数理解析研究所講究録
第2038巻 2017年 69-81

Initial boundary value problem for the equation of suspended string

慶應義塾大学理工学部数理科学科 (Keio University)
高山 正宏 (Masahiro Takayama)

1 Introduction

Zhang, *et al.* [7] は, 実験で流れる石鹸膜内で振舞う糸の運動についての研究を行った. そこでは, 糸の長さがある値よりも長くなると, 真っ直ぐな状態 (the stretched-straight state) とはためく状態 (the flapping state) の異なる二つの状態が観察できることを示した. (Figure 1 を参照.) 我々はこの現象に興味がある.

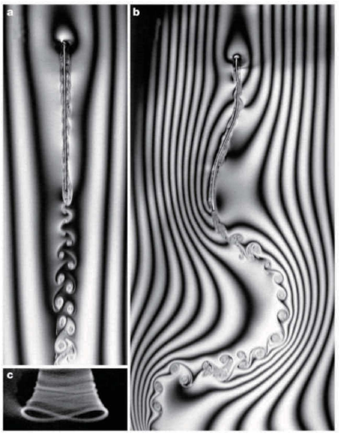

Figure 1: 真っ直ぐな状態とはためく状態 ([7, p. 836])

ここでは外部の流体の影響を無視して, 吊り下げられた伸びない糸の運動を数学的に考える. 糸は有限の長さで密度一定とし, 片方の端点が固定端, もう片方の端点が自由端とする. また, 糸の運動は重力と張力によって支配されるとする.

数学的に定式化しよう. L を糸の長さとし, s $(\in [0, L])$ を自由端から測った弧長とする. また, 時刻 t における糸の形は, 次のような曲線で表されるとする.

$$u(s,t) = (u_1(s,t), u_2(s,t), u_3(s,t)), \qquad s \in [0, L].$$

更に, 固定端は $\mathbf{R}^3$ の原点であるとする. (Figure 2 を参照.)

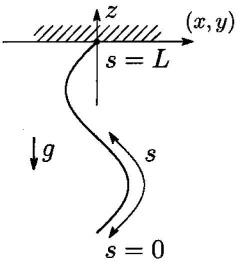

Figure 2: 吊り下げられた糸

糸の運動方程式を考える. ρ を糸の密度, $g=(0,0,-1)$ を重力加速度とし, $\tau(s,t)$ を糸の張力 (スカラー) とする. このとき, 糸の運動方程式は, 次のように表される. (例えば [6] を参照.)

$$\rho u_{tt}-(\tau u_s)_s=\rho g \quad \text{in} \quad (0,L)\times(0,T).$$

また, 糸が伸びないということは, 次のように定式化できる.

$$|u_s|\equiv 1 \quad \text{in} \quad (0,L)\times(0,T).$$

境界条件としては, 次のものを課す.

$$u|_{s=L}=0, \quad \tau|_{s=0}=0 \quad \text{on} \quad (0,T).$$

この境界条件の一つ目の条件は, 糸の固定端 $(s=L)$ が $\mathbf{R}^3$ の原点にあることを表し, 二つ目の条件は, 糸の自由端 $(s=0)$ では張力が 0 になることを表している. また, 初期条件としては, 次のものを課す.

$$(u,u_t)|_{t=0}=(u_0(s),v_0(s)) \qquad \text{in} \quad (0,L).$$

この初期値問題の解の存在や一意性については, 殆ど研究がない. Reeken [3, 4] は, 片方の端点が $(0,0,+\infty)$ であるような無限の長さの伸びない糸の運動について研究した. (技術的な理由により, 重力加速度 g は定ベクトルではないことも仮定した.) 彼は, 初期データが自明な定常解に十分近いときに局所解の存在と一意性を示した. Preston [2] は, 重力がない場合 (つまり $g=0$ の場合) の有限な長さの伸びない糸の運動について研究した. 彼は, 任意の初期データに対して局所解の存在と一意性を示した.

以下, 簡単のために $\rho=1$, $L=1$ とし, $I=(0,1)$ と表すことにする. つまり, 次の初期境界値問題について考える.

$$u_{tt}-(\tau u_s)_s=g, \quad |u_s|\equiv 1 \qquad \text{in} \quad I\times(0,T), \tag{1.1}$$

$$u|_{s=1}=0, \quad \tau|_{s=0}=0 \qquad \text{on} \quad (0,T), \tag{1.2}$$

$$(u,u_t)|_{t=0}=(u_0(s),v_0(s)) \qquad \text{in} \quad I, \tag{1.3}$$

本論文では, 初期境界値問題 (1.1)–(1.3) に対する解の a priori 評価について考える.

