

# ある無限次元固有値を用いた楕円型偏微分方程式の 解の存在性に対する計算機援用証明法

## Computer-assisted existence proof method for solutions of elliptic partial differential equations using an infinite eigenvalue

早稲田大学 応用数理学科 関根 晃太 (Kouta Sekine)<sup>1</sup>  
Department of Applied Mathematics, Waseda University

早稲田大学 基幹理工学研究科 田中 一成 (Kazuaki Tanaka)  
Graduate School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

早稲田大学 応用数理学科 大石 進一 (Shin'ichi Oishi)  
Department of Applied Mathematics, Waseda University

### 概要

本稿では楕円型偏微分方程式の計算機援用証明法で重要となる線形化作用素の逆作用素の評価法について新たな方法を提案する。線形化作用素の逆作用素の評価法は現在様々な方法が提案されている。その中で本手法の特徴は、作用素の分数冪を用いてある無限次元一般化固有値問題に変形し、評価することである。この無限次元一般化固有値問題は作用素の分数冪を用いることで重調和作用素を含まれない定式化も可能である。

## 1 はじめに

本稿では楕円型偏微分方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

の定常解の存在性を検証するための計算機援用証明法を示す。ここで  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  は有界な凸領域とし、 $f: H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  は Fréchet 微分可能とする。

楕円型偏微分方程式の計算機援用証明法は中尾によって 1998 年に開発された [1]。特徴的な点は Sobolev 空間論を導入し、不動点定理に基づく計算機で実行可能な解の検証アルゴリズムの開発があげられる。詳しくは、数学的なアルゴリズムから実際のプログラムまで丁寧にまとめられている和書 [2] やサーベイ論文 [3] を参考にされたい。中尾の研究を皮切りに 1991 年に Plum [4]、1995 年に大石 [5] がそれぞれ偏微分方程式を見据えた計算機援用証明法を考案している。Plum や大石の方法はある無限次元作用素の正則性の証明とその逆作用素のノルム評価を行うことが特徴的である。Plum は無限次元固有値問題をホモトピー法で解き、得られた固有値から逆作用素のノルム評価を得ている。詳しくは Plum の方法がまとめられている論文 [6] を参照されたい。また、大石は有限次元への直交射影作用素とノルム評価を巧みに用いて逆作用素のノルム評価を得ている。大石の方法の詳細は和書 [7, 8] を参照されたい。

現在では、逆作用素のノルム評価を考案することが偏微分方程式の解の存在性を検証するアルゴリズムの改良の主たる部分を占めている。2005 年には中尾らによって大石の手法を改良した手法が提案されている [9]。また、2014 年には田中らによって Plum が導出したある無限次元固有値問題に対し、劉らによる正値自己共役作用素に対する無限次元固有値評価 [10, 11] を適用した手法が考案されている [12]。また、上記の手法は無

<sup>1</sup> k.sekine@aoni.waseda.jp

無限次元作用素を例えば  $H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  としている。それに対し渡部らは、有界な凸多角形領域に限定し  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  となる無限次元作用素に対する逆作用素のノルム評価を提案している [13, 14, 15, 16]。渡部らの方法は有限次元への直交射影作用素とノルム評価を巧みに用いた手法となっている。

本稿では、有界な凸多角形領域に限定し逆作用素のノルム評価に現れる  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  となる無限次元作用素に対し、放物型偏微分方程式の理論で良く利用される Laplace 作用素の分数冪を用いて無限次元固有値問題に帰着する手法を提案する。この無限次元固有値問題には重調和作用素が含まれないことが特徴である。さらに、導出した無限次元固有値問題に対し劉らの無限次元固有値評価 [10, 11] を利用して具体的に求められることを示す。また提案した手法に基づき、(1) の具体例として  $f(u) = u^3$  の場合に対するの真の定常解の存在を計算機援用証明する。

## 2 準備

### 2.1 関数空間の設定

$L^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty)$  を Lebesgue  $p$  乗可積分な関数全体の集合とする。特に Hilbert 空間  $L^2(\Omega)$  には内積  $(u, w)_{L^2} := \int_{\Omega} u(x)w(x)dx$  と内積から誘導されるノルム  $\|u\|_{L^2} := \sqrt{(u, u)_{L^2}}$  を導入する。 $L^\infty(\Omega)$  を  $\Omega$  における本質的に有界な関数全体の集合とし、導入するノルムを  $\|u\|_{L^\infty} := \text{ess.sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$  とする。 $s$  を正の実数とし、 $H^s(\Omega)$  を  $s$  階の  $L^2(\Omega)$ -Sobolev 空間とする。 $H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$  とし、 $H_0^1(\Omega)$  に導入する内積を  $(u, w)_{H_0^1} := (\nabla u, \nabla w)_{L^2}$  とし、内積から誘導されるノルムを  $\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_{L^2}$  とする。 $V_h$  を有限個の基底関数で張られた  $H_0^1(\Omega)$  の有限次元部分空間とする。

