

## 非保存型に基づいた衝撃波を含む非線形波動の新しい解法

金森正史 (宇宙航空研究開発機構)

Whole New Approach for Solving Nonlinear Wave Propagation Including Shock Waves based on Non-conservative Formulation

Masashi Kanamori (Japan Aerospace Exploration Agency)

Abstract

Whole new scheme for solving nonlinear wave propagation including shock waves based on non-conservative formulation is introduced in this paper. It is generally believed that such phenomena should be computed with the schemes based on conservative formulation because of numerical stability for treating shock waves. However, such schemes often suffer from compromise between stability and accuracy. Our new scheme, named Burgers-Hayes CIP method, successfully achieves much accurate solution while keeping computational stability around shock waves.

### 1 はじめに

衝撃波を伴う非線形波動は、航空・宇宙分野で頻りに登場する現象であり、その数値的な予測手法について多くの研究がなされてきた。その研究の過程で、安定な衝撃波の再現には保存則が必須であるという考え方が広まった。すなわち、有限体積の界面における流入・流出を考えることにより、衝撃波のような不連続性を弱解として扱うという方法が主流となった。一方で、界面における Riemann 問題を解くというこの方法論は、精度を向上させるために複雑な方法論を探らざるを得ず、現在でも安定性と精度の両立を目指した研究が行われている。本稿では、敢えて非保存型の Burgers 方程式について、衝撃波を含む非線形波動を安定で精度良く解析する手法について述べる。Burgers 方程式は乱流現象の最も簡単なモデル方程式として導出されたものであるが、今日でも数値スキームの検証などの計算手法研究に用いられるだけでなく、非線形音響学と呼ばれる分野<sup>1)</sup>において支配方程式として実用的に用いられる重要な方程式である。

本稿ではまず、一般化した Burgers 方程式とその特性曲線について述べ、従来のスキームとその欠点を紹介し、新しい手法である Burgers-Hayes CIP 法を導入する。簡単な解析例を通して、本手法の有効性を議論し、今後の展望を述べる。

### 2 一般化した Burgers 方程式と特性曲線

本稿では、非線形波動の方程式として、下記のような一般化した Burgers 方程式 (以降これを Burgers 方程式と呼称する) を扱う。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (1)$$

ここで  $c(u)$  は  $u$  に関する 1 次式とする。上式の解は形式的に次のように書ける。

$$u(x + c(u)\Delta t) = u_0(x) \quad (2)$$

この形式解は、曲線  $\xi = x + c(u)\Delta t$  に沿って  $u_0(x)$  が保存されることを意味しており、この曲線を一般に特性曲線と呼ぶ。本稿で扱うスキームはすべて、この特性曲線の考え方に則って導出される。具体的には、現在の時間ステップにおける解を  $u^n(x)$  とすれば、次時間ステップにおける解  $u^{n+1}(x)$  は次のように表される。

$$u^{n+1}(x_i + c(u^n(x_i))\Delta t) = u^n(x_i) \quad (3)$$

以上を模式的に表現したものが Fig.1 である。この図からも明らかのように、一般に Eq.(3) で求められる  $u^{n+1}(x)$  は元の離散点上で定義されないため、各時間発展後に離散点上への補間が必要になる。この補間の選択がスキームの違い、具体的には精度と安定性を決定すると言うこともできる。すなわち、この補間

を線形で行うことによって 1 次精度風上差分になり、補間点を増やせば高次精度スキームとなる。しかし、一般に線形補間は著しい減衰に悩まされ、他方高次精度の補間は振動を生む。このような振動を取り除きつつ、且つ滑らかな領域で精度を上げるための手法がこれまでに数多く提案されているのはご存じのとおりである。

