

## Schur process and its related topics

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所 白井朋之

Tomoyuki Shirai

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

### 1 はじめに

Schur 測度と Schur 過程は Okounkov [14], Okounkov-Reshetikhin [16] らによって導入された Young 図形全体または Young 図形の有限列全体の上に定義される確率測度である。種々のパラメーターを含み、それらのパラメーターを適当に取ることにより多くの組合せ論的な構造をもつ集合上の確率測度を表現することができる。これらは名前の通り Schur 関数を通して定義がなされるものであるが、最近では Schur 関数を Macdonald 関数に拡張することにより、Macdonald 測度や Macdonald 過程と呼ばれるさらに一般的なものも定義され [2], この拡張によりさらに多くの確率論的・組合せ論的対象が扱えることもわかってきている。この周辺の話題は A. Borodin によって integrable probability と呼ばれて盛んに研究されている。本稿は Borodin-Gorin のレクチャーノート [4]などを参考にして、そのほんの入口である Schur 過程とそれに付随するマルコフ連鎖を紹介することが目的である。

### 2 ポアソン化された Plancherel 測度

$\mathbb{Y}_n$  を  $n$  個の箱からなる Young 図形 (もしくは  $n$  の分割  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$  で  $|\lambda| = \sum_i \lambda_i = n$  となるもの) の全体として、 $\mathbb{Y} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n$  とする。ただし、 $\mathbb{Y}_0 = \{\emptyset\}$ 。このとき Plancherel 測度とは各  $n = 1, 2, \dots$  に対して以下で定義される  $\mathbb{Y}_n$  上の確率測度である。

$$\mathbb{P}_{Pl}^{(n)}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} \quad (\lambda \in \mathbb{Y}_n)$$

Plancherel 測度  $\mathbb{P}_{Pl}^{(n)}$  は以下の合成写像  $\Phi: \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{Y}_n$

$$\mathcal{S}_n \ni \sigma \xrightarrow{\text{RS 対応}} (P(\sigma), Q(\sigma)) \xrightarrow{\text{shape}} \lambda(\sigma) \in \mathbb{Y}_n$$

による  $\mathcal{S}_n$  上の一様分布  $\mathbb{P}_{\mathcal{S}_n}$  の像測度に他ならない。ここで像測度とは

$$(\Phi_* \mathbb{P}_{\mathcal{S}_n})(\lambda) := \mathbb{P}_{\mathcal{S}_n}(\Phi(\sigma) = \lambda)$$

で定義される  $\mathbb{Y}_n$  上の確率測度のことをいう\*

さらに、Plancherel 測度  $\mathbb{P}_{Pl}^{(n)}$  の箱の数  $n$  のポアソン化 (ポアソン分布によるランダム化) を考えよう。まず、非負整数値確率変数  $N$  が平均  $c > 0$  のポアソン分布  $Po(c)$  に従う ( $N \sim Po(c)$ ) とは、

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{c^n e^{-c}}{n!} \quad n = 0, 1, \dots$$

RIMS 研究会「リー型の組合せ論」@京大 RIMS on Oct 3-6, 2016.

本研究は基盤研究 (B) No.26287019 の助成を受けたものです。

\*一般に (可測) 写像  $f: X \rightarrow Y$  があり  $X$  上に確率測度  $\mu$  が定義されていれば、 $(f_* \mu) := \mu(f^{-1}(A))$  によって確率測度が定義される。これを  $\mu$  の  $f$  による像測度または誘導測度という。

となるときをいう。  $\mathbb{E}[N] = \text{var}(N) = c$  であることは簡単に確かめられる。  $\mathbb{P}_{\text{Pl}}^{(n)}$  の  $n$  がポアソン確率変数  $N \sim \text{Po}(\theta^2)$  によってランダム化された  $\mathbb{Y}$  上の確率測度 (形式的には  $\mathbb{E}[\mathbb{P}_{\text{Pl}}^{(N)}]$ ) を「ポアソン化された Plancherel 測度  $\mathbb{P}_{\text{PPl}}$ 」とよぶ。つまり、まず  $N = n$  をランダムに決めてその  $n$  に対して  $\mathbb{Y}_n$  上の Plancherel 測度  $\mathbb{P}_{\text{Pl}}^{(n)}$  を考える。このように定義される確率測度がポアソン化された Plancherel 測度で、  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  に対して

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\text{PPl}}(\lambda) &= \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}(\lambda | N = n) = \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{\text{Pl}}^{(n)}(\lambda) \\ &= \frac{\theta^{2n} e^{-\theta^2}}{n!} \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} = e^{-\theta^2} \left( \frac{\theta^n \dim \lambda}{n!} \right)^2. \end{aligned}$$

つまり、

$$\mathbb{P}_{\text{PPl}}(\lambda) = e^{-\theta^2} \left( \frac{\theta^{|\lambda|} \dim \lambda}{|\lambda|!} \right)^2. \quad (2.1)$$

とあらわされる。これは後に見るように、Schur 測度の特別な場合になっている。

ちょっと横道に逸れるが、ポアソン化はある種のスムージングに相当する。一般に数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  が与えられたときに  $N \sim \text{Po}(t)$  とすると

$$A(t) := \mathbb{E}[a_N] = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$$

は数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  の階乗母関数に他ならない。母関数を考えると計算がしばしば簡略化されることはよくご存知だと思うが、この母関数から数列  $\{a_n\}$  の情報を引き出すことがしばしば重要である。この操作は「脱ポアソン化 (de-Poissonization)」と呼ばれることもある。脱ポアソン化の方法は様々あるが、例えば、  $\{a_n\}$  が単調減少で  $a_n \in (0, 1)$  ならば、  $n > 4s \log n$  ( $s \geq 2$ ) に対して成り立つ

$$A(n + 2\sqrt{sn \log n}) - \frac{1}{n^s} \leq a_n \leq A(n - 2\sqrt{sn \log n}) + \frac{1}{n^s}$$

のような形の不等式から数列  $\{a_n\}$  の情報を引き出せる。

Plancherel 測度は Ulam の問題とも呼ばれるランダム置換の最長増加部分列の問題と密接に関係している。また、Plancherel 測度で Young 図形をサンプルしたときにどのような形が典型的に出てくるか、特に  $n \rightarrow \infty$  での極限形状なども詳しく調べられている (cf. [17, 24])。