$\sigma(A)$  を線形作用素  $A$  のスペクトルとする。また、 $\sigma_p(A)$  を線形作用素  $A$  の点スペクトルとする。

Sobolev の埋め込み定理より領域の次元が  $n = 2$  以下であれば  $2 \leq p < \infty$  に対し

$$\|u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{H_0^1} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

を満たす定数  $C_p$  が存在し、具体的に求められる ( $n = 1$  のときは  $p = \infty$  も成り立つ)。実際に  $\Omega$  を二次元以上の凸多角形領域に限定すれば、ほぼ最良の定数  $C_p$  が求まる [17]。

### 2.2 作用素の定義と計算機援用証明法のフレームワーク

$A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  を Laplace 作用素  $-\Delta$  に対し Friedrichs 拡張した作用素とする。もし  $\Omega$  の境界が Dirichlet 境界条件を持つ有界な凸多角形領域ならば  $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  となる。また、作用素  $A$  は逆作用素  $A^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  を持つ。作用素  $A^{-1}$  は基礎空間  $L^2(\Omega)$  において有界線形作用素であり、さらにコンパクト作用素となる。

また、 $F : \mathcal{D}(A) \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  を  $F(u) := Au - f(u)$ ,  $u \in \mathcal{D}(A)$  とする。そのとき、(1) は

$$\text{Find } u \in \mathcal{D}(A), F(u) = 0, u \in \mathcal{D}(A)$$

と書き換えられる。

続いて、作用素  $f$  の  $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$  における Fréchet 微分を  $\hat{f}'[\hat{u}] : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  と記述する。また、 $f$  の仮定として、 $A\hat{u} \in L^2(\Omega)$  を満たすある  $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$  について  $\|\hat{f}'[\hat{u}]\|_{L^\infty} < \infty$  を満たすとする。そのとき、 $H_0^1(\Omega)$  は  $L^2(\Omega)$  で稠密で、かつ  $\hat{f}'[\hat{u}]$  が  $L^2(\Omega)$  の作用素としてみて有界であることから  $\hat{f}'[\hat{u}]u = \hat{f}'[\hat{u}]u$ ,  $u \in H_0^1(\Omega)$  を満たす有界な線形作用素  $f'[\hat{u}] : H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  が存在する。但し、 $f$  の仮定として  $\|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} < \infty$   $\|\Delta \hat{f}'[\hat{u}]\|_{L^\infty} < \infty$  が成り立つと仮定する。そのとき、Newton-Kantorovich の定理に似た定理を用いて解の存在性と局所一意性の証明を行う。

系 1 (1) の近似解を  $A\hat{u} \in X$  を満たす  $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$  とする. Fréchet 微分  $F'[\hat{u}]$  について

$$\|\phi\|_{H_0^1} \leq K \|F'[\hat{u}]\phi\|_{L^2}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(A) \quad (2)$$

を満たす定数  $K$  が存在すると仮定する. また  $\delta$  を

$$\|F(\hat{u})\|_{L^2} \leq \delta. \quad (3)$$

を満たす正の定数とする.  $\bar{B}(\hat{u}, 2K\delta)$  を  $\bar{B}(\hat{u}, 2K\delta) := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u - \hat{u}\|_{H_0^1} \leq 2K\delta\}$  を満たす閉球とする.  $D$  を  $D \cap \bar{B}(\hat{u}, 2K\delta)$  を満たす開球とする.  $G$  を

$$\|f'[w] - f'[m]\|_{L(H_0^1, L^2)} \leq G \|w - m\|_{H_0^1}, \quad \forall w, m \in D. \quad (4)$$

を満たす正の定数とする. もし  $K^2\delta G < 1/2$  を満たすなら (1) の弱形式を満たす弱解  $u^* \in V$  が存在し

$$\|u^* - \hat{u}\|_V \leq \rho = \frac{1 - \sqrt{1 - 2K^2\delta G}}{KG} \quad (5)$$

を満たす. その上で, 解  $u^*$  は  $\bar{B}(\hat{u}, 2K\delta)$  内で一意である.

定数  $\delta$  と  $G$  の求め方は簡単であるため, ここでは定数  $K$  の求め方を示す.