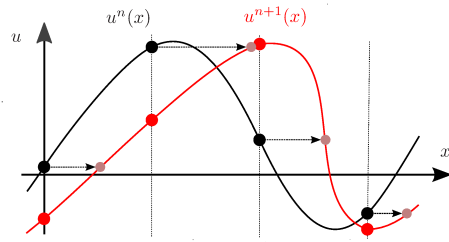


Figure1 Schematic of nonlinear wave propagation based on characteristics

### 3 Burgers-Hayes CIP 法の導入

#### 3.1 CIP 法

CIP 法<sup>2,3)</sup> は、各格子点において  $u$  とその空間勾配  $u_x = \partial u / \partial x$  を用いることによって、補間に必要な格子点を 2 点に抑えながらも補間精度を向上させる方法である。具体的には、(1) 式と同時に、(1) 式の  $x$  による微分式を同時に解く。

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u_x}{\partial x} = -c'(u) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \approx 0 \quad (4)$$

(1) 式のような非線形方程式の場合、一般に移流部分以外の項が発生するが、これを無視してゼロとすることがある。こうすることによって、上式もまた移流方程式の形式解 (3) 式により次時間ステップの解が得られる。CIP 法の具体的なアルゴリズムは以下のとおりである。<sup>2,3)</sup>

1.  $u^n$  及び  $u_x^n$  の情報を用いて、格子点間の波形のプロファイル  $F(x)$  を Hermite 補間により求める。

$$F(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (5)$$

上式の各係数は風上方向に応じて以下のように決定される。

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{u_{xi} + u_{xilup}}{D^2} + \frac{2(u_i - u_{ilup})}{D^3}, \\ b_i &= \frac{3(u_{ilup} - u_i)}{D^2} - \frac{2u_{xi} + u_{xilup}}{D}, \\ c_i &= u_{xi}, \quad d_i = u_i \end{aligned} \quad (6)$$

$iup$  及び  $D$  は  $c(u_i)$  の正負に応じてそれぞれ  $iup = i \mp 1$  及び  $D = \mp \Delta x$  を取る。ここで  $\Delta x$  は格子間隔を表す。  
 2. 波動の移動量  $\xi$  を設定し、 $u_i^{n+1}$  及び  $u_{xi}^{n+1}$  を次式により求める。

$$u_i^{n+1} = F(\xi), \quad u_{xi}^{n+1} = F'(\xi) \quad (7)$$

ただし  $\xi = -c(u^n(x_i))\Delta t$  であり、これが  $u_i$  の関数となっているために波形の非線型歪が発生する。

このように、 $u$  及び  $u_x$  を用いて3次精度のプロファイルを格子点間で構築することができるが、安定で高精度な計算を実現する最大のポイントである。一方、後述するように上述の方法では衝撃波が正しく計算できない。これは、衝撃波前後において成立すべき条件、等面積則を考慮していないためである。これを解決する方法が、次節に示す Burgers-Hayes 法である。

### 3.2 Burgers-Hayes 法

Burgers-Hayes(BH) 法は、その名の通り Burgers 方程式を解析するために Hayes により提案された手法である。<sup>4)</sup> 最大の特徴は、前述のように等面積則を厳密に考慮できる方法である、という点である。これを満たすため、次に示すような積分変数  $\varphi$  を導入する。

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x u(\xi) d\xi \quad (8)$$

次時間ステップの  $\varphi$  は次式のように求めることができる。

$$\begin{aligned} & \varphi^{n+1}(x_i + c(u^n(x_i))\Delta t) \\ &= \int_{-\infty}^{x_i + c(u^n(x_i))\Delta t} u^{n+1}(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{x_i} u^{n+1}(\eta + c(u^n(x_i))\Delta t) d(\eta + c(u^n(x_i))\Delta t) \end{aligned}$$

ここで、Eq.(3) を思い出せば、

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{x_i} u^n(\eta) d(\eta + c(u^n(x_i))\Delta t) \\ &= \int_{-\infty}^{x_i} u^n(\eta) d\eta + \int_{-\infty}^{x_i} u^n(\eta) dc(u^n(x_i))\Delta t \end{aligned}$$