### 3 Schur 測度

以下 Schur 関数など対称関数については Macdonald([12]) を参照。

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$  と  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$  に対して、2つの Schur 関数  $s_{\lambda}(\mathbf{x}), s_{\lambda}(\mathbf{y})$  を用いて  $\mathbb{Y}$  上の確率測度

$$\mathbb{S}_{\mathbf{x}; \mathbf{y}}(\lambda) := \frac{1}{H(\mathbf{x}; \mathbf{y})} s_{\lambda}(\mathbf{x}) s_{\lambda}(\mathbf{y}) \quad (\lambda \in \mathbb{Y})$$

を定めたい。ただし、  $H(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  は

$$H(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} s_{\lambda}(\mathbf{x}) s_{\lambda}(\mathbf{y})$$

よって定まる正規化定数である。\$S\_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}\$ が \$\mathbb{Y}\$ 上の確率測度になるためには (i) \$s\_\lambda(\mathbf{x}), s\_\lambda(\mathbf{y}) \ge 0\$ (\$\forall \lambda \in \mathbb{Y}\$) と (ii) \$H(\mathbf{x}; \mathbf{y}) < \infty\$ が必要である。例えば、\$x\_i, y\_j \in [0, 1]\$ (\$\forall i, j\$) かつ \$\sum\_i x\_i < \infty\$, \$\sum\_j y\_j < \infty\$ ならば条件 (i), (ii) をみたす。またそのときコーシーの恒等式により

$$H(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \prod_{i,j=1}^{\infty} (1 - x_i y_j)^{-1} = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(\mathbf{x}) p_k(\mathbf{y})}{k} \right)$$

を得る。ただし、\$p\_k(\mathbf{x}) = \sum\_{i=1}^{\infty} x\_i^k\$.

\$\mathbb{C}\$-係数の対称関数環を \$\Lambda = \Lambda\_{\mathbb{C}}\$ とあらわす。\$\Lambda\$ はべき和対称関数 \$\{p\_k\}\_{k=1}^{\infty}\$ や完全対称関数 \$\{h\_k\}\_{k=1}^{\infty}\$ によって生成される代数とみなせる。

$$\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots] = \mathbb{C}[h_1, h_2, \dots]$$

また、Schur 関数 \$\{s\_\lambda, \lambda \in \mathbb{Y}\}\$ は \$\Lambda\$ の線形基底となることに注意しておく。このとき、\$\mathbf{x} = (x\_1, x\_2, \dots)\$ に対して

$$\Lambda \ni f \mapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$$

は代数としての準同型を与える。特に \$\mathbf{x} = (x\_1, x\_2, \dots)\$ が先に述べたような非負性の条件 \$x\_i \ge 0\$ をみたせば、\$\rho\_{\mathbf{x}}(s\_\lambda) \ge 0\$ となる。これらのことを念頭において以下の定義をおく。

**定義 3.1.** 準同型 \$\rho : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}\$ を特殊化とよぶ。\$\rho(f)\$ のことを以下では \$f(\rho)\$ と書く。また、\$s\_\lambda(\rho) \ge 0\$ (\$\forall \lambda \in \mathbb{Y}\$) となる特殊化 \$\rho\$ を「Schur 正」な特殊化という。

Schur(確率) 測度を定義しよう。

**定義 3.2** (Schur 測度 [14]). Schur 正な特殊化 \$\rho\_1, \rho\_2\$ に対して

$$S_{\rho_1, \rho_2}(\lambda) := \frac{1}{H(\rho_1; \rho_2)} s_\lambda(\rho_1) s_\lambda(\rho_2) \quad (3.1)$$

と定義する。ただし、\$H(\rho\_1; \rho\_2)\$ は正規化定数であり、形式的には

$$H(\rho_1; \rho_2) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(\rho_1) p_k(\rho_2)}{k} \right) \quad (3.2)$$

と書ける。\$H(\rho\_1; \rho\_2) < \infty\$ であるとき、\$S\_{\rho\_1, \rho\_2}\$ を \$\rho\_1, \rho\_2\$ によって定義される Schur 測度という。

**注意 3.3.** (i) 例えば、ある \$r \in [0, 1)\$ が存在して \$p\_k(\rho\_i) \le Cr^k\$ (\$i = 1, 2, k = 1, 2, \dots\$) ならば、\$H(\rho\_1; \rho\_2) < \infty\$ となる。

(ii) \$H(\rho\_1; \rho\_2) = \infty\$ のときには、\$\tilde{S}\_{\rho\_1, \rho\_2}(\lambda) := s\_\lambda(\rho\_1) s\_\lambda(\rho\_2)\$ と定義することにより \$\sigma\$-有限な測度は定まるので、正測度を定めるという観点からは \$\rho\_1, \rho\_2\$ が Schur 正であるための条件が重要。

ここまで Schur 正な特殊化として先に述べた \$\rho\_{\mathbf{x}}\$ の形のもの以外どのようなものがあるかについては述べなかった。\$\rho\$ が Schur 正であるための条件は \$\Lambda\$ の生成系 \$\{p\_k\}\_{k=1}^{\infty}\$ や \$\{h\_k\}\_{k=1}^{\infty}\$ 上での \$\rho\$ の値を指定することによりその特徴付けが与えられる。

**定理 3.4.** 特殊化 \$\rho\$ が Schur 正であるための必要十分条件は、パラメーター \$\alpha = (\alpha\_1 \ge \alpha\_2 \ge \dots \ge 0)\$, \$\beta = (\beta\_1 \ge \beta\_2 \ge \dots \ge 0)\$, \$\gamma \ge 0\$ で \$\sum\_i (\alpha\_i + \beta\_i) < \infty\$ をみたすものが存在して、

$$p_1(\rho) = \gamma + \sum_i (\alpha_i + \beta_i)$$

$$p_k(\rho) = \sum_i (\alpha_i^k + (-1)^{k-1} \beta_i^k).$$

となることである。また、以下の  $h_k$  に対する条件とも同値。

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(\rho) z^k = e^{\gamma z} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z}.$$

注意 3.5. 上の定理は Thoma や Edrei によって証明されている。Thoma(1964) は無限次対称群  $S_{\infty}$  の表現論の文脈で [23], また Edrei(1953) は下三角テプリッツ行列の total positivity の文脈で証明している [8].