Remark. (u,τ) が方程式 (1.1) と境界条件 (1.2) を満たす滑らかな関数とする. このとき, 張力 τ は (t をパラメータと見なした) 次の常微分方程式に対する二点境界値問題の解になることが分かる.

$$\tau_{ss} - |u_{ss}|^2\tau = -|u_{ts}|^2 \qquad \text{in} \quad I \times (0,T), \tag{1.4}$$

$$\tau|_{s=0} = 0, \quad \tau_s|_{s=1} = -g \cdot u_s|_{s=1} \qquad \text{on} \quad (0,T). \tag{1.5}$$

特に, 張力の時刻 $t=0$ での値 $\tau_0(s) := \tau|_{t=0}$ は, 次の常微分方程式に対する二点境界値問題の解として定まる. (つまり τ_0 は, 初期データ (u_0, v_0) によって定まる.)

$$\tau_{0ss} - |u_{0ss}|^2\tau = -|v_{0s}|^2 \qquad \text{in} \quad I \times (0,T), \tag{1.6}$$

$$\tau_0|_{s=0} = 0, \quad \tau_{0s}|_{s=1} = -g \cdot u_{0s}|_{s=1} \qquad \text{on} \quad (0,T). \tag{1.7}$$

更に $g \cdot u'|_{s=1} < 0$ on $[0,T]$ を仮定すると, 張力 τ について次が成り立つ.

$$\tau(0,t) = 0, \quad \tau_s(0,t) > 0, \quad \text{かつ} \quad \tau(s,t) > 0 \quad \text{for} \quad (s,t) \in (0,L] \times [0,T]$$

つまり, 張力 τ は自由端 $s=0$ を除いて正の値をとり, 自由端において線形退化をすることが分かる. 言い換えると, 張力 τ は次の形で表される.

$$\tau(s,t) = s\mu(s,t) \qquad \text{on} \quad I \times [0,T].$$

ここで μ は $I \times [0,T]$ 上で正の値をとる適当な滑らかな関数である.

2 Notation and main theorem

この論文を通して, 二つのノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ に対して, v に依存しないある定数 C を用いて $\|v\|_1 \le C\|v\|_2$ が成り立つとき, $\|v\|_1 \lesssim \|v\|_2$ と表すことにする.

非負の整数全体を $\mathbf{Z}_+$ で表す. (つまり $\mathbf{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ とする.) また $m \in \mathbf{Z}_+$ に対して, 次のように関数空間 $X^m(I)$ を定める.

$$X^m(I) = \{u \in L^2(I);\ \|u\|_{X^m(I)} < +\infty\}.$$

ここで $\partial_s u = \frac{d}{ds}u(s)$ として

$$\|u\|_{X^m(I)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \|\partial_s^j u\|_{L^2(I)} + \sum_{j=0}^{k} \|s^j \partial_s^{k+j} u\|_{L^2(I)}, & m = 2k,\ k \in \mathbf{Z}_+, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \|\partial_s^j u\|_{L^2(I)} + \sum_{j=0}^{k} \|s^{j+\frac{1}{2}} \partial_s^{k+1+j} u\|_{L^2(I)}, & m = 2k+1,\ k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases}$$

(これらの関数空間 $X^m(I)$ は [3, Section 2] で定義したものと本質的に同じ関数空間である. [5] も参照.) 更に $l \le m$ を満たす $l, m \in \mathbf{Z}_+$ に対して, 次のように定める.

$$\Lambda_T^{l,m} = \bigcap_{j=0}^{l} C^j([0,T]; X^{m-j}(I)), \qquad \|u\|_{\Lambda_T^{l,m}} = \sum_{j=0}^{l} \sup_{t\in[0,T]} \|\partial_t^j u(\cdot,t)\|_{X^{m-j}(I)}.$$

次が我々の主結果である.

Theorem 2.1 m を 7 以上の整数とする. また (u,τ) を, 初期境界値問題 (1.1)–(1.3) の滑らかな解とする. また, 初期データ u_0 が $a := g\cdot u_0'|_{s=1} < 0$ を満たすとする. 更に, 二点境界値問題 (1.6), (1.7) で決まる τ_0 に対して, $\delta := \min_{s\in I} \frac{1}{s}\tau_0(s)$ (>0) とおく.

このとき, 二つの正数

$$T_0 = T_0(m, \|u_0\|_{X^m(I)}, \|v_0\|_{X^{m-1}(I)}, a, \delta),$$
$$C = C(m, \|u_0\|_{X^m(I)}, \|v_0\|_{X^{m-1}(I)}, a, \delta)$$

が存在して, 解 (u,τ) に対して, 次が成り立つ:

$$g\cdot u'|_{s=0} \le \tfrac{1}{2}a \;\; (<0) \quad on \quad [0,T_0], \qquad \mu \ge \tfrac{1}{2}\delta \;\; (>0) \quad on \quad I\times[0,T_0],$$

$$\|u\|_{\Lambda_{T_0}^{m,m}} + \|\tau\|_{\Lambda_{T_0}^{m-2,m}} + \|\tau'\|_{\Lambda_{T_0}^{m-2,m-1}} + \|\mu\|_{\Lambda_{T_0}^{m-2,m-1}} \le C. \tag{2.1}$$

ここで $\mu(s,t) = \frac{1}{s}\tau(s,t)$ である.