ここで、 $\varphi$  の定義及び  $dc(u) = c'(u)du$ 、 $c'(u)$  が定数であることを思い出すと、最終的に以下の関係が得られる。

$$\varphi^{n+1}(x_i + c(u^n(x_i))\Delta t) = \varphi^n(x_i) + \frac{1}{2}c'(u)\Delta t u^n(x_i)^2 \quad (9)$$

すなわち、特性曲線に沿って  $u$  は保存されるのに対して、 $\varphi$  は Eq.(9) に示される規則によってその値は変化する。更に重要なのは、衝撃波が発生した時の  $u$  及び  $\varphi$  の関係である。その様子を Fig.2 にまとめた。これを見ると、 $u$  において衝撃波が発生している部分は、 $\varphi$  においてもまた Multivalue になっていることが分かるが、 $\varphi$  の定義を思い出すと、以下のような処理をすることで Multivalue の部分を評価することができることが分かる。

$$\varphi^{new}(x_i + c(u^n(x_i))\Delta t) = \min_{x \in D_e} \left\{ \varphi(x) + \frac{1}{2}c'(u)\Delta t u(x)^2 \right\} \quad (10)$$

ここで  $D_e$  は、波動伝播に伴って影響を受ける  $x$  近傍の領域を表す。上式は、 $\varphi$  という面積そのものを変数として導入することで、等面積則が成り立つように衝撃波を導入できることを意味しており、且つその処理は最小値演算だけで完了する、ということも意味している。この処理が等面積則を満たす解を選択することと等価であることの証明は省略するが容易である。

BH 法のアルゴリズムを以下に示す。

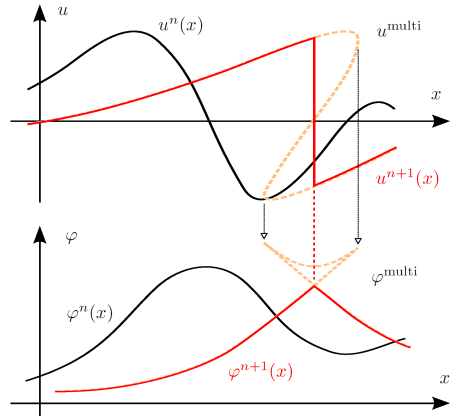


Figure2 Distortion of waveform and its potential

1.  $\varphi^n(x)$  を Eq.(9) 式に従って時間発展させる (これを  $\psi_i$  とする。)
2.  $\psi_i$  を線形補間することで、離散点  $x_i$  における  $\varphi$  を求め、それらの中でその座標点における最小値を次時間ステップにおける  $\varphi_i^{n+1}$  とする (Eq.(10) 参照。)
3.  $\varphi_i^{n+1}$  を数値的に微分して  $u_i^{n+1}$  を得る。

BH 法の利点は、変数  $u$  の代わりにその積分である  $\varphi$  を用いることにより、 $u$  の不連続性を陽的に扱わない点である。実際、Fig.2 の  $\varphi$  の様子からも明らかのように、 $u$  で衝撃波が発生する場所においても  $\varphi$  は連続である。一方で、上記 2. において線形補間を行うために高々 1 次精度にしかならないという欠点もある。これを高精度化するために補間点を増やすと計算の破綻につながる。これを解決するのが本稿で述べる Burgers-Hayes CIP 法である。