矩形行列  $A$  が totally positive であるとは任意の部分正方行列の行列式が非負となることをいう。Schoenberg は以下の関数のテイラー展開

$$C z^k e^{\gamma z} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad (C > 0, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \gamma \geq 0)$$

の係数  $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$  からなる下三角行列

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

が totally positive であることを示し、逆も正しいであろうと予想した [19]. Edrei は予想を肯定的に解決した [8]. total positivity と確率論の関連などについては [10] に詳しい。

例 3.6.  $c \geq 0$  とする。

(i)  $\alpha_1 = c$  でその他のパラメーターはすべて 0 に対応する特殊化を  $\rho^{(c)}$  とあらわすと、

$$s_{\lambda}(\rho^{(c)}) = \begin{cases} c^{|\lambda|} & \text{if } \ell(\lambda) = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(ii)  $\beta_1 = c$  でその他のパラメーターはすべて 0 に対応する特殊化を  $\rho_{(c)}$  とあらわすと、

$$s_{\lambda}(\rho_{(c)}) = \begin{cases} c^{|\lambda|} & \text{if } \ell(\lambda') = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ただし、 $\lambda'$  は  $\lambda$  の転置をあらわす。

(iii)  $\gamma = c$  でその他のパラメーターはすべて 0 に対応する特殊化を  $\rho_c$  とすると、

$$s_{\lambda}(\rho_c) = \frac{c^{|\lambda|} \dim \lambda}{|\lambda|!} \quad (\lambda \in \mathbb{Y}).$$

$\rho_{\theta}$  は上の例 (iii) で与えられるものとする。(3.2) より  $H(\rho_{\theta}; \rho_{\theta}) = e^{\theta^2}$  であることは簡単な計算より明らか。よって、(2.1) と (3.1) を比較すればポアソン化された Plancherel 測度は以下のように Schur 測度として得られることがわかる。

$$\mathbb{P}_{\text{PP1}} = \mathbb{S}_{\rho_{\theta}; \rho_{\theta}}$$

Schur 測度の一つの重要な性質は Okounkov によって得られた次の定理である。

**定理 3.7** ([14]). Schur 測度はすべて行列式点過程 (determinantal point process) を誘導する.

この定理は少し説明が必要である. まず (高々) 可算な集合  $R$  に対してその上の配置空間を  $\text{Conf}(R) = \{0, 1\}^R \cong 2^R$  と定義する<sup>†</sup>.  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathbb{Y}$  に対して

$$\mathbb{Y} \ni \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \mapsto X(\lambda) = \{\lambda_i - i + \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots\} \in \text{Conf}(Z + \frac{1}{2})$$

これは Young 図形からマヤ図形への写像を与えている. この写像により  $\mathbb{Y}$  上の確率測度は  $\text{Conf}(Z + 1/2)$  上の確率測度とみなせる. 一般に  $\text{Conf}(R)$  上の確率測度  $\mu$  を  $R$  上の点過程とよぶ.  $R$  上の点過程は相関関数

$$\rho(A) = \mu(\{\xi \in \text{Conf}(R) : \xi \supset A\}) \quad A \subset R \text{ は有限集合}$$

によって完全に特徴付けられる. 例えば,  $\rho(\{x\})$  は点  $x \in R$  に点の存在する密度をあらわし,  $\rho(\{x, y\})$  は点  $x, y \in R$  ともに点が存在する密度をあらわす. ある核関数  $K : R \times R \rightarrow \mathbb{C}$  が存在して

$$\rho(A) = \det(K(x, y))_{x, y \in A}$$

とあらわされる  $R$  上の点過程を「行列式点過程」という (cf. [20, 21, 22]). ある確率測度が行列式点過程であること (がわかること) の利点は, 行列  $(K(x, y))_{x, y \in R}$  の情報ですべての事象の確率が原理的には計算可能になることや, 極限定理も  $K(x, y)$  の極限の問題に帰着できる場合が多いことなどである. これは平均 0 のガウス分布 (ガウス過程) が共分散関数  $V(x, y)$  のみで決定されるという事実に近い.

## 4 Schur 過程 (Schur process)

話に入る前に確率論の言葉遣いについて少しコメントしておく. 一般に集合  $S$  に値をとる確率変数の族  $\{X_t\}_{t \in T}$  をパラメーター集合  $T$  をもつ ( $S$ -値) 確率過程という.  $T$  が時間のパラメーターである場合も多いので「過程」という言葉が使われるが,  $\{X_x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$  のようにパラメーターが空間変数になっている場合も多く, その場合は「場」という言葉を使うこともある. 例えばガウス過程をガウス場のようにである.  $S$  が (高々) 可算な集合のとき,  $S$ -値確率過程  $X = \{X_t\}_{t \in T}$  は同時分布

$$\mu_X(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n) \quad (\forall n \geq 1, \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall x_1, \dots, x_n \in S)$$

の値により定まる. 以下で定義する Schur 過程はこの意味で同時分布に相当するものを定義しているので「過程」という言葉が用いられている (のだと思う).

Schur 過程を定義するために歪 Schur 関数を思いだしておく. 2変数  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  の Schur 関数を  $\mathbf{y}$  の Schur 関数で展開したときに係数としてあらわれる  $\mathbf{x}$  の対称関数を歪 Schur 関数という. つまり,

$$s_\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}} s_{\lambda/\mu}(\mathbf{x}) s_\mu(\mathbf{y})$$

で定義される  $s_{\lambda/\mu}(\mathbf{x})$  を歪 Schur 関数という.  $s_{\lambda/\mu} \in \Lambda$  であるから, 特殊化  $\rho$  の  $s_{\lambda/\mu}$  での値を同様に  $s_{\lambda/\mu}(\rho)$  と書く.

<sup>†</sup> $\{0, 1\}^R \ni \xi \mapsto \{x \in R : \xi(x) = 1\} \in 2^R$  によって  $\{0, 1\}^R$  とべき集合  $2^R$  は自然に同一視される.

後に用いるいくつかの性質を列挙しておく。

(i)  $\mu \subset \lambda$  でなければ  $s_{\lambda/\mu}(\rho) = 0$ . (ii)  $s_{\lambda/\emptyset} = s_\lambda$ . (iii)  $s_{\lambda/\mu}(0) = \delta_{\lambda,\mu}$ . ただし,  $0$  は定数  $f \equiv 1$  以外では  $0$  を返す特殊化で,  $\delta_{\lambda,\mu}$  はクロネッカーのデルタである.

(iv)  $\rho$  が Schur 正の特殊化であれば任意の  $\lambda, \mu$  に対して  $s_{\lambda/\mu}(\rho) \geq 0$  である.

以下は Schur 過程の定義は Okounkov-Reshetikhin[16] によるものである.