3 Proof of main theorem (I)

Theorem 2.1 は m に関する数学的帰納法で証明する. ここでは $m-1$ のときまで成り立つことを仮定して, m の場合にも成り立つことを証明しよう. この論文では, その中でも特に, 評価 (2.1) の $\|u\|_{\Lambda_{T_0}^{m,m}} \le C$ の証明を与えよう.

さて $Q(s,t) = |u_{ss}(s,t)|^2$ とおき, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ を (t をパラメータと見なした) 次の常微分方程式に対する初期値問題の解とする.

$$\varphi_{ss} - Q\varphi = 0, \qquad \varphi|_{s=0} = 0, \qquad \varphi_s|_{s=0} = 1; \tag{3.1}$$

$$\psi_{ss} - Q\psi = 0, \qquad \psi|_{s=1} = 1, \qquad \psi_s|_{s=1} = 0. \tag{3.2}$$

また $a(t) = -g\cdot u_s|_{s=1}$ とおく.

Remark. 各 t に対して, この二つの関数 $\varphi(t,\cdot)$, $\psi(t,\cdot)$ は一次独立になることが分かる. よって, 常微分方程式に対する二点境界地問題 (1.4), (1.5) の解 τ は (この φ, ψ を用いて) 次のように表される.

$$\tau(s,t) = \frac{\varphi(s,t)}{\varphi_s(1,t)}a(t) - \frac{\psi(s,t)}{\varphi_s(1,t)}\int_0^s \varphi(\sigma,t)|u_{ts}(\sigma,t)|^2\,d\sigma$$
$$- \frac{\varphi(s,t)}{\varphi_s(1,t)}\int_s^1 \psi(\sigma,t)|u_{ts}(\sigma,t)|^2\,d\sigma.$$

次の Lemma 3.1 を示すことがキーになる. 但し Lemma 3.1 の主張を述べる上で, 記号の煩雑さを避けるために, 次のようにおく.

$$f = \partial_t^{m-2}(|u_{ts}|^2) - \sum_{j=0}^{m-3} \binom{m-2}{j} \partial_t^{m-2-j} Q \partial_t^j \tau, \tag{3.3}$$

$$\tilde{\tau}(s,t) = \frac{\psi(s,t)}{\varphi_s(1,t)} \int_0^s \varphi(\sigma,t) f(\sigma,t)\, d\sigma + \frac{\varphi(s,t)}{\varphi_s(1,t)} \int_s^1 \psi(\sigma,t) f(\sigma,t)\, d\sigma. \tag{3.4}$$

Lemma 3.1 以下のように $E(t)$, $F(t)$ を定めるとき,

$$\frac{d}{dt} E(t) \lesssim F(t)$$

が成り立つ: ここで,

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \tau |\partial_t^{m-1} u_s|^2\, ds + \frac{1}{2} \int_0^1 |(\tau \partial_t^{m-2} u_s)_s|^2\, ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m-3} \binom{m-2}{j} (\partial_t^j \tau \partial_t^{m-2-j} u_s)_s \tau \partial_t^{m-2} u_s|_{s=1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)} |\partial_t^{m-2} a|^2 + \tilde{\tau}(1,t) \partial_t^{m-2} a + \frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)} |\partial_t^{m-2} a|^2, \end{aligned}$$

また,

$$F(t) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \partial_t\tau|\partial_t^{m-1}u_s|^2\,ds - \frac{1}{2}\int_0^1 (\partial_t\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s(\partial_t\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s\,ds$$
$$+\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-2}{j}\int_0^1 (\partial_t\tau\partial_t^{m-2-j}u_s)_s\tau\partial_t^{m-1}u_s\,ds$$
$$+\sum_{j=1}^{m-3}\binom{m-2}{j}\partial_t\{\tau(\partial_t^j\tau\partial_t^{m-2-j}u_s)_s\}|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-2}u_s|_{s=1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-1}{j}(\partial_t^{m-2}\tau_s\tau\partial_t^j u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1-j}u_s|_{s=1}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-1}{j}(\partial_t^{m-2}\tau_s\tau\partial_t^j u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1-j}u_s|_{s=1}$$
$$+\frac{1}{2}\partial_t\Big(\frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}\Big)|\partial_t^{m-2}a|^2 + \partial_t\Big(\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\Big)\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)f(\sigma,t)\,d\sigma$$
$$+\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \partial_t\varphi(\sigma,t)f(\sigma,t)\,d\sigma$$
$$-\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\sum_{j=1}^{m-3}\binom{m-1}{j}\int_0^1 \varphi(\sigma,t)\partial_t^{m-1-j}Q(\sigma,t)\partial_t^j\tau(\sigma,t)\,d\sigma$$
$$-\frac{m-2}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)\partial_t Q(\sigma,t)\partial_t^{m-2}\tau(\sigma,t)\,d\sigma$$
$$+\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-1}{j}\int_0^1 \varphi(\sigma,t)\partial_t^{m-j}u_s(\sigma,t)\cdot\partial_t^{j+1}u(\sigma,t)\,d\sigma$$
$$-\frac{2}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m-2}{j}\int_0^1 (\varphi\partial_t u_s)_s(\sigma,t)\cdot(\partial_t^{m-2-j}\tau\partial_t u_s)_s(\sigma,t)\,d\sigma$$
$$-\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-2}{j}\int_0^1 \varphi(\sigma,t)\tau(\sigma,t)\partial_t^{m-1-j}u_{ss}(\sigma,t)\cdot\partial_t^j u_{ss}(\sigma,t)\,d\sigma$$
$$+\frac{2}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 (\varphi\tau u_{ss})_s(\sigma,t)\cdot\partial_t^{m-1}u_s(\sigma,t)\,d\sigma$$
$$-\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-1}{j}(\varphi\tau_s\partial_t^{m-1-j}u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^j u_s|_{s=1} + \partial_t\Big(\frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}\Big)|\partial_t^{m-2}a|^2.$$