### 3 定数 $K$ の評価方法

定数  $K$  の計算方法は例えば渡部らの [16] がある. 今回は, 特に無限次元固有値評価を利用した方法を提案する. 本章では作用素  $A$  の分数冪とその性質を利用するため, 最初にいくつか準備する. 詳細は例えば書籍 [18, 19] を参照されたい. まず  $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  を  $(Au, v)_{L^2} = (u, A^*v)_{L^2}$  を満たす共役作用素とする. もし  $\Omega$  の境界が Dirichlet 境界条件を持つ有界な凸多角形領域ならば  $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$  となり, さらに  $A$  は自己共役作用素である.

さらに自己共役作用素  $A$  は正則で  $(A^{-1}u, u)_{L^2} > 0$ ,  $u \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}$  が成り立つため,  $A^{-1}$  の平方根を

$$A^{-\frac{1}{2}} := \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-\frac{1}{2}} (A - zI)^{-1} dz : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

と定義する. 但し, 経路  $C$  は  $A$  のレゾルベント集合を通るとする. また  $A^{-\frac{1}{2}}$  は正則であり, その逆作用素を  $A^{\frac{1}{2}} := (A^{-\frac{1}{2}})^{-1}$  とする. 作用素  $A^{\frac{1}{2}} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  の定義域は  $\Omega$  が有界な凸多角形領域であれば  $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$  となる. その上で,  $\|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2} = \|u\|_{H_0^1}$ ,  $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $(A^{\frac{1}{2}})^* = A^{\frac{1}{2}}$ ,  $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$  となる.

定理 2  $\mu_1 = \inf \left( \sigma_p(A^{-\frac{1}{2}}F'[\hat{u}]^*F'[\hat{u}]A^{-\frac{1}{2}}) \right)$  とする. もし  $\mu_1 \neq 0$  ならば, (2) を満たす定数  $K$  は存在し,

$$K = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \quad (6)$$

となる.

Proof

(2) を満たす定数  $K$  の定義より

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}} \frac{\|\phi\|_{H_0^1}}{\|F'[\hat{u}]\phi\|_{L^2}} = \sup_{\phi \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}} \frac{\|A^{\frac{1}{2}}\phi\|_{L^2}}{\|F'[\hat{u}]\phi\|_{L^2}} = \sup_{\phi \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}} \sqrt{\frac{(A^{\frac{1}{2}}\phi, A^{\frac{1}{2}}\phi)_{L^2}}{(F'[\hat{u}]\phi, F'[\hat{u}]\phi)_{L^2}}}$$

となる. ここで  $\phi$  を  $A^{\frac{1}{2}}\phi \in H_0^1(\Omega)$  と置きなおすと,  $A^{\frac{1}{2}}$  は正則であるため

$$\sup_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \sqrt{\frac{(\phi, \phi)_{L^2}}{(F'[\hat{u}]^*F'[\hat{u}]A^{-\frac{1}{2}}\phi, A^{-\frac{1}{2}}\phi)_{L^2}}} = \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \sqrt{\frac{(\phi, \phi)_{L^2}}{(A^{-\frac{1}{2}}F'[\hat{u}]^*F'[\hat{u}]A^{-\frac{1}{2}}\phi, \phi)_{L^2}}}$$

となる。

その上で  $A^{-\frac{1}{2}}F'[\hat{z}]^*F'[\hat{z}]A^{-\frac{1}{2}}$  は仮定より  $\mu_1 \neq 0$  であり, さらに  $L^2(\Omega)$  で稠密な定義域  $\mathcal{D}(A)$  を持つため, 正值自己共役閉作用素となり, スペクトル分解可能で

$$(A^{-\frac{1}{2}}F'[\hat{z}]^*F'[\hat{z}]A^{-\frac{1}{2}}\phi, \phi)_{H_0^1} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mu dE(\mu)\phi, \phi \right)_{H_0^1} \geq \mu_1(z, z)_V.$$

となる。但し,  $E(\cdot)$  は  $\mathbb{R}$  上の単位の分解とする。よって,

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}} \frac{\|\phi\|_{H_0^1}}{\|F'[\hat{u}]\phi\|_{L^2}} \leq \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \sqrt{\frac{(\phi, \phi)_{L^2}}{(\mu_1\phi, \phi)_{L^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}$$

となる。その上で,  $\sigma(A^{-\frac{1}{2}}F'[\hat{u}]^*F'[\hat{u}]A^{-\frac{1}{2}}) = \sigma_p(A^{-\frac{1}{2}}F'[\hat{u}]^*F'[\hat{u}]A^{-\frac{1}{2}})$  より, 定理は示せた。