**定義 4.1** (Schur 過程 [16]).  $2N$  個の Schur 正な特殊化  $\rho_i^+, i = 0, 1, \dots, N-1, \rho_j^-, j = 1, 2, \dots, N$  に対して

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, \dots, \lambda^{(N-1)}, \mu^{(N-1)}, \lambda^{(N)}) \\ &= \frac{1}{Z} s_{\lambda^{(1)}}(\rho_0^+) \left( \prod_{j=1}^{N-1} s_{\lambda^{(j)}/\mu^{(j)}}(\rho_j^-) s_{\lambda^{(j+1)}/\mu^{(j)}}(\rho_j^+) \right) s_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-) \\ &= \frac{1}{Z} s_{\lambda^{(1)}}(\rho_0^+) s_{\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}}(\rho_1^-) s_{\lambda^{(2)}/\mu^{(2)}}(\rho_1^+) \cdots s_{\lambda^{(N)}/\mu^{(N-1)}}(\rho_{N-1}^+) s_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-) \end{aligned} \quad (4.1)$$

で定義される長さ  $2N-1$  の Young 図形のジグザグ列

$$\emptyset \subset \lambda^{(1)} \supset \mu^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \supset \mu^{(2)} \subset \cdots \subset \lambda^{(N-1)} \supset \mu^{(N-1)} \subset \lambda^{(N)} \supset \emptyset$$

からなる集合 ( $\subset \mathbb{Y}^{2N-1}$ ) 上にこうして定まる確率測度  $\mathbb{S}$  のことを Schur 過程という.

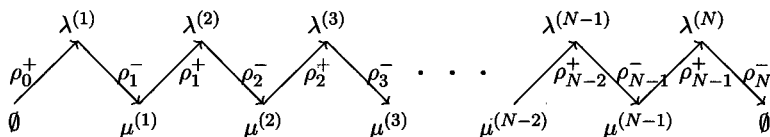
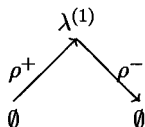


図 1: Young 図形のジグザグ列

注意 4.2. (i)  $N = 1$  のとき, Schur 過程は Schur 測度  $\mathbb{S}_{\rho^+, \rho^-}$  に他ならない.



(ii)  $s_{\lambda/\mu}(0) = \delta_{\lambda,\mu}$  となることに注意すると, 特殊化  $0$  がある矢印の両端の Young 図形は同一視して矢印を減らすことができる. 例えば, 図 2 にあるように下向きの矢印に対応する特殊化  $\rho_1^-$  が  $0$  のときには以下のようにジグザグ列  $\lambda^{(1)} \supset \mu^{(1)} \subset \lambda^{(2)}$  を上昇列  $\lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)}$  と同一視できる. 上向きの矢印に対応する特殊化が  $0$  のときには下降列と同一視して矢印とヤング図形を一つ減らせる.

(iii) 正規化定数  $Z$  は簡単な計算により以下で与えられる.

$$Z = \prod_{1 \leq i < j \leq N} H(\rho_i^+; \rho_j^-). \quad (4.2)$$

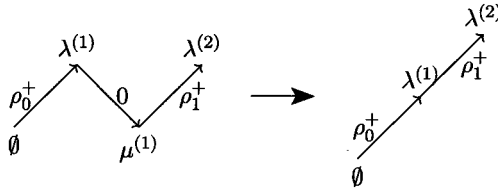


図 2: ジグザグ列と単調列の同一視 ( $\lambda^{(1)} = \mu^{(1)}$ )

### 4.1 平面分割・3次元 Young 図形

長方形型の Young 図形に「各行・各列ともに単調非増加」になるように非負整数を配置したものを平面分割という。図 3 の左図の平面分割を時計まわりに 45 度回転して、各数字の数だけ各辺 1 の立方体を積むと図 3 の右図にあるような 3 次元 Young 図形があらわれる。平面分割の数字の総計はその立体の体積と思える。

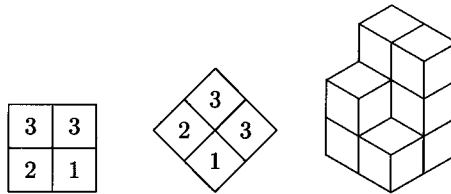


図 3: 2 × 2 の平面分割と 3 次元 Young 図形

$q \in (0, 1)$  に対して、サイズ  $n$  の正方形の平面分割の集合

$$\mathcal{Y}_n = \{A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} : a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} (\forall i, j), a_{ij} \text{ は } i, j \text{ について単調非増加}\}$$

上に確率測度

$$\mathbb{P}_q(A) = \frac{1}{Z_q} q^{\text{vol}(A)} \tag{4.3}$$

を定める。ただし、 $Z_q$  は正規化定数、 $\text{vol}(A) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}$  である。

確率測度  $\mathbb{P}_q$  が Schur 過程としてあらわされることを見てみよう。例えば、図 3 の場合は、45 度回転した中図を左から右へ読むと  $\emptyset \subset (2) \subset (3, 1) \subset (3) \subset \emptyset$  という Young 図形の列が得られる。同様のことを一般の  $A \in \mathcal{Y}_n$  の場合に考えて

$$\lambda^{(i)} = \begin{cases} (a_{n+1-i, 1}, a_{n+2-i, 2}, \dots, a_{n, i}), & i = 1, 2, \dots, n, \\ (a_{1, i-n+1}, a_{2, i-n+2}, \dots, a_{2n-i, n}), & i = n+1, n+2, \dots, 2n-1. \end{cases}$$

と定義すると、

$$\emptyset \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots \subset \lambda^{(n-1)} \subset \lambda^{(n)} \supset \lambda^{(n+1)} \supset \lambda^{(n+2)} \supset \dots \supset \lambda^{(2n-1)} \supset \emptyset$$

という Young 図形の列と同一視できる。これを念頭において、図 1 において  $N = 2n - 1$  として

$$\begin{aligned} \rho_i^+ &= \rho^{(q^{-i-1})} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ \rho_j^- &= \rho^{(q^{j+1})} \quad (j = n, n+1, \dots, N = 2n-1), \end{aligned}$$