(Lemma 3.1 の証明) 方程式 $u_{tt}-(\tau u_s)_s = g$ を t に関して $m-2$ 回微分することで,

$$\partial_t^m u - (\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s = (\partial_t^{m-2}u_s)_s + \binom{m-2}{j}(\partial_t^j\tau\partial_t^{m-2-j}u_s)_s\ (=: A_1 + A_2). \tag{3.5}$$

この両辺を更に s で微分することで,

$$\partial_t^m u_s - (\tau\partial_t^{m-2}u_s)_{ss} = A_{1s} + A_{2s}.$$

これと $\tau\partial_t^{m-1}u_s$ との内積をとり, s に関して 0 から 1 まで積分する.

$$\int_0^1 \tau\partial_t^{m-2}u \cdot \partial_t^{m-1}u\,ds - \int_0^1 (\tau\partial_t^{m-2}u_s)_{ss}\cdot(\tau\partial_t^{m-1}u_s)\,ds = \int_0^1 (A_{1s}+A_{2s})\cdot(\tau\partial_t^{m-1}u_s)\,ds. \tag{3.6}$$

この (3.6) の右辺については $F(t)$ に吸収できる. (3.6) の左辺の第一項は, 次のように変形できるので, 扱いは難しくない.

$$\int_0^1 \tau\partial_t^{m-2}u\cdot\partial_t^{m-1}u\,ds = \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \tau|\partial_t^{m-2}u|^2\,ds}_{E(t)\text{ へ}} - \underbrace{\int_0^1 \partial_t\tau|\partial_t^{m-2}u|^2\,ds}_{F(t)\text{ へ}}.$$

よって (3.6) の左辺の第二項について考える. 部分積分より (3.6) の左辺の第二項は, 次のように変形できる.

$$-\int_0^1 (\tau\partial_t^{m-2}u_s)_{ss}\cdot(\tau\partial_t^{m-1}u_s)\,ds = -\Big[(\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s\cdot(\tau\partial_t^{m-1}u_s)\Big]_{s=0}^{s=1} + \int_0^1 (\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s\cdot(\tau\partial_t^{m-1}u_s)_s\,ds. \tag{3.7}$$

この (3.7) の右辺の第二項は, 次のように変形できるので, 扱いは難しくない.

$$\int_0^1 (\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s\cdot(\tau\partial_t^{m-1}u_s)_s\,ds = \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 |(\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s|^2\,ds}_{E(t)\text{ へ}} - \underbrace{\int_0^1 (\partial_t\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s\cdot(\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s\,ds}_{F(t)\text{ へ}}.$$

また (3.7) の右辺の第一項は, 次のように変形できる. (境界条件 (1.2) より $\tau|_{s=0}=0$ 及び $\partial_t^m u|_{s=1}=0$ に注意する. また (3.5) にも注意する.)

$$\begin{aligned} -\Big[(\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s\cdot(\tau\partial_t^{m-1}u_s)\Big]_{s=0}^{s=1} &= -(\tau\partial_t^{m-2}u_s)_s|_{s=1}\cdot(\tau\partial_t^{m-1}u_s)|_{s=1} \\ &= -\partial_t^m u|_{s=1}\cdot\tau\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} + A_1|_{s=1}\cdot\tau\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} + A_2|_{s=1}\cdot\tau\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} \\ &= A_1|_{s=1}\cdot\tau\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} + A_2|_{s=1}\cdot\tau\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

ここで (3.8) の右辺の第一項は, 次のように変形できるので, 扱いは難しくない.