### 3.3 Burgers-Hayes CIP 法

まず Burgers-Hayes CIP (BHCIP) 法<sup>5,6)</sup> のアルゴリズムを示す。

1. BH 法に基づき、(9) 式に従って  $\varphi^n(x)$  を時間発展させて中間変数  $\psi_i$  及び  $x_i$  の移動点  $\xi_i$  を求める。
2.  $\psi_i$  及び  $u_i^n$  の情報を用いて CIP 補間 ((6) 式及び (7) 式) を行い、離散点  $x_i$  における  $u_i^{n+1}$  及び  $\varphi_i^{n+1}$  を求める。ただし、(6) 式において  $D = \mp \Delta x$  であったが、BHCIP では  $D = \xi_i - \xi_{i-1}$  である。
3.  $\varphi^{n+1}$  は Multivalue になる箇所が存在するが (Fig.3 内の  $\varphi_{exclude}$  及び  $\varphi_{adopted}$ )、この場合小さい方を採用する (この例の場合は  $\varphi_{adopted}$  を採用する)。

上述のアルゴリズムから、BHCIP 法が Burgers-Hayes 法と CIP 法の利点をうまく取り入れていることが分かるであろう。

## 4 解析例

本節では、前節で述べた 3 手法を用いてテスト問題を解析した結果を示し、BHCIP 法の有効性を議論する。ここでは、下記に定義する one-sawtooth 問題<sup>7)</sup> を解いた結果を示す。この問題の解析解は以下の通りである。

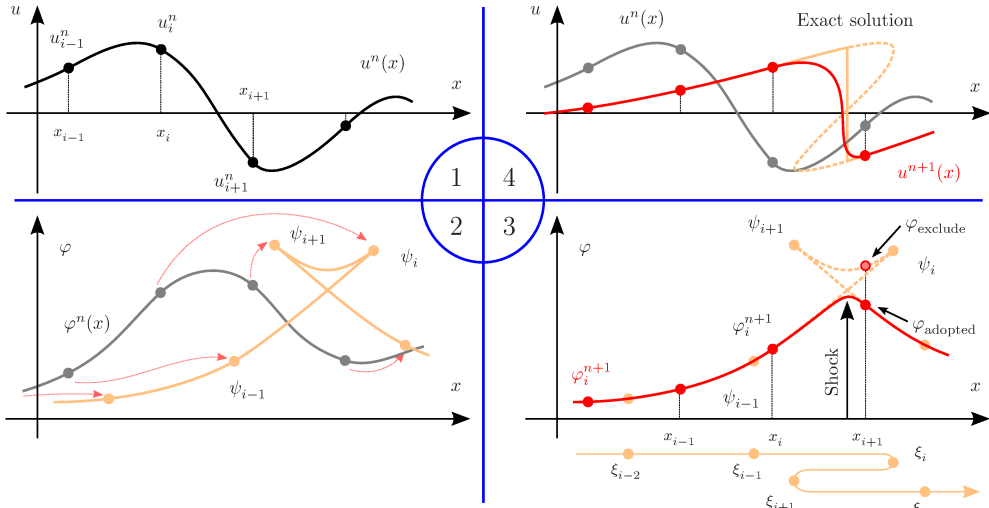


Figure3 Concrete processes of Burgers-Hayes CIP method

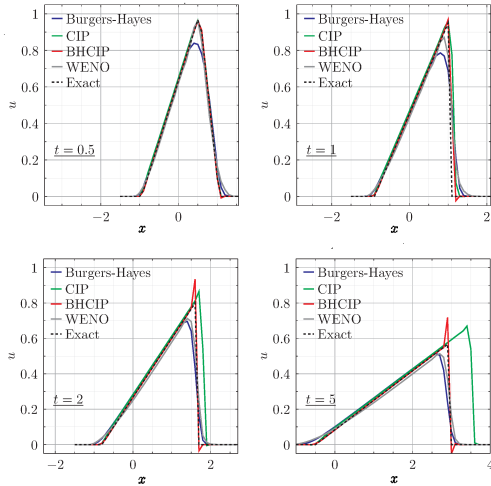


Figure4 Solutions of one-sawtooth problem using several schemes including BHCIP for  $c(u) = 0.1 + u$