残りの特殊化を 0 としたものを考える。ただし、 $\rho^{(c)}$  は例 3.6(i) で定義されたものである。このとき、対応する Schur 過程は (4.3) の確率測度  $\mathbb{P}_q$  を与える。実際、

$$\begin{aligned} & \prod_{i=0}^{n-1} s_{\lambda^{(i+1)}/\lambda^{(i)}}(\rho^{(q^{-i-1})}) \prod_{j=n}^{2n-1} s_{\lambda^{(j)}/\lambda^{(j+1)}}(\rho^{(q^{j+1})}) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (q^{-i-1})^{|\lambda^{(i+1)}| - |\lambda^{(i)}|} \prod_{j=n}^{2n-1} (q^{j+1})^{|\lambda^{(j)}| - |\lambda^{(j+1)}|} \\ &= q^{\sum_{i=1}^N |\lambda^{(i)}|} = q^{\text{vol}(A)}. \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda^{(0)} = \lambda^{(2n)} = \emptyset$  としている。また、

$$H(\rho_i^+; \rho_j^-) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (q^{-i-1})^k (q^{j+1})^k\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} q^{(j-i)k}\right) = (1 - q^{j-i})^{-1}$$

であるから

$$\begin{aligned} Z_q &= \prod_{0 \leq i \leq n-1 < n \leq j \leq N} H(\rho_i^+; \rho_j^-) = \prod_{0 \leq i \leq n-1 < n \leq j \leq N} (1 - q^{j-i})^{-1} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-\nu(k)} \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\nu(k) = \#\{(i, j) : 0 \leq i \leq n-1 < n \leq j \leq N, j-i = k\}$$

である。特に  $\mathcal{Y}_{\infty}$  の場合には  $n \rightarrow \infty$  の極限をとることにより

$$Z_q = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{-k}$$

を得る。これらは MacMahon の公式として知られている [13].

## 4.2 上昇 Schur 過程と Gelfand-Tsetlin pattern

図 1 において  $\rho_i^- = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) の場合を考える。図 2 の同一視を用いると図 1 は図 4 を考えることと同値である。

このとき、

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N-1)}, \lambda^{(N)}) \\ &= \frac{1}{Z} s_{\lambda^{(1)}}(\rho_0^+) s_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}}(\rho_1^+) \cdots s_{\lambda^{(N)}/\lambda^{(N-1)}}(\rho_{N-1}^+) s_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-) \end{aligned} \quad (4.4)$$

によって定義される  $\mathbb{Y}^N$  上の確率測度  $\mathbb{S}$  を「上昇的 Schur 過程」ということにする。もちろん定義より確率測度  $\mathbb{S}$  の台  $\text{supp } \mathbb{S}$  は長さ  $N$  の上昇列全体からなる集合

$$\mathbb{Y}_{asc}^N := \{(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)}) \in \mathbb{Y}^N : \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \cdots \subset \lambda^{(N)}\}$$

に含まれる。



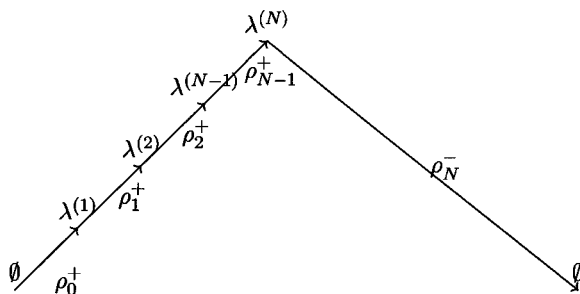


図 4: Young 図形の上昇列

さて、さらにここで特殊化をさらに特殊なものにする。つまり、

$$\rho_0^+ = \rho_1^+ = \cdots = \rho_{N-1}^+ = \rho^{(1)}$$

とする。このとき、

$$s_{\lambda/\mu}(\rho^{(c)}) = \begin{cases} c^{|\lambda| - |\mu|} & \text{if } \lambda/\mu \text{ is a horizontal strip,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

であることに注意する。ここで、 $\lambda/\mu$  が horizontal strip (resp. vertical strip) であるとは、

$$\lambda_i^T - \mu_i^T \in \{0, 1\} \quad (\forall i) \quad (\text{resp. } \lambda_i - \mu_i \in \{0, 1\} \quad (\forall i))$$

となることである。ただし、 $\lambda^T$  は  $\lambda$  の転置をあらわす。またこのとき、 $\mu \prec \lambda$  とあらわす。この注意より隣りあう Young 図形は  $\lambda^{(i-1)} \prec \lambda^{(i)}$  の関係をみたさなければいけないから、

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N-1)}, \lambda^{(N)}) \\ &= \frac{1}{Z} s_{\lambda^{(1)}}(\rho^{(1)}) s_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}}(\rho^{(1)}) \cdots s_{\lambda^{(N)}/\lambda^{(N-1)}}(\rho^{(1)}) s_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-) \end{aligned} \quad (4.5)$$

によって定義される上昇的 Schur 過程  $\mathbb{S}$  の台は

$$\mathbb{Y}_{asc, \prec}^N := \{(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)}) \in \mathbb{Y}^N : \emptyset \prec \lambda^{(1)} \prec \lambda^{(2)} \prec \cdots \prec \lambda^{(N)}\} \quad (4.6)$$

の形の集合に含まれる。

注意 4.3.  $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N)}) \in \mathbb{Y}_{asc, \prec}^N$  の各  $\lambda^{(k)}$  は高々  $k$  個の非零の行をもち、すべて次の interlacing 性をもつ：

$$\lambda_1^{(k)} \geq \lambda_1^{(k-1)} \geq \lambda_2^{(k)} \geq \cdots \geq \lambda_{k-1}^{(k-1)} \geq \lambda_k^{(k)} \quad (k = 2, 3, \dots, N) \quad (4.7)$$

さて、 $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)}) \in \mathbb{Y}_{asc, \prec}^N$  に対して、

$$x_i^{(j)} := \lambda_{j+1-i}^{(j)} + i - j \in \mathbb{Z}, \quad (i = 1, 2, \dots, j, j = 1, 2, \dots, N)$$

と定義し  $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_j^{(j)}) \in \mathbb{Z}^j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) とすると、任意の  $j$  に対して不等式

$$x_{i-1}^{(j)} < x_{i-1}^{(j-1)} \leq x_i^{(j)} \quad (i = 1, 2, \dots, j)$$

をみます. この不等式をみたととき  $x^{(j-1)} \prec x^{(j)}$  とあらわすことにする.

$$\text{GT}_N := \{(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}) \in \mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^2 \times \dots \times \mathbb{Z}^N : x^{(1)} \prec x^{(2)} \prec \dots \prec x^{(N)}\}$$

の元を Gelfand-Tsetlin pattern (scheme) という. 例えば,  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \dots = \lambda^{(N)} = \emptyset$  の場合は,

$$x^{(j)} = (-j + 1, -j + 2, \dots, 0), \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

が対応する. (図 6 を参照せよ.)