$$A_2|_{s=1}\cdot\tau\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} = \frac{d}{dt}\underbrace{\{(\tau A_2)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-2}u_s|_{s=1}\}}_{E(t)\text{ へ}} - \underbrace{\partial_t(\tau A_2)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-2}u_s|_{s=1}}_{F(t)\text{ へ}}.$$

また (3.8) の右辺の第二項は, 次のように変形できる.

$$A_1|_{s=1}\cdot\tau\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}=\tau(\partial_t^{m-2}\tau u_s)_s|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}$$
$$=(\partial_t^{m-2}\tau\,\tau u_{ss})|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}+(\partial_t^{m-2}\tau_s\,\tau u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}. \tag{3.9}$$

ここで (3.9) の右辺の第二項について考える. $|u_s|^2\equiv 1$ を t について $m-1$ 回微分することで, 次が成り立つことに注意する.

$$u_s\cdot\partial_t^{m-1}u_s=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-1}{j}\partial_t^j u_s\cdot\partial_t^{m-1-j}u_s. \tag{3.10}$$

これより (3.9) の右辺の第二項は, 次のように変形できる.

$$(\partial_t^{m-2}\tau_s\,\tau u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-1}{j}(\partial_t^{m-2}\tau_s\,\tau\partial_t^j u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1-j}u_s|_{s=1}.$$

よって (3.9) の右辺の第二項は $F(t)$ に吸収できる. また (3.9) の右辺の第一項は, 次のように変形できる. (方程式 (1.1) より $\tau u_{ss}=-g+u_{tt}-\tau_s u_s$ であり, 境界条件 (1.2) より $u_{tt}|_{s=1}=0$ に注意する.)

$$\begin{aligned}(\partial_t^{m-2}\tau\,\tau u_{ss})|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}&\\ =\{\partial_t^{m-2}\tau(-g+u_{tt}-\tau_s u_s)\}|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}&\\ =-\{\partial_t^{m-2}\tau\partial_t^{m-1}(g\cdot u_s)\}|_{s=1}-(\partial_t^{m-2}\tau\,\tau_s u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}&\\ =\partial_t^{m-2}\tau|_{s=1}\partial_t^{m-1}a-(\partial_t^{m-2}\tau\,\tau_s u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}.&\end{aligned} \tag{3.11}$$

ここで (3.11) の右辺の第二項は, 次のように変形できる. ((3.10) に注意する.)

$$-(\partial_t^{m-2}\tau\,\tau_s u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-1}{j}(\partial_t^{m-2}\tau\,\tau_s\partial_t^j u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1-j}u_s|_{s=1}.$$

よって (3.11) の右辺の第二項は $F(t)$ に吸収できる.

次に (3.11) の右辺の第一項について考える. τ が二点境界値問題 (1.4), (1.5) の解であることから, 関数 $\partial_t^{m-2}\tau$ は次の二点境界値問題の解であることが分かる.

$$\begin{cases}(\partial_t^{m-2}\tau)_{ss}-Q\partial_t^{m-2}\tau=-f & \text{in}\quad I\times(0,T),\\ \partial_t^{m-2}\tau|_{s=0}=0,\quad(\partial_t^{m-2}\tau)_s|_{s=1}=\partial_t^{m-2}a & \text{on}\quad(0,T).\end{cases}$$

(ここで $Q=|u_{ss}|^2$, $a(t)=-g\cdot u_s|_{s=1}$ であり, f は (3.3) で定義されたものである.) このとき $\partial_t^{m-2}\tau$ は, 次のように表されることが分かる. (関数 φ, ψ は (3.1), (3.2) で定義された関数である. その下の Remark も参照.)

$$\partial_t^{m-2}\tau(s,t)=\frac{\varphi(s,t)}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a(t)+\tilde{\tau}(s,t).$$

(ここで $\tilde{\tau}$ は (3.4) で定義されたものである.) この $\partial_t^{m-2}\tau$ の表示式を用いると, (3.11) の右辺の第一項は, 次のように変形できる.

$$\partial_t^{m-2}\tau|_{s=1}\partial_t^{m-1}a = \frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\,\partial_t^{m-1}a + \tilde{\tau}(1,t)\partial_t^{m-1}a. \tag{3.12}$$

ここで (3.12) の第一項は, 次のように変形できるので, 扱いは難しくない.

$$\frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\,\partial_t^{m-1}a = \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{1}{2}\Big(\frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}|\partial_t^{m-2}a|^2\Big)}_{E(t)\,\wedge} - \underbrace{\frac{1}{2}\partial_t\Big(\frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}\Big)|\partial_t^{m-2}a|^2}_{F(t)\,\wedge}.$$

また (3.12) の第二項は, 次のように変形できる.

$$\tilde{\tau}(1,t)\partial_t^{m-1}a = \frac{d}{dt}\underbrace{\{\tilde{\tau}(1,t)\partial_t^{m-2}a\}}_{E(t)\,\wedge} - \partial_t\tilde{\tau}(1,t)\partial_t^{m-2}a. \tag{3.13}$$

