}{r}\right)\overline{\psi(-N)}\cdot r^{2\lambda+(l/2)-2}\cdot(Nr^2)^{2-2\lambda-(l/2)-s}$$
$$\cdot\Sigma(l)\cdot\gamma(2-2\lambda-\tfrac{l}{2}-s)\begin{pmatrix} \Xi_+\left(\boldsymbol{b},\check{\psi};2-2\lambda-\frac{l}{2}-s\right) \\ \Xi_-\left(\boldsymbol{b},\check{\psi};2-2\lambda-\frac{l}{2}-s\right) \end{pmatrix}.$$

をみたす．ここで，$\check{\psi}$ は

$$\check{\psi}(k)=\overline{\psi(k)}\left(\frac{k}{r}\right).$$

により定義される Dirichlet 指標である．

[A3] $\xi_\pm(\boldsymbol{a};s),\xi_\pm(\boldsymbol{b};s),\xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi,s),\xi_\pm(\boldsymbol{b},\overline{\psi},s)$ は $s=1,2-2\lambda-(l/2)$ においてのみ高々位数 1 の極を持ち，留数は次の関係式をみたす．

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi;s)=\overline{\chi(r)}\cdot\varepsilon_r^l\left(\frac{-N}{r}\right)\cdot\overline{\psi(-N)}\cdot r^{-2\lambda-(l/2)}\cdot\tau_{\check{\psi}}(0)\cdot\operatorname*{Res}_{s=1}\xi_\pm(\boldsymbol{a};s),$$
$$\operatorname*{Res}_{s=2-2\lambda-(l/2)}\xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi;s)=\overline{\chi(r)}\cdot\varepsilon_r^l\left(\frac{-N}{r}\right)\cdot\overline{\psi(-N)}\cdot r^{2\lambda+(l/2)-2}\cdot\tau_{\check{\psi}}(0)\cdot\operatorname*{Res}_{s=2-2\lambda-(l/2)}\xi_\pm(\boldsymbol{a};s),$$
$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left(\overline{\chi(r)}\cdot\varepsilon_r^l\left(\frac{-N}{r}\right)\cdot\overline{\psi(-N)}\cdot r^{2\lambda+(l/2)}\xi_\pm(\boldsymbol{b},\check{\psi};s)\right)=\tau_\psi(0)\operatorname*{Res}_{s=1}\xi_\pm(\boldsymbol{b};s),$$
$$\operatorname*{Res}_{s=2-2\lambda-(l/2)}\left(\overline{\chi(r)}\cdot\varepsilon_r^l\left(\frac{-N}{r}\right)\cdot\overline{\psi(-N)}\cdot r^{2-2\lambda-(l/2)}\xi_\pm(\boldsymbol{b},\check{\psi};s)\right)=\tau_\psi(0)\operatorname*{Res}_{s=2-2\lambda-(l/2)}\xi_\pm(\boldsymbol{b};s).$$

[A4] $\xi_\pm(\boldsymbol{a};s),\xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi;s),\xi_\pm(\boldsymbol{b};s),\xi_\pm(\boldsymbol{b},\psi;s)$ は任意の垂直領域において位数有限である．すなわち，任意の $\alpha_1<\alpha_2(\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R})$ に対して，ある $\tau_0,K,\rho>0$ が存在して，任意の $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$ および $|\tau|>\tau_0$ なる τ に対して，

$$|\xi_\pm(\boldsymbol{a};\alpha+\sqrt{-1}\tau)|,\ |\xi_\pm(\boldsymbol{a},\psi;\alpha+\sqrt{-1}\tau)|<K\cdot e^{|\tau|^\rho}$$
$$|\xi_\pm(\boldsymbol{b};\alpha+\sqrt{-1}\tau)|,\ |\xi_\pm(\boldsymbol{b},\psi;\alpha+\sqrt{-1}\tau)|<K\cdot e^{|\tau|^\rho}$$