$\mathbb{Y}_{asc, \prec}^N$  上の Schur 過程  $\mathbb{S}$  は写像

$$\mathbb{Y}_{asc, \prec}^N \ni (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N)}) \mapsto (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}) \in \text{GT}_N \quad (4.8)$$

によって  $\text{GT}_N$  上の確率測度を誘導する.

## 5 Schur 過程とマルコフ連鎖

Schur 過程に付随したマルコフ連鎖を定義する前にそれを抽象化した形で可換な確率行列の族から定まるマルコフ連鎖について見ておく (cf. [1]).

### 5.1 可換マルコフ連鎖

まず高々可算集合  $S$  上のマルコフ連鎖について簡単に復習しておく.  $S$  上の (時間的に一様な) マルコフ連鎖とは確率過程  $\{X_t\}_{t=0,1,\dots}$  で任意の  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_{t-1}, x, y \in S$  に対して

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x) (= P(x, y)) \quad (5.1)$$

という性質をもつものである. このとき,  $P = (P(x, y))_{x, y \in S}$  を推移確率行列という. マルコフ連鎖は推移確率行列  $P$  を定めることにより完全に決定する.  $S$  上の確率測度  $\mu$  を行ベクトルだと思って,

$$(\mu P)(y) =: \sum_{x \in S} \mu(x) P(x, y)$$

によって行ベクトル  $\mu P$  を新たに定めると, これは初期分布  $\mu$  をもつマルコフ連鎖の 1 ステップ後の分布に他ならない. 一般に  $n$  ステップ後の分布は  $\mu P^n$  となる.  $n \rightarrow \infty$  で  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu P^n$  が存在するとき極限分布という. もし  $\pi$  が存在するならば,  $\pi P = \pi$  をみとす必要がある. この関係式をみとす  $\pi$  を定常分布という. 一般に (5.1) において右辺が  $t$  に依存する場合は  $P(x, y)$  のかわりに  $P_t(x, y)$  となる. このときは時間的に非一様なマルコフ連鎖を扱うことになる. 以下の話は感覚的にはこの場合に近い.

$S_i, \tilde{S}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は高々可算集合,  $\Lambda_{k-1}^k : S_k \times S_{k-1} \rightarrow [0, 1]$ ,  $\tilde{\Lambda}_{k-1}^k : \tilde{S}_k \times \tilde{S}_{k-1} \rightarrow [0, 1]$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ),  $P_k : S_k \times \tilde{S}_k \rightarrow [0, 1]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) はすべて推移確率行列で, 以下の可換図式が成り立つとする.

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & \xrightarrow{\Lambda_{n-1}^n} & S_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_k & \xrightarrow{\Lambda_{k-1}^k} & S_{k-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{\Lambda_1^2} & S_1 \\ \downarrow P_n \circ & & \downarrow P_{n-1} & & & & \downarrow P_k \circ & & \downarrow P_{k-1} & & & & \downarrow P_2 \circ & & \downarrow P_1 \\ \tilde{S}_n & \xrightarrow{\tilde{\Lambda}_{n-1}^n} & \tilde{S}_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \tilde{S}_k & \xrightarrow{\tilde{\Lambda}_{k-1}^k} & \tilde{S}_{k-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \tilde{S}_2 & \xrightarrow{\tilde{\Lambda}_1^2} & \tilde{S}_1 \end{array} \quad (5.2)$$

つまり,

$$\Delta_{k-1}^k := P_{k-1} \Lambda_{k-1}^k = \tilde{\Lambda}_{k-1}^k P_k \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

が成り立つとする。(可換図(5.2)は概念図で、正確には(5.2)中の $S_k$ という記号は $S_k$ 上の関数空間をあらわす。また、例えば $S_k \xrightarrow{P_k} \tilde{S}_k$ は推移確率 $P_k$ によって $S_k$ から $\tilde{S}_k$ にジャンプすると読む。)

さて有限列の状態空間を

$$S^{(n)} := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n : \prod_{k=2}^n \Lambda_{k-1}^k(x_k, x_{k-1}) > 0\}$$

$$\tilde{S}^{(n)} := \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in \tilde{S}_1 \times \tilde{S}_2 \times \dots \times \tilde{S}_n : \prod_{k=2}^n \tilde{\Lambda}_{k-1}^k(\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k-1}) > 0\}$$

を定義して、 $S^{(n)}$ から $\tilde{S}^{(n)}$ へのマルコフ連鎖の推移確率行列 $P^{(n)}$ を以下のように定義する：  
 $X = (x_1, \dots, x_n) \in S^{(n)}$ ,  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \tilde{S}^{(n)}$  に対して、

$$P^{(n)}(X, \tilde{X}) := \begin{cases} P_1(x_1, \tilde{x}_1) \prod_{k=2}^n \frac{P_k(x_k, \tilde{x}_k) \tilde{\Lambda}_{k-1}^k(\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k-1})}{\Delta_{k-1}^k(x_k, \tilde{x}_{k-1})} & \text{if } \prod_{k=2}^n \Delta_{k-1}^k(x_k, \tilde{x}_{k-1}) > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.3)$$

$P^{(n)}$ によって定義されるマルコフ連鎖の推移について見ておく。 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{(n)}$ が与えられたとする。

1.  $P_1(x_1, \tilde{x}_1)$ によって $x_1 \in S_1$ から $\tilde{x}_1 \in \tilde{S}_1$ に推移させる。
2.  $\tilde{x}_1$ が決定した後、 $\frac{P_2(x_2, \tilde{x}_2) \tilde{\Lambda}_1^2(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1)}{\Delta_1^2(x_2, \tilde{x}_1)}$ という確率で $\tilde{x}_2$ を定める。この確率は $S_2 \xrightarrow{\Delta_1^2} \tilde{S}_1$ によって $x_2$ から $\tilde{x}_1$ へ推移するという条件のもとで、途中 $\tilde{x}_2$ を通る条件付き確率である。
3.  $\tilde{x}_{k-1}$ が決定した後、 $\frac{P_k(x_k, \tilde{x}_k) \tilde{\Lambda}_{k-1}^k(\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k-1})}{\Delta_{k-1}^k(x_k, \tilde{x}_{k-1})}$ という確率で $\tilde{x}_k$ を定めるという操作を $k = n$ まで繰り返す。
4. こうして、 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{(n)}$ から $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in \tilde{S}^{(n)}$ への $P^{(n)}$ による推移が定まる。