よって (3.13) の右辺の第二項について考える. ここで $\tilde{\tau}(1,t)$ が, 次のように表されることに注意する. ((3.4) 及び $\psi|_{s=1}=1$ に注意する.)

$$\tilde{\tau}(1,t) = \frac{1}{\varphi_s(1,t)}\int_0^1 \varphi(\sigma,t)f(\sigma,t)\,d\sigma.$$

これより (3.13) の第二項は, 次のように変形できる.

$$\begin{aligned}-\partial_t\tilde{\tau}(1,t)\partial_t^{m-2}a = &-\partial_t\Big(\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\Big)\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)f(\sigma,t)\,d\sigma\\ &-\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \partial_t\varphi(\sigma,t)f(\sigma,t)\,d\sigma\\ &-\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)\partial_t f(\sigma,t)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{3.14}$$

この (3.14) の右辺の第一項, 第二項は $F(t)$ に吸収できる. (3.14) の右辺の第三項について考える. $\partial_t f$ は, 次のように表される. ((3.3) に注意する.)

$$\partial_t f = \partial_t^{m-1}(|u_{ts}|^2) - \partial_t^{m-1}Q\,\tau - \sum_{j=1}^{m-3}\binom{m-1}{j}\partial_t^{m-1-j}Q\partial_t^j\tau - (m-2)\partial_t Q\partial_t^{m-2}\tau$$
$$(=: B_1 - B_2 - B_3 - B_4).$$

これより (3.14) の右辺の第三項は, 次のように変形できる.

(3.15)

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)\partial_t f(\sigma,t)\,d\sigma\\ &\quad= -\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)B_1(\sigma,t)\,d\sigma + \frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)B_2(\sigma,t)\,d\sigma\\ &\qquad+\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)B_3(\sigma,t)\,d\sigma + \frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)B_4(\sigma,t)\,d\sigma.\end{aligned}$$

この (3.15) の第三項, 第四項は $F(t)$ に吸収できる.

さて (3.15) の第一項について考える. ここで B_1 は, 次のように表される.

$$B_1 = 2\partial_t u_s \cdot \partial_t^m u_s + \sum_{j=1}^{m-2} \binom{m-2}{j} \partial_t^{m-j} u_s \cdot \partial_t^{j+2} u_s \ (=: B_{11} + B_{12}).$$

これより (3.15) の第一項は, 次のように変形できる.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(\sigma,t) B_1(\sigma,t)\, d\sigma &= \frac{1}{\varphi_s(1,t)} \partial_t^{m-2} a \int_0^1 \varphi(\sigma,t) B_{11}(\sigma,t)\, d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{\varphi_s(1,t)} \partial_t^{m-2} a \int_0^1 \varphi(\sigma,t) B_{12}(\sigma,t)\, d\sigma.\end{aligned} \tag{3.16}$$

この (3.16) の右辺の第二項は $F(t)$ に吸収できる. (3.16) の右辺の第一項について考える. ここで, 次に注意する. ($\varphi|_{s=0} = 0$ 及び $u|_{s=1} = 0$ にも注意.)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(\sigma,t) B_{11}(\sigma,t)\, d\sigma &= 2\int_0^1 \varphi(\sigma,t)\partial_t u_s(\sigma,t) \cdot \partial_t^m u_s(\sigma,t)\, d\sigma \\ &= \underbrace{2\Big[\varphi(\sigma,t)\partial_t u_s(\sigma,t) \cdot \partial_t^m u(\sigma,t)\Big]_{\sigma=0}^{\sigma=1}}_{=0} - 2\int_0^1 (\varphi \partial_t u_s)_s(\sigma,t) \cdot \partial_t^m u(\sigma,t)\, d\sigma \\ &= -2\int_0^1 \varphi_s(\sigma,t)\partial_t u_s(\sigma,t) \cdot \partial_t^m u(\sigma,t)\, d\sigma - 2\int_0^1 \varphi(\sigma,t)\partial_t u_{ss}(\sigma,t) \cdot \partial_t^m u(\sigma,t)\, d\sigma.\end{aligned}$$

これより (3.16) の右辺の第一項は, 次のように表される.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varphi_s(1,t)} \partial_t^{m-2} a \int_0^1 \varphi(\sigma,t) B_{11}(\sigma,t)\, d\sigma \\ &\quad = -\frac{2}{\varphi_s(1,t)} \partial_t^{m-2} a \int_0^1 \varphi_s(\sigma,t)\partial_t u_s(\sigma,t) \cdot \partial_t^m u(\sigma,t)\, d\sigma \\ &\qquad - \frac{2}{\varphi_s(1,t)} \partial_t^{m-2} a \int_0^1 \varphi(\sigma,t)\partial_t u_{ss}(\sigma,t) \cdot \partial_t^m u(\sigma,t)\, d\sigma.\end{aligned} \tag{3.17}$$

更に, 方程式 $u_{tt} = (\tau u_s)_s + g$ より

$$\begin{aligned}\partial_t^m u &= \partial_t^{m-2}(\tau u_{ss} + \tau_s u_s) \\ &= \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} \partial_t^{m-2-j} \tau \partial_t^j u_{ss} + \sum_{j=0}^{m-2} \binom{m-2}{j} \partial_t^{m-2-j} \tau_s \partial_t^j u_s.\end{aligned}$$

これを (3.17) の右辺に代入することで, (3.17) の右辺は $F(t)$ に吸収できることが分かる.