□

#### 4 $\mu_1 = \inf \left( \sigma_p(A^{-\frac{1}{2}}F'[\hat{u}]^*F'[\hat{u}]A^{-\frac{1}{2}}) \right)$ の包含方法

定義より  $A^{-\frac{1}{2}}F'[\hat{u}]^*F'[\hat{u}]A^{-\frac{1}{2}} = A + A^{-\frac{1}{2}}(f'[\hat{u}]^*f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + (Af'[\hat{u}])^*))A^{-\frac{1}{2}}$  となる。よって考えるべき固有値問題は

$$\text{Find } \mu \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{D}(A) \text{ s.t. } Au + A^{-\frac{1}{2}}(f'[\hat{u}]^*f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + (Af'[\hat{u}])^*))A^{-\frac{1}{2}}u = \mu u$$

となる。非常に小さな正の定数を  $\varepsilon$  とし, 作用素  $D$  を

$$D := A + A^{-\frac{1}{2}}(f'[\hat{u}]^*f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + (Af'[\hat{u}])^*))A^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon I$$

と定義すると,  $D$  は正值自己共役作用素となる。その上, 次のような内積とノルムを定義する:

$$(u, v)_D := (Du, v)_{L^2}, \|u\|_D = \sqrt{(u, u)_D}$$

そのとき,  $\mu' = \mu + \varepsilon$  とすると固有値問題は

$$\text{Find } \mu' \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{D}(A) \text{ s.t. } (u, v)_D = \mu'(u, v)_{L^2} \quad (7)$$

と書き直せる。さらに,  $P_D$  を次を満たす直交射影とする:

$$((I - P_D)u, v_h)_D = 0, v_h \in V_h$$

そのとき, 固有値問題 (7) に対し劉-大石の定理 [10] を適用すると次のようになる:

系 3  $\{\mu'_i\}$  を次の固有値問題を満たす第  $i$  固有値とする:

$$\text{Find } u \in \mathcal{D}(A), \mu' \in \mathbb{R} \text{ s.t. } (u, v)_D = \mu'(u, v)_{L^2}, w \in \mathcal{D}(A).$$

また,  $\{\mu_i^h\}$  を次の有限次元固有値問題を満たす第  $i$  固有値とする:

$$\text{Find } u_h \in V_h, \mu^h \in \mathbb{R} \text{ s.t. } (u_h, v_h)_D = \mu^h(u_h, v_h)_X, v_h \in V_h. \quad (8)$$

$C_D$  を次を満たす定数とする:

$$\|u - P_D u\|_{L^2} \leq C_D \|u - P_D u\|_D, u \in V. \quad (9)$$

そのとき, 第  $i$  固有値  $\lambda'_i$  は

$$\frac{\mu_i^h}{1 + C_D^2} \leq \mu'_i \leq \mu_i^h. \quad (10)$$

のように評価できる。

よって、目的とする固有値  $\mu_1$  の包含は  $\mu_1 = \mu_1' - \varepsilon$  と (10) より

$$\frac{\mu_1'^h}{1 + C_D^2 \mu_1'^h} - \varepsilon \leq \mu_1 \leq \mu_1' - \varepsilon.$$

となる.

## 5 $\|u - P_D u\|_{L^2} \leq C_D \|u - P_D u\|_D$ を満たす定数 $C_D$ の計算方法

直交射影  $P_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$  を  $((I - P_h)u, v_h)_{H_0^1} = 0, \forall v_h \in V_h$  と定義する. 直交射影の性質として  $P_h = P_h^2$  を持つ. また, 直交射影  $P_h$  に対し, 定数  $C_h$  を

$$\|u - P_h u\|_{H_0^1} \leq C_h \|Au\|_{L^2}, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

と定義する. この定数  $C_h$  は  $V_h$  を構成する基底に依存する [20, 21, 22, 23]. また, 定数  $C_{AD}$  を

$$\|Au\|_{L^2} \leq C_{AD} \|Du\|_{L^2}, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