さて、 $S_n$ 上の確率測度 $\mu_n$ に対して

$$\mu^{(n)}(X) := \mu_n(x_n) \Lambda_{n-1}^n(x_n, x_{n-1}) \Lambda_{n-2}^{n-1}(x_{n-1}, x_{n-2}) \cdots \Lambda_1^2(x_2, x_1) \quad (X \in S^{(n)}) \quad (5.4)$$

とすると、 $S^{(n)}$ 上の確率測度 $\mu^{(n)}$ が定まる。これは初期分布 $\mu_n$ をもつ(時間的に非一様な)マルコフ連鎖のパス $(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$ の分布をあらわす確率測度とみなせる。同様に、 $\tilde{S}_n$ 上の確率測度 $\tilde{\mu}_n := \mu_n P_n$ に対して

$$\tilde{\mu}^{(n)}(\tilde{X}) := \tilde{\mu}_n(\tilde{x}_n) \tilde{\Lambda}_{n-1}^n(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n-1}) \tilde{\Lambda}_{n-2}^{n-1}(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_{n-2}) \cdots \tilde{\Lambda}_1^2(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1) \quad (\tilde{X} \in \tilde{S}^{(n)})$$

とすると、 $\tilde{S}^{(n)}$ 上の確率測度 $\tilde{\mu}^{(n)}$ が定まる。このとき、

$$\tilde{\mu}^{(n)} = \mu^{(n)} P^{(n)} \quad (5.5)$$

が成り立つ。

## 5.2 Schur 関数の等式

マルコフ連鎖を定義するためにいくつか Schur 関数の和に対する等式をまとめておく。  
特殊化  $\rho, \rho'$  に対して

$$p_k((\rho, \rho')) = p_k(\rho) + p_k(\rho') \quad (\forall k = 1, 2, \dots)$$

によって定まる特殊化を  $(\rho, \rho')$  とあらわす。  $(\rho, \rho') = (\rho', \rho)$  である。また、  $((\rho, \rho'), \rho'')$  は  $(\rho, \rho', \rho'')$  のようにあらわす。

以後、  $p_k((\rho, \rho'))$  や  $s_\lambda((\rho, \rho'))$  は単に  $p_k(\rho, \rho')$ ,  $s_\lambda(\rho, \rho')$  などと書く。

**命題 5.1.** 以下の等式が成立する。

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Y}} s_{\lambda/\nu}(\rho) s_{\nu/\mu}(\rho') = s_{\lambda/\mu}(\rho, \rho') \quad (5.6)$$

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Y}} s_{\mu/\lambda}(\rho) s_{\mu/\nu}(\rho') = H(\rho; \rho') \sum_{\kappa \in \mathbb{Y}} s_{\lambda/\kappa}(\rho') s_{\nu/\kappa}(\rho) \quad (5.7)$$

等式 (5.6) と (5.7) は図 5 にあるように、それぞれ矢印の簡約とフリップに対応している。

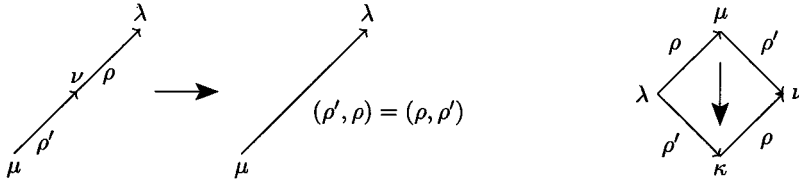


図 5: 等式 (5.6) と (5.7) の矢印による解釈

## 5.3 $\mathbb{Y}$ 上のマルコフ連鎖

Schur 測度のクラスを保存する  $\mathbb{Y}$  上のマルコフ連鎖を定義する。まず  $\mathbb{Y}$  上で推移確率行列を定義しよう。

**定義 5.2.**  $\rho, \rho'$  は Schur 正な特殊化とする。  $\lambda, \mu \in \mathbb{Y}$  に対して

$$p_{\lambda, \mu}^{\uparrow}(\rho; \rho') := \frac{1}{H(\rho; \rho')} \frac{s_{\mu}(\rho)}{s_{\lambda}(\rho)} s_{\mu/\lambda}(\rho'), \quad p_{\lambda, \mu}^{\downarrow}(\rho; \rho') := \frac{1}{s_{\lambda}(\rho, \rho')} s_{\mu}(\rho) s_{\lambda/\mu}(\rho')$$

と定義する。また、  $P^{\uparrow}(\rho; \rho') = (p_{\lambda, \mu}^{\uparrow}(\rho; \rho'))_{\lambda, \mu \in \mathbb{Y}}$ ,  $P^{\downarrow}(\rho; \rho') = (p_{\lambda, \mu}^{\downarrow}(\rho; \rho'))_{\lambda, \mu \in \mathbb{Y}}$  をそれぞれ行列とする。

**命題 5.3.** 行列  $P^{\uparrow}(\rho; \rho')$  と  $P^{\downarrow}(\rho; \rho')$  はともに確率行列となる。

**証明.**  $\sum_{\mu} p_{\lambda, \mu}^{\uparrow}(\rho; \rho') = \sum_{\mu} p_{\lambda, \mu}^{\downarrow}(\rho; \rho') = 1$  を示せばよいが、(5.6) と (5.7) から簡単にわかる。  $\square$

よって、  $P^{\uparrow}(\rho; \rho')$  と  $P^{\downarrow}(\rho; \rho')$  によりそれぞれ  $\mathbb{Y}$  上のマルコフ連鎖  $\{X^{\uparrow}(t)\}_{t=0,1,2,\dots}$  と  $\{X^{\downarrow}(t)\}_{t=0,1,2,\dots}$  が定まる。  $X^{\uparrow}$  (resp.  $X^{\downarrow}$ ) は  $t$  に関して単調増加 (resp. 単調減少) なマルコフ連鎖となる。また上昇マルコフ連鎖 (resp. 下降マルコフ連鎖) とよぶ。  $P^{\uparrow}(\rho; \rho')$  (resp.  $P^{\downarrow}(\rho; \rho')$ ) を上昇推移確率行列 (resp. 下降推移確率行列) ということにする。