最後に (3.15) の右辺の第二項について考える. ここで B_2 は, 次のように表される.

$$B_2 = 2\tau u_{ss} \cdot \partial_t^{m-1} u_{ss} + \sum_{j=1}^{m-2} \binom{m-1}{j} \tau \partial_t^{m-1-j} u_{ss} \cdot \partial_t^j u_{ss} \ (=: B_{21} + B_{22}).$$

これより (3.15) の第一項は, 次のように変形できる.

$$\int_0^1 \varphi(\sigma,t)B_2(\sigma,t)\,d\sigma = \frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)B_{21}(\sigma,t)\,d\sigma + \frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)B_{22}(\sigma,t)\,d\sigma. \tag{3.18}$$

この (3.18) の右辺の第二項は $F(t)$ に吸収できる. (3.18) の右辺の第一項について考える. ここで, 次に注意する. ($\tau|_{s=0}=0$ にも注意.)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(\sigma,t)B_{21}(\sigma,t)\,d\sigma &= 2\int_0^1 \varphi(\sigma,t)\tau(\sigma,t)u_{ss}(\sigma,t)\cdot\partial_t^{m-1}u_{ss}(\sigma,t)\,d\sigma\\ &= 2\Big[\varphi(\sigma,t)\tau(\sigma,t)u_{ss}(\sigma,t)\cdot\partial_t^{m-1}u_s(\sigma,t)\Big]_{\sigma=0}^{\sigma=1} - 2\int_0^1 (\varphi\tau u_{ss})_s(\sigma,t)\cdot\partial_t^{m-1}u_s(\sigma,t)\,d\sigma\\ &= 2(\varphi\tau u_{ss})|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} - 2\int_0^1 (\varphi\tau u_{ss})_s(\sigma,t)\cdot\partial_t^{m-1}u_s(\sigma,t)\,d\sigma.\end{aligned}$$

これより (3.18) の右辺の第一項は, 次のように表される.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 \varphi(\sigma,t)B_{21}(\sigma,t)\,d\sigma\\ &\quad= \frac{2}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\,(\varphi\tau u_{ss})|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}\\ &\qquad - \frac{2}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\int_0^1 (\varphi\tau u_{ss})_s(\sigma,t)\cdot\partial_t^{m-1}u_s(\sigma,t)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{3.19}$$

この (3.19) の右辺の第二項は $F(t)$ に吸収できる. (3.19) の右辺の第一項について考える. 方程式より $\tau u_{ss} = u_{tt} - \tau_s u_s - g$ であり, また $u|_{s=1}=0$ より, 次に注意する.

$$\begin{aligned}(\varphi\tau u_{ss})|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} &= \{\varphi(u_{tt}-\tau_s u_s - g)\}|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}\\ &= -(\varphi\tau_s u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} - \varphi|_{s=1}\partial_t^{m-1}(g\cdot u_s)|_{s=1}\\ &= -(\varphi\tau_s u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} + \varphi(1,t)\partial_t^{m-1}a.\end{aligned}$$

これより (3.19) の右辺の第一項は, 次のように変形できる.

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\,(\varphi\tau u_{ss})|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}\\ &\quad= -\frac{2}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\,(\varphi\tau_s u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1} + 2\frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\,\partial_t^{m-1}a.\end{aligned} \tag{3.20}$$

ここで (3.20) の右辺の第一項について考える. (3.10) に注意することで, (3.20) の右辺の第一項は, 次のように変形できる.

$$\begin{aligned}&-\frac{2}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\,(\varphi\tau_s u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^{m-1}u_s|_{s=1}\\ &\quad= -\frac{2}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\sum_{j=1}^{m-2}\binom{m-1}{j}(\varphi\tau_s\partial_t^{m-1-j}u_s)|_{s=1}\cdot\partial_t^j u_s|_{s=1}.\end{aligned}$$

よって (3.20) の右辺の第一項は $F(t)$ に吸収できる. また (3.20) の右辺の第二項については, 次のようにできる.

$$2\frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}\partial_t^{m-2}a\,\partial_t^{m-1}a = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}|\partial_t^{m-2}a|^2\right)}_{E(t)\text{ へ}} - \underbrace{\partial_t\left(\frac{\varphi(1,t)}{\varphi_s(1,t)}\right)|\partial_t^{m-2}a|^2}_{F(t)\text{ へ}}.$$