が成り立つ．

仮定 [A1]–[A4] の下で,

$$a(0)=\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2\lambda+(l/2)-2}\Gamma(2-2\lambda-\tfrac{l}{2})$$
$$\times\left\{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(2-2\lambda-(l/2))}\operatorname*{Res}_{s=2-2\lambda-(l/2)}\xi_+(\boldsymbol{b};s)+e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(2-2\lambda-(l/2))}\operatorname*{Res}_{s=2-2\lambda-(l/2)}\xi_-(\boldsymbol{b};s)\right\},$$
$$a(\infty)=\frac{1}{2}\left(\operatorname*{Res}_{s=1}\xi_+(\boldsymbol{b};s)+\operatorname*{Res}_{s=1}\xi_-(\boldsymbol{b};s)\right)\times N,$$
$$b(0)=(2\pi)^{2\lambda+(l/2)-2}\Gamma(2-2\lambda-\tfrac{l}{2})$$
$$\times\left\{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(2-2\lambda-(l/2))}\operatorname*{Res}_{s=2-2\lambda-(l/2)}\xi_+(\boldsymbol{a};s)+e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}(2l-2\lambda-(l/2))}\operatorname*{Res}_{s=2-2\lambda-(l/2)}\xi_-(\boldsymbol{a};s)\right\},$$
$$b(\infty)=\frac{i^{-l}}{2}\left(\operatorname*{Res}_{s=1}\xi_+(\boldsymbol{a};s)+\operatorname*{Res}_{s=1}\xi_-(\boldsymbol{a};s)\right),$$

とおき，上半平面 $\mathcal{H}$ 上の関数 $F(z)$ を

$$F(z)=a(\infty)\cdot y^{\lambda}+a(0)\cdot\frac{(2\pi)2^{1-2\lambda-\frac{l}{2}}\Gamma(2\lambda+\frac{l}{2}-1)}{\Gamma(\lambda+\frac{l}{2})\Gamma(\lambda)}\cdot y^{1-\lambda-(l/2)}$$
$$+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{\pi^{\lambda+\frac{l}{4}}\cdot i^{-\frac{l}{2}}\cdot|n|^{\lambda+\frac{l}{4}-1}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{(1+\operatorname{sgn}(n))\cdot l}{2}\right)}a(n)\cdot y^{-l/4}W_{\frac{l}{4}\cdot\operatorname{sgn}(n),\lambda+\frac{l}{4}-\frac{1}{2}}(4\pi|n|y)\cdot e^{2\pi inx}$$

とおくと，$F(z)$ は $\widetilde{\Gamma}_0(N)$ に関する重さ $l/2$，固有値 $\lambda(1-\lambda-(l/2))$，指標 χ^{-1} をもつ Maaß 形式である.

定理 1 を示すには，補題 1 などの $\zeta_\varepsilon(w,s)$, $\zeta_\eta^*(w,s)$ の解析的性質を利用して，定理 2 の仮定 [A1]–[A4] がみたされることをいえばよい．関数等式について簡単に比較してみよう．[A2](1) の関数等式を書き直すと,

$$\begin{pmatrix}\xi_+\left(\boldsymbol{b};2-2\lambda-\frac{l}{2}-s\right)\\ \xi_-\left(\boldsymbol{b};2-2\lambda-\frac{l}{2}-s\right)\end{pmatrix}$$
$$=N^{s+2\lambda+(l/2)-s}\cdot 2e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}l}(2\pi)^{1-2\lambda-(l/2)-2s}\qquad(\clubsuit)$$
$$\times\Gamma(s)\Gamma\left(s+2\lambda+\frac{l}{2}-1\right)\begin{pmatrix}\cos\pi\left(s+\lambda-\frac{1}{2}\right)&\cos\pi\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\\ \cos\pi\left(\lambda+\frac{l-1}{2}\right)&\cos\pi\left(s+\lambda+\frac{l-1}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_+(\boldsymbol{a};s)\\ \xi_-(\boldsymbol{a};s)\end{pmatrix}$$

となるが，$\lambda=(w-p+1)/2$, $l=p-q$ とすると，上の等式は補題 1 の関数等式と定数倍を除いて一致することが分かる.