を満たす定数とする.  $w_h = z - P_h z$  とすると,

$$\begin{aligned} & \|A^{-\frac{1}{2}}(f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + (Af'[\hat{u}])^*)) A^{-\frac{1}{2}} w_h\|_{L^2} \\ & \leq \|A^{-\frac{1}{2}} f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}] A^{-\frac{1}{2}} w_h\|_{L^2} + \|A^{\frac{1}{2}} f'[\hat{u}] A^{-\frac{1}{2}} w_h\|_{L^2} + \|A^{-\frac{1}{2}} f'[\hat{u}]^* A^{\frac{1}{2}} w_h\|_{L^2} \\ & \leq C_2^2 \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} \|w_h\|_{L^2} + \left\| \nabla \left( f'[\hat{u}] A^{-\frac{1}{2}} w_h \right) \right\|_{L^2} + C_2 \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty} \|w_h\|_{H_0^1} \\ & \leq (C_2^2 C_h \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + C_2 \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty}) \|w_h\|_{H_0^1} + \left\| \left( \frac{\partial f'[\hat{u}]}{\partial x} \right) \left( A^{-\frac{1}{2}} w_h \right) + f'[\hat{u}] \nabla A^{-\frac{1}{2}} w_h \right\|_{L^2} \\ & \leq \left( C_2^2 C_h \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + C_2 \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty} + C_2 C_h \left\| \left( \frac{\partial f'[\hat{u}]}{\partial x} \right) \right\|_{(L^\infty)^2} + C_h \|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} \right) \|w_h\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

よって定数  $C_f$  を

$$C_f := C_2^2 C_h \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + C_2 \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty} + C_2 C_h \left\| \left( \frac{\partial f'[\hat{u}]}{\partial x} \right) \right\|_{(L^\infty)^2} + C_h \|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty}$$

とする. そのとき,  $w_D := z - P_D z$  と  $w_h = z - P_h z$  とすると

$$\begin{aligned} & \|w_D\|_D^2 \\ & \leq \|w_h\|_D^2 \\ & = \left( (A + A^{-\frac{1}{2}}(f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + (Af'[\hat{u}])^*)) A^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon I) w_h, w_h \right)_{L^2} \\ & = (\nabla w_h, \nabla w_h)_{L^2} + \left( (A^{-\frac{1}{2}}(f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + (Af'[\hat{u}])^*)) A^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon I) w_h, w_h \right)_{L^2} \\ & \leq \|w_h\|_{H_0^1}^2 + \left\| (A^{-\frac{1}{2}}(f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + (Af'[\hat{u}])^*)) A^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon I) w_h \right\|_{L^2} \|w_h\|_{L^2} \\ & \leq \|w_h\|_{H_0^1}^2 + \left\| A^{-\frac{1}{2}}(f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + (Af'[\hat{u}])^*)) A^{-\frac{1}{2}} w_h \right\|_{L^2} \|w_h\|_{L^2} + \varepsilon \|w_h\|_{L^2}^2 \\ & \leq C_h^2 C_{AD}^2 (1 + C_f + \varepsilon C_h) \|Du\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

となる. よって,

$$C_D := C_h C_{AD} \sqrt{1 + C_f + \varepsilon C_h^2}$$

とすると,  $\|u - P_D u\|_{L^2} \leq C_D \|u - P_D u\|_D$  を満たす.

## 6 $\|Au\|_{L^2} \leq C_{AD}\|Du\|_{L^2}$ を満たす定数 $C_{AD}$ の計算方法

定数  $C_{AD}$  は

$$\|Au\|_{L^2} \leq C_{AD}\|Du\|_{L^2}, u \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \|u\|_{H_0^1} \leq C_{AD}\|A^{-\frac{1}{2}}DA^{-\frac{1}{2}}u\|_{L^2}, u \in H_0^1(\Omega)$$

と書き直せる。そのうえで、[9] や [12] を利用すれば  $C_{AD}$  は計算できる。ここでは、[9] に基づく方法を示す。まず、

$$B = -A^{-\frac{1}{2}}(f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + (Af'[\hat{u}])^*))A^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon I$$

とすると、 $D = A - B$  と書ける。そのとき、次の定理が成り立つ:

**定理 4**  $V_\perp$  を  $V_h$  に対する直交補空間とする。定数  $K_1, K_2, K_c$  をそれぞれ次を満たす正の定数とする:

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}u\|_{L^2} &\leq K_1\|u\|_{H_0^1}, u \in H_0^1(\Omega) \\ \|A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}u_\perp\|_{L^2} &\leq K_2\|u_\perp\|_{H_0^1}, u \in V_\perp \\ \|P_h A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}u_\perp\|_{H_0^1} &\leq K_c\|u_\perp\|_{H_0^1}, u \in V_\perp \end{aligned}$$

さらに、 $P_h(I - A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})|_{V_h} : V_h \rightarrow V_h$  は正則で、次を満たす定数  $\tau$  が存在するとする:

$$\left\| \left( P_h(I - A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})|_{V_h} \right)^{-1} \right\|_{H_0^1, H_0^1} \leq \tau$$