以上をまとめることで Lemma 3.1 が証明できる. □

4 Proof of main theorem (II)

微分作用素 A_1, A_2 を, 次のように定義する:

$$A_1u = s^{\frac{1}{2}}\partial_s u, \qquad A_2u = \partial_s(s\partial_s u).$$

今 Theorem 2.1 を m に関する数学的帰納法で証明しようとしている. 数学的帰納法の仮定から, ある $T_0 > 0$ に対して, 次が成り立つことが分かっている.

$$g\cdot u'|_{s=0} \le \tfrac{1}{2}a \quad (<0) \quad \text{on} \quad [0,T_0], \qquad \mu \ge \tfrac{1}{2}\delta \quad (>0) \quad \text{on} \quad I\times[0,T_0].$$

これを利用し, $E(t)$ や $F(t)$ に現れる各項を評価することで, 次の Lemma 4.1 が証明できる. (Lemma 4.1 の証明は省略する.)

Lemma 4.1 *$E(t)$, $F(t)$ を Lemma 3.1 のものとするとき, 任意の $t\in[0,T_0]$ に対して次が成り立つ.*

$$\|A_1\partial_t^{m-1}u(\cdot,t)\|_{L^2(I)}^2 + \|A_2\partial_t^{m-2}u(\cdot,t)\|_{L^2(I)}^2 \lesssim E(t) + \sum_{j=0}^{m-1}\|\partial_t^j u(\cdot,t)\|_{X^{m-1-j}}^2,$$

$$E(t)+F(t) \lesssim \|A_1\partial_t^{m-1}u(\cdot,t)\|_{L^2(I)}^2 + \|A_2\partial_t^{m-2}u(\cdot,t)\|_{L^2(I)}^2 + \sum_{j=0}^{m-1}\|\partial_t^j u(\cdot,t)\|_{X^{m-1-j}}^2.$$

よって Lemma 3.1 と Lemma 4.1 及び, 数学的帰納法の仮定などを組み合わせることで, 適当な正数

$$C = C(m, \|u_0\|_{X^m(I)}, \|v_0\|_{X^{m-1}(I)}, a, \delta)$$

を選ぶことで, 次が成り立つことが証明できる.

$$\sup_{t\in[0,T_0]}\|A_1\partial_t^{m-1}u(\cdot,t)\|_{L^2(I)}^2 + \sup_{t\in[0,T_0]}\|A_2\partial_t^{m-2}u(\cdot,t)\|_{L^2(I)}^2 \le C. \tag{4.1}$$

更に, 次の Lemma 4.2 も証明できる. (Lemma 4.2 の証明も省略する.)

Lemma 4.2 $j = 0, 1, \ldots, m-1$ に対して, 次が成り立つ.

$$\sup_{t\in[0,T_0]} \|\partial_t^{m-j} u(\cdot,t)\|_{X^j} \lesssim \sup_{t\in[0,T_0]} \|A_1 \partial_t^{m-1} u(\cdot,t)\|_{L^2(I)} + \sup_{t\in[0,T_0]} \|A_2 \partial_t^{m-2} u(\cdot,t)\|_{L^2(I)} + G.$$

ここで G は $\|u\|_{\Lambda_{T_0}^{m-1,m-1}}$ のみに依存する定数を表す.

したがって Lemma 4.2 と (4.1) 及び, 数学的帰納法の仮定を組み合わせることで, 適当な正数

$$C = C(m, \|u_0\|_{X^m(I)}, \|v_0\|_{X^{m-1}(I)}, a, \delta)$$

を選ぶことで, 次が成り立つことが証明できる.

$$\sum_{j=0}^{m} \sup_{t\in[0,T_0]} \|\partial_t^{m-j} u(\cdot,t)\|_{X^j} \le C.$$

つまり $\|u\|_{\Lambda_{T_0}^{m,m}} \le C$ が証明できる. これが示したかったことであった.

References

[1] B. G. Koshlyakov, E. V. Gliner, and M. M. Smilnov, Differential equations of Mathematical physics, Moscow, 1962 (in Russian); English translation: North-Holland Publ. Co., 1964.

[2] S. C. Preston, *The motion of whips and chains*, J. Differential Equations **251** (2011), 504–550.

[3] M. Reeken, *Classical solutions of chain equation I*, Math. Z. **165** (1979), 143–169.

[4] M. Reeken, *Classical solutions of chain equation II*, Math. Z. **166** (1979), 67–82.

[5] M. Takayama, *Initial-boundary value problem for the degenerate hyperbolic equation of a hanging string*, preprint.

[6] D. Yong, *Strings, chains, and ropes*, SIAM Rev. **48** (2006), 771–781.

[7] J. Zhang, S. Childress, A. Libchaber, M. Shelley, *Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one-dimensional flags in a two-dimensional wind*, Nature **408** (2000), 835–839.