4 Katok-Sarnak 対応への応用

[Sa3] で論じられているように，概均質ゼータ関数と保型形式の関連をリフティングの観点から考えることは興味深い．この節では，我々の逆定理（定理 2）を利用して，保型

形式のリフティングを構成する試みについて述べる.

まず, [Sa1] で定義された $(GL_2(\mathbb{C}), \mathrm{Sym}(2))$ に付随する保型形式付きゼータ関数について復習する. $\Gamma := SL_2(\mathbb{Z})$ とし, $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ を Γ に関する重さ 0, 固有値 λ の Maaß カスプ形式とする. すなわち,

$$\phi(\gamma z) = \phi(z) \qquad (\gamma \in \Gamma, z \in \mathcal{H}),$$
$$\Delta\phi = \lambda(1-\lambda)\phi, \qquad \Delta := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$
$$\text{任意の } r > 0 \text{ に対して}, \ \phi(z) = O(e^{-y}) \ \text{ as } \ y \to \infty$$

をみたすとする. また, L を 2 次半整数対称行列全体のなす集合とし, $L_+^p = \{x \in L\,;\, x \text{ は正定値}\}$, $L_- = \{x \in L\,;\, x \text{ は不定値}\}$ とおく. $x \in L_+^p$ に対して, $\varepsilon(x) = \sharp\mathrm{Aut}(x)$ とし, z_x を $(\sqrt{\det x})^{-1} \cdot x$ に対応する $\mathcal{H}$ の元とする. (2 次正定値対称行列で行列式 1 の全体と $\mathcal{H}$ の間には 1 対 1 対応がある.)

このとき, 次のようなゼータ関数を考える.

$$\zeta_+(\phi, L; s) = \sum_{x \in \Gamma\backslash L_+^p} \frac{\phi(z_x)}{\varepsilon(x)|\det(2x)|^s}, \quad \zeta_-(\phi, L; s) = \sum_{x \in \Gamma\backslash L_-} \frac{\mu_\phi(x)}{|\det(2x)|^s}.$$

ただし, $\mu_\phi(x)$ は x における等方部分群に関する ϕ の「周期」をあらわす. (正確な定義は [Sa1] を参照のこと.) [Sa1, Theorem 6.7] において, 次が示されている.

補題 2. $\zeta_\pm(\phi, L; s)$ は s の整関数へ解析接続され, 次の関数等式をみたす.

$$v(L^*)\begin{pmatrix} \zeta_+(\phi, L^*; \frac{3}{2} - s) \\ \zeta_-(\phi, L^*; \frac{3}{2} - s) \end{pmatrix} = 2^{-2-2s}\pi^{1/2-2s}\Gamma\left(s + \frac{\lambda - 1}{2}\right)\Gamma\left(s - \frac{\lambda}{2}\right)$$
$$\times \begin{pmatrix} \cos(\pi s) & \dfrac{\pi^2}{2^{\lambda-1}} \cdot \dfrac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \cdot \cos\left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right) \\ \dfrac{2^{\lambda-1}}{\pi^2} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{\Gamma(\lambda)} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right) & \sin(\pi s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_+(\phi, L; s) \\ \zeta_-(\phi, L; s) \end{pmatrix}.$$

ここで, L^* は L の双対格子であり, $v(L^*)$ はその体積である.