$\kappa := C_h(K_1\tau K_c + K_2)$  とする。もし  $\kappa < 1$  ならば、

$$C_{AD} = \left\| \left( \begin{array}{cc} \tau \left( 1 + \frac{C_h K_1 \tau K_c}{1 - \kappa} \right) & \frac{\tau K_c}{1 - \kappa} \\ \frac{C_h K_1 \tau}{1 - \kappa} & \frac{1}{1 - \kappa} \end{array} \right) \right\|_2$$

を満たす。

## 7 定数 $K_1, K_2, K_c, \tau$ の計算方法

### 7.1 定数 $K_1$ の計算方法

定数  $K_1$  の定義より

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}u\|_{L^2} &= \|(f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}] - (Af'[\hat{u}] + f'[\hat{u}]^* A))A^{-1}u + \varepsilon u\|_{L^2} \\ &\leq (C_2^2 \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty} + \varepsilon) \|u\|_{L^2} + \|Af'[\hat{u}]A^{-1}u\|_{L^2} \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \|Af'[\hat{u}]A^{-1}u\|_{L^2} &= \|(\Delta f'[\hat{u}](A^{-1}u) + 2(\nabla f'[\hat{u}])^T \cdot (\nabla(A^{-1}u)) + f'[\hat{u}](\Delta A^{-1}u))\|_{L^2} \\ &\leq C_2^2 \|\Delta f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} + 2C_2 \|\nabla f'[\hat{u}]\|_{(L^\infty)^2} \|u\|_{L^2} + \|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \end{aligned}$$

よって、

$$K_1 := C_2 (C_2^2 \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty} + C_2^2 \|\Delta f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + 2C_2 \|\nabla f'[\hat{u}]\|_{(L^\infty)^2} + \|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + \varepsilon)$$

となる。

## 7.2 定数 $K_2$ の計算方法

定数  $K_2$  の定義より同様に

$$K_2 := C_h (C_2^2 \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty} + C_2^2 \|\Delta f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + 2C_2 \|\nabla f'[\hat{u}]\|_{(L^\infty)^2} + \|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + \varepsilon)$$

となる.

## 7.3 定数 $K_c$ の計算方法

定数  $K_c$  の定義より

$$\|P_h A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} u_\perp\|_{H_0^1} \leq \|A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} u_\perp\|_{H_0^1} \leq C_2 K_2 \|u_\perp\|_{L^2}$$

よって,  $K_c := C_2 K_2$ .

## 7.4 定数 $\tau$ の計算方法

定数  $\tau$  の定義より

$$\left\| \left( P_h (I - A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) |_{V_h} \right)^{-1} \right\|_{H_0^1, H_0^1} \leq \sup_{\lambda^h \in \sigma(P_h (I - A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) |_{V_h})} \frac{1}{|\lambda^h|}$$

## 8 アルゴリズム

1.  $\varepsilon = 2^{-53}$  とする (倍精度浮動小数点数の場合).
2.  $C_f := C_2^2 C_h \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + C_2 \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty} + C_2 C_h \|\nabla f'[\hat{u}]\|_{(L^\infty)^2} + C_h \|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty}$  を求める.
3.  $(F'[\hat{u}]u_h, F'[\hat{u}]v_h)_{L^2} + \varepsilon (Au_h, v_h)_{L^2} = \lambda^h (Au_h, Av_h)_{L^2}$  の絶対値最小固有値  $\lambda_1^h$  より  $\tau = 1/|\lambda_1^h|$  を求める.
4.  $K_1 := C_2 (C_2^2 \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty} + C_2^2 \|\Delta f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + 2C_2 \|\nabla f'[\hat{u}]\|_{(L^\infty)^2} + \|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + \varepsilon)$
5.  $K_2 := C_h (C_2^2 \|f'[\hat{u}]^* f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + \|f'[\hat{u}]^*\|_{L^\infty} + C_2^2 \|\Delta f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + 2C_2 \|\nabla f'[\hat{u}]\|_{(L^\infty)^2} + \|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} + \varepsilon)$
6.  $K_c = C_2 K_2$  と  $\kappa = C_h (K_1 \tau K_c + K_2)$  を求める.
7.  $\kappa < 1$  であることをチェックし, もし満たさなければ失敗
8.  $C_{AD} = \left\| \begin{pmatrix} \tau \left( 1 + \frac{C_h K_1 \tau K_c}{1 - \kappa} \right) & \frac{\tau K_c}{1 - \kappa} \\ \frac{C_h K_1 \tau}{1 - \kappa} & \frac{1}{1 - \kappa} \end{pmatrix} \right\|_2$  を求める.
9.  $C_D := C_h C_{AD} \sqrt{1 + C_2^2 C_h^2 C_f + \varepsilon C_h^2}$  を求める.
10.  $(F'[\hat{u}]u_h, F'[\hat{u}]v_h)_{L^2} + \varepsilon (Au_h, v_h)_{L^2} = \mu^h (Au_h, v_h)_{L^2}$  を満たす最小固有値  $\mu_1^h$  を求める.
11.  $\mu_1 \in \left[ \frac{\mu_1^h}{1 + C_D^2 \mu_1^h} - \varepsilon, \mu_1^h - \varepsilon \right]$  より  $K = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}$  を計算し,  $K$  の包含を得る.