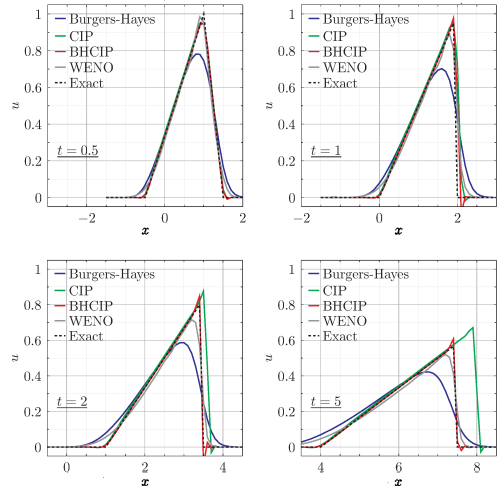


Figure5 Solutions of one-sawtooth problem using several schemes including BHCIP for  $c(u) = 1 + u$

$$u(x, t) = \begin{cases} (1 + \bar{x})/(1 + t) & -1 < \bar{x} \leq t \\ (1 - \bar{x})/(1 - t) & t < \bar{x} \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{for } t < 1, \quad (11)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} (1 + \bar{x})/(1 + t) & -1 < \bar{x} \leq x_s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{for } 1 < t, \quad (12)$$

ここで  $x_s = \sqrt{2(1+t)} - 1$  は衝撃波位置であり、 $\bar{x} = x - c'(u)t$  である。Fig.4及び5はそれぞれ  $c(u) = 0.1 + u$  及び  $c(u) = 1 + u$

として解析した結果である。この図の中で、WENOは空間5次精度 WENOスキーム<sup>8)</sup>及び時間3次精度の TVD Runge Kutta 法<sup>9)</sup>による解析結果である。いずれも CFL 数は 0.4 に設定している。両図に共通して言えるのは、BH 法の結果は著しく減衰していること、CIP 法は衝撃波が発生するとその位置が合わなくなること、そして BHCIP 法が最もよく解析解を表していることである。また、WENO のように衝撃波を含む現象に適している手法と比較しても、BHCIP 法の結果は衝撃波及びそれ以外の領域のいずれにおいても優れた結果を示している。CIP 法由来の不連続前後における overshoot については、例えば有関数 CIP 法<sup>2, 3)</sup>を用いることで解決できる。

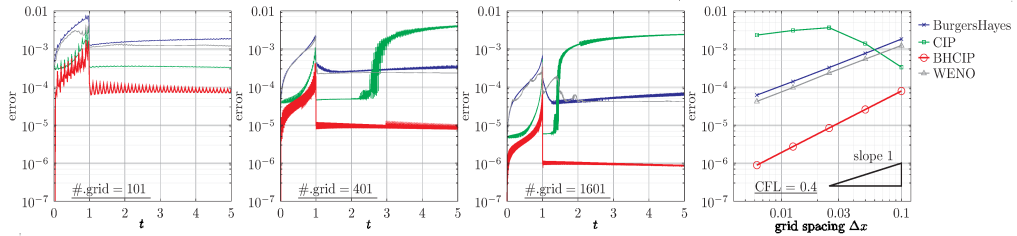


Figure6 Time history of error from exact solution, Eqs. (11) and (12), in the three left columns and error versus grid spacing in the right-most column; all cases above have  $c = 1$

one-sawtooth問題を様々な格子解像度で解いた際の誤差の時間履歴をFig.6にまとめた。ここで誤差は次式のようにして評価した。

$$\text{error} = \frac{1}{N_x} \left\{ \sum_{i \in D_i} (u_i - u^{\text{exact}}(x_i))^2 \right\}^{1/2}, \quad (13)$$