$\tilde{\zeta}_-(\phi, L; s) := \frac{\pi^2}{2^{\lambda-1}} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})^2} \cdot \zeta_-(\phi, L; s)$ とおき, 上の関数等式において, $s \to s + \frac{\lambda}{2}$

とし，さらに行と列を入れ替えると，

$$v(L^*)\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}_-\left(\phi,L^*;\left(\frac{3}{2}-\lambda-s\right)+\frac{\lambda}{2}\right)\\ \zeta_+\left(\phi,L^*;\left(\frac{3}{2}-\lambda-s\right)+\frac{\lambda}{2}\right)\end{pmatrix}=2^{-2-\lambda-2s}\pi^{1/2-\lambda-2s}.$$

$$\times\Gamma(s)\Gamma\left(s+\lambda-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\sin\pi\left(s+\frac{\lambda}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) & \cos\pi\left(s+\frac{\lambda}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\zeta}_-\left(\phi,L;s+\frac{\lambda}{2}\right)\\ \zeta_+\left(\phi,L;s+\frac{\lambda}{2}\right)\end{pmatrix}$$

となり，前節の ($\clubsuit$) において，$l=1,\lambda\to\frac{\lambda}{2}$ としたものと定数倍を除いて一致する．このことより，次の定理が導かれる．

定理 3 (Katok-Sarnak[KS], Duke-Imamoḡlu[DI])**.** $\Gamma_0(4)$ に関する重さ 1/2, 固有値 $\lambda(1-\lambda)/4$ の Maaß 形式

$$\Phi(z)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}b(n)y^{-1/4}W_{\frac{1}{4}\cdot\mathrm{sgn}(n),\lambda-\frac{1}{4}}(4\pi|n|y)\cdot e^{2\pi inx}$$

であって，

$$b(-n)=n^{-\lambda/2}\sum_{\substack{x\in\Gamma\backslash L_+^p\\ \det(2x)=n}}\phi(z_x)\varepsilon(x)^{-1}$$

となるものがある．

すなわち，元の結果の一部分ではあるが，いわゆる Katok-Sarnak 対応の別証明を与えることができる．一方で，[Sa1] の理論は離散群によらず適用でき，$\Gamma_0(N)$ に関する保型形式を付けた $(GL_2(\mathbb{C}),\mathrm{Sym}(2))$ のゼータ関数についても調べることが可能である ([Sa2] を参照)．したがって，$\Gamma_0(N)$ に対する Katok-Sarnak 対応についても逆定理による証明が可能であると思われる．

謝辞. 講演の機会を頂きました林田秀一先生に感謝申し上げます．

参考文献

[DG] N. Diamantis and D. Goldfeld, A converse theorem for double Dirichlet series and Shintani zeta functions, J. Math. Soc. Japan **66**(2014), 449-477.

[DI] W. Duke and O. Imamoḡlu, A converse theorem and the Saito-Kurokawa lift, Int. Math. Res. Notices **7**(1996), 347–355.

[KS] S. Katok and P. Sarnak, Heegner points, cycles and Maass forms, Israel J. Math. **84**(1993), 193–227.

[P] M. Peter, Dirichlet series and automorphic functions associated to a quadratic forms, Nagoya Math. J. **171** (2003), 1–50.

[Sa1] F. Sato, Zeta functions of prehomogeneous vector spaces with coefficients related to period of automorphic forms, Proc. Ind. Acad. **104**(1994), 99–135.

[Sa2] F. Sato, Hecke-eigenfunctions on the space of rational binary quadratic forms and periods of Maass wave forms, 数理解析研究所講究録 **886**(1994), 128–148.

[Sa3] 佐藤文広, Eisenstein 級数と概均質ベクトル空間のゼータ関数, Rokko Lectures in Mathematics **2** (1996).

[Sh] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.IA **22**(1976), 25–65.

[Su] K. Sugiyama, Automorphic pairs of distributions and its application to explicit constructions of Maass forms, 数理解析研究所講究録 **1934**(2015), 83–89.

[U] T. Ueno, Modular forms arising from zeta functions in two variables attached to prehomogeneous vector spaces related to quadratic forms, Nagoya Math. J. **175**(2004), 1–37.