## 9 数値実験結果

本章では  $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$  とし, Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11)$$

の解に対し, 系 1 を用いた計算機援用存在証明法を行う.

数値実験では CentOS 6.6, CPU : Intel Xeon CPU E7-4830 v2 2.2GHz×4, RAM : 2TByte を使用した。また、開発環境は Matlab2012b と Matlab の精度保証付き数値計算ツールボックスである INTLAB Version 9 [24], 及びコンパイラ GCC ver 4.4.7 を用いた C++ 言語と C++ 言語の精度保証付き数値計算ライブラリである kv library 0.4.36 [25] を使用した。また, kv library 0.4.36 では高品質多倍長浮動小数点ライブラリ MPFR 3.1.4 [26] も利用した。

(11) の近似解  $\hat{u}$  は

$$\hat{u} = \sum_{i=1, j=1}^N u_{ij} \phi_i(x) \phi_j(y), \quad u_i \in \mathbb{R}$$

とする。但し, Legendre 多項式

$$P_i = \frac{(-1)^i}{i!} \left( \frac{d}{dx} \right)^i x^i (1-x)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

を用いた基底

$$\phi_i(x) = \frac{1}{i(i+1)} x(1-x) \frac{dP_i}{dx}(x), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

を利用した (例えば [27])。

(11) の Legendre 多項式の次数  $N = 20$  の場合の近似解を図 1 に示す。

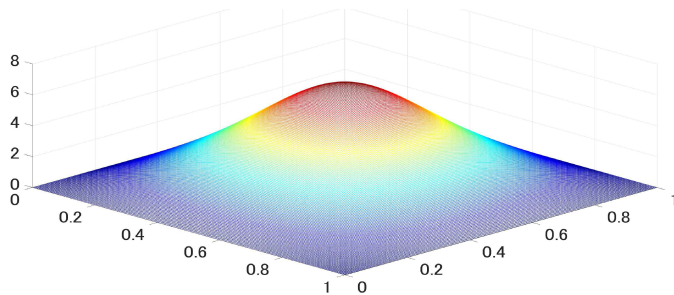


図 1 (11) に対する Legendre 多項式の次数  $N = 20$  の場合の近似解。

図 1 の近似解に対し提案した定数  $K$  に関する数値実験結果を表 1 に示す。この表 1 にて, 定数  $K$  の結果  $0.185_{49}^{54}$  は  $K \in [0.1849, 0.1854]$  を意味する。  $\dim(V_h)$  は式 (8) の次元を意味し, 近似解の Legendre 多項式の次数  $N = 20$  とは異なる。表 1 の  $\kappa$  はどちらも 1 未満であるため定数  $C_{AD}$  が存在する。そのうえで, 定数  $C_D$  を求め, 目的とする固有値  $\mu_1$  の値を得た。その結果, 定理 2 から定数  $K$  が求まった。

その上で, 残差  $\delta \in [0.01354045, 0.01354046]$ ,  $G = 4.57614$  とすると  $K^2 \delta G = 0.002130 < 0.5$  となるため, 系 1 より真の解  $u^*$  は存在することが言える。

## 謝辞

本研究は, CREST, JST の支援を受けたものである。また, 本研究は第一著者が JSPS 科研費, 課題番号 16K17651, 及び早稲田大学 特定課題の支援を受けたものである。また, 本研究は第二著者が早稲田大学理工学



表 1 定数  $K$  に関する数値実験結果

$\dim(V_h)$ (式 (8))	$\kappa$	$C_{AD}$	$C_D$	$\mu_1 \in$	$K \in$
40	$1.385 \times 10^{-2}$	1.017	$1.169 \times 10^{-2}$	$29.24_{11}$	$0.1854_{49}$
60	$6.493 \times 10^{-3}$	1.008	$7.937 \times 10^{-3}$	$29.24_{18}$	$0.1852_{49}$

研究所, アーリーバードプログラムの支援を受けたものである.