$$D_i = \{i \in [0, N_x] \mid |x_i - x_s| > 5\Delta x\}, \quad (14)$$

ここで  $x_s$  は前述の衝撃波位置を表す。上式は、衝撃波が発生した際は衝撃波前後の振動的な部分について、誤差の評価に加えないということの意味する。これは、衝撃波の伝播により発生する、衝撃波以外の部分の誤差を見積もるためである。Fig.6を見ると、Burgers-Hayes及びWENOによる結果の誤差がいずれも卓越して大きいことが分かる。前者の場合、1次精度スキームによる散逸性からくるものであり、後者はWENOの得意な微分不連続点が含まれるためであると考えられる。上述の観点から、CIPは理想的な傾向を示す。すなわち、微分が不連続であってもそのプロファイルを再現可能であり、かつ3次精度補間により誤差を小さく抑えることができる。一方で、 $t = 1$ で衝撃波が発生して以降、その誤差は急激に増大する。これは前述のように、衝撃波の移流速度を再現できていないためである。これに対してBHCIPの結果は衝撃波位置を正確に追跡することが可能であり、その結果誤差は一定の範囲内で変動するのみである。

Fig.6の右端の図は、横軸を格子幅に変更し、各格子で解析した結果のうち  $t = 5$  における誤差をまとめたものである。これらを見ると、いずれもせいぜい1次精度しか達成できないことが分かる。このことは、衝撃波の伝播の影響が、衝撃波のない領域に対しても顕著であることを示している。CIPの結果は衝撃波位置を再現できていないために誤差が著しく大きく、もはやCIP単体での解析は行うことはできない。一方、BHCIPの結果は1次精度よりもやや傾きが大きく、更に誤差の絶対値は同じ格子と比較しても他の手法より1桁以上低い。このことから、今回提案したこの手法が衝撃波のない領域に与える影響の少ないスキームであることが分かる。

## 5 おわりに

本稿は衝撃波を含む非線形波動現象を解析する方法として、BHCIP法を提案した。これはBH法及びCIP法と呼ばれる従

来法を組み合わせたものであり、これにより衝撃波を正しく再現しつつ、精度の高い解析結果が得られることが分かった。本手法は主にBurgers方程式を解析する際に用いるものであるが、これがより高次の非線形性を含んだ流体方程式へ適用できないか模索したいと考える。実際、流体現象は乱流変動のような大小さまざまな連続的変動の重ね合わせと、衝撃波のように不連続的で大きな変化を伴う現象とが入り乱れており、これらの両極端な現象をいずれも高精度かつ安定に解析したいという要求に十分に答えられていないのが現状である。本稿で述べたような、衝撃波の不連続性を陽的に扱わずにこれを再現できる手法が流体方程式にも導入できれば、上記の問題を解決することが可能になるかもしれない。本発表を通して、そのような応用の可能性を議論できれば幸いである。

## 参考文献

- 鎌倉友男. 非線形音響学の基礎. 愛智出版, 1996.
- 矢部孝, 内海隆行, 尾形陽一. CIP法 - 原子から宇宙までを解くマルチスケール解法-. 森北出版, 2003.
- 矢部孝, 尾形陽一, 滝沢研二. CIP法とJavaによるCGシミュレーション. 森北出版, 2007.
- Hayes W. D., Haefeli R. C., and Kulsrud H. E. Sonic boom propagation in a stratified atmosphere with computer program. *NASA CR-1299*, 1969.
- 金森正史, 高橋孝, 青山剛史. 大音響発生時の非線形音響伝播解析技術に関する研究. 第46回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーションシンポジウム2014講演論文集, No. 2B07, 2014.
- Masashi Kanamori, Takashi Takahashi, and Yoshikazu Makino. Effect of low-boom waveform on transonic focus boom using lossy nonlinear tricomi equation analysis. *AIAA Journal*, 2017(in press).
- Manuel D. Salas. *A Shock-Fitting Primer*. CRC Press, 2010.
- Guang-Shan Jiang and Chi-Wang Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *Journal of Computational Physics*, Vol. 126, pp. 202-228, 1996.
- C. W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, Vol. 77, pp. 439-471, 1988.