## 参考文献

- [1] M.T. Nakao: A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 5, pp.313–332 (1988).
- [2] 中尾充宏, 渡部善隆: 実例で学ぶ精度保証付き数値計算:理論と実装, サイエンス社 (2011).
- [3] M.T. Nakao and Y. Watanabe: Numerical verification methods for solutions of semilinear elliptic boundary value problems, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 2, 1, pp.2–31 (2011).
- [4] M. Plum: Computer-assisted existence proofs for two-point boundary value problems, Computing, 46, pp.19–34 (1991).
- [5] S. Oishi: Numerical verification of existence and inclusion of solutions for nonlinear operator equations, J. Comput. Appl. Math. 60, pp.171–185 (1995).
- [6] M. Plum: Computer-assisted proofs for semilinear elliptic boundary value problems, Japan J. Indust. Appl. Math. 26, 2-3, pp.419–442 (2009).
- [7] 大石進一: 非線形解析入門, コロナ社 (1997).
- [8] 大石進一: 精度保証付き数値計算, コロナ社 (2000).
- [9] M.T. Nakao, K. Hashimoto, and Y. Watanabe: A numerical method to verify the invertibility of linear elliptic operators with applications to nonlinear problems, Computing, 75, pp.1–14 (2005).
- [10] X. Liu and S. Oishi: Verified eigenvalue evaluation for the Laplacian over polygonal domain of arbitrary shape, SIAM J. Numer. Anal, 51, pp.1634–1654 (2013).
- [11] X. Liu: A framework of verified eigenvalue bounds for self-adjoint differential operators: Applied Mathematics and Computation, 267, pp.341–355 (2015).
- [12] K. Tanaka, A. Takayasu, X. Liu, and S. Oishi: Verified norm estimation for the inverse of linear elliptic operators using eigenvalue evaluation, Japan J. Indust. Appl. Math, 31, 3, pp.665–679 (2014).
- [13] Y. Watanabe, T. Kinoshita, and M.T. Nakao: A Posteriori Estimates of Inverse Operators for Boundary Value Problems in Linear Elliptic Partial Differential Equations, Mathematics of Computation, 82, 283, pp.1543–1557 (2013).
- [14] T. Kinoshita, Y. Watanabe, and M.T. Nakao: An Improvement of the Theorem of A Posteriori Estimates for Inverse Elliptic Operators, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 5, 1, pp.47–52 (2014).
- [15] Y. Watanabe and M.T. Nakao: A Numerical Verification Method for Nonlinear Functional Equations Based on Infinite-dimensional Newton-like Iteration, Applied Mathematics and Computation, 276, pp.239–251 (2016).
- [16] Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, and M.T. Nakao: Norm Bound Computation for Inverses of Linear Operators in Hilbert Spaces, Journal of Differential Equations, 260, 7, pp.6363–6374 (2016).
- [17] K. Tanaka, K. Sekine, M. Mizuguchi, and S. Oishi: Sharp numerical inclusion of the best constant for

embedding  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  on bounded convex domain, to appear.

- [18] A. Pazy: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Vol. 44. Springer Science & Business Media (2012).
- [19] A. Yagi: *Abstract parabolic evolution equations and their applications*, Springer Science & Business Media (2009).
- [20] S. Kimura and N. Yamamoto: On explicit bounds in the error for the  $H_0^1$ -projection into piecewise polynomial spaces, *Bulletin of informatics and cybernetics*, 31, 2, pp.109–115 (1999).
- [21] F. Kikuchi and X. Liu: Estimation of interpolation error constants for the p0 and p1 triangular finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, pp.3750–3758 (2007).
- [22] K. Kobayashi and T. Tsuchiya: A Babuška-Aziz type proof of the circumradius condition: *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 31, 1, pp.193–210 (2014).
- [23] K. Kobayashi and T. Tsuchiya: On the circumradius condition for piecewise linear triangular elements: *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 32, 1, pp.383–390 (2015).
- [24] S.M. Rump: INTLAB - INTerval LABoratory, In Tibor Csendes, editor, *Developments in Reliable Computing*, pp.77–104. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999).
- [25] M. Kashiwagi: kv - C++ による精度保証付き数値計算ライブラリ, <http://verifiedby.me/kv/> (2016/5/9 更新版).
- [26] MPFR Project: The MPFR library, <http://www.mpfr.org/> (2016/3/6 更新版).
- [27] M.T. Nakao and T. Kinoshita: On very accurate verification of solutions for boundary value problems by using spectral methods, *JSIAM Letters*, 1, pp.21–24 (2009).