**命題 5.4.**  $\mu \in \mathbb{Y}$  に対して,

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} \mathbb{S}_{\rho_1; \rho_2}(\lambda) p_{\lambda, \mu}^{\uparrow}(\rho_2; \rho_3) = \mathbb{S}_{\rho_1, \rho_3; \rho_2}(\mu), \quad \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} \mathbb{S}_{\rho_1; \rho_2, \rho_3}(\lambda) p_{\lambda, \mu}^{\downarrow}(\rho_2; \rho_3) = \mathbb{S}_{\rho_1; \rho_2}(\mu)$$

が成り立つ。つまり,

$$\mathbb{S}_{\rho_1; \rho_2} P^{\uparrow}(\rho_2; \rho_3) = \mathbb{S}_{\rho_1, \rho_3; \rho_2}, \quad \mathbb{S}_{\rho_1; \rho_2, \rho_3} P^{\downarrow}(\rho_2; \rho_3) = \mathbb{S}_{\rho_1; \rho_2}.$$

初期分布を Schur 測度  $\mathbb{S}_{\rho_1; \rho_2}$  として適当な推移確率を作用させて 1 ステップ進んだ  $X^{\uparrow}(1)$  ( $X^{\downarrow}(1)$ ) の分布は (特殊化のパラメーターはかわるが) また Schur 測度になることを上の命題は示している。つまり, Schur 測度のクラスは適切な推移確率をとることにより保存される。

注意 5.5. 4.2 節で考えた上昇 Schur 過程は推移確率を用いると以下の (5.8) のように表現できることが簡単に確かめられる。

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N-1)}, \lambda^{(N)}) \\ &= \frac{1}{Z} s_{\lambda^{(1)}}(\rho_0^+) s_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}}(\rho_1^+) \cdots s_{\lambda^{(N)}/\lambda^{(N-1)}}(\rho_{N-1}^+) s_{\lambda^{(N)}}(\rho_N^-) \\ &= \mathbb{S}_{\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{N-1}^+, \rho_N^-}(\lambda^{(N)}) p_{\lambda^{(N)}, \lambda^{(N-1)}}^{\downarrow}(\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{N-2}^+, \rho_{N-1}^+) \cdots p_{\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}}^{\downarrow}(\rho_0^+, \rho_1^+) \end{aligned} \quad (5.8)$$

よって, 上昇 Schur 過程は  $\mathbb{S}_{\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{N-1}^+, \rho_N^-}(\lambda^{(N)})$  を初期分布とする下降する  $N$  ステップのマルコフ連鎖列  $(\lambda^{(N)}, \lambda^{(N-1)}, \dots, \lambda^{(1)})$  の同時分布をあらわしているとも見なせる。これは (5.4) において,  $S_1 = S_2 = \cdots = S_N = \mathbb{Y}$ ,

$$\mu_N(\lambda^{(N)}) = \mathbb{S}_{\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{N-1}^+, \rho_N^-}(\lambda^{(N)}), \quad (5.9)$$

$$\Lambda_{k-1}^k(\lambda^{(k)}, \lambda^{(k-1)}) = p_{\lambda^{(k)}, \lambda^{(k-1)}}^{\downarrow}(\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{k-2}^+, \rho_{k-1}^+) \quad (k = 2, 3, \dots, N) \quad (5.10)$$

とおいた場合の  $\mu^{(N)}$  に相当している。

## 5.4 $\mathbb{Y}_{asc}^N$ 上のマルコフ連鎖

前節の注意 5.5 を念頭におくと, 上昇 Schur 過程に付随する 5.1 節のマルコフ連鎖を構成するためには, (5.10) の  $\Lambda_{k-1}^k (= \tilde{\Lambda}_{k-1}^k)$  ( $k = 2, \dots, N$ ) と可換な自然な  $P_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) を構成すればよい。

$$P_k(\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}) = p_{\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}}^{\uparrow}(\rho_0^+, \dots, \rho_{k-1}^+; \rho') \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (5.11)$$

とおくと以下の可換図が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Y} & \xrightarrow{\Lambda_{n-1}^n} & \mathbb{Y} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathbb{Y} & \xrightarrow{\Lambda_{k-1}^k} & \mathbb{Y} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathbb{Y} & \xrightarrow{\Lambda_1^2} & \mathbb{Y} \\ \downarrow P_n \circ & \downarrow P_{n-1} & & & \downarrow P_k \circ & \downarrow P_{k-1} & & & \downarrow P_2 \circ & \downarrow P_1 \\ \mathbb{Y} & \xrightarrow{\Lambda_{n-1}^n} & \mathbb{Y} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathbb{Y} & \xrightarrow{\Lambda_{k-1}^k} & \mathbb{Y} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathbb{Y} & \xrightarrow{\Lambda_1^2} & \mathbb{Y} \end{array}$$

つまり,  $\Lambda_{k-1}^k P_k = P_{k-1} \Lambda_{k-1}^k$ 。これは以下の命題よりわかる。

**命題 5.6.**  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  は任意の Schur 正な特殊化とする。このとき, 以下の確率行列の交換関係が成り立つ。  $P^{\uparrow}(\rho_1, \rho_2; \rho_3) P^{\downarrow}(\rho_1; \rho_2) = P^{\downarrow}(\rho_1; \rho_2) P^{\uparrow}(\rho_1; \rho_3)$ 。

証明. (5.7) より簡単に示せる.  $\square$

**定義 5.7.** 5.1 節において  $S_i = \tilde{S}_i = Y$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),  $\Lambda_{k-1}^k = \tilde{\Lambda}_{k-1}^k$  ( $k = 2, 3, \dots, N$ ) として,  $\mu_N, \Lambda_{k-1}^k, P_k$  をそれぞれ (5.9), (5.10), (5.11) によって定めて得られる  $P^{(N)}$  を推移確率とする  $Y^N$  上のマルコフ連鎖を上昇 Schur 過程に付随するマルコフ連鎖という. 実際は  $Y_{asc}^N$  上のマルコフ連鎖が定義されている.

**例 5.8.** 簡単のために  $N = 2$  の場合に, 定義 5.7 より得られる  $Y_{asc}^2$  上のマルコフ連鎖を考えてみよう.  $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \in Y_{asc}^2$  から  $(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}) \in Y_{asc}^2$  への推移確率を定義する. ただし,  $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \in Y_{asc}^2$  は  $p_{\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+) > 0$  となるものを考える. (5.3) より

$$P^{(2)}((\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}), (\mu^{(1)}, \mu^{(2)})) = p_{\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+) \frac{p_{\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}}^\dagger(\rho_0^+, \rho_1^+; \rho') p_{\mu^{(2)}, \mu^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+)}{\sum_{\mu \in Y} p_{\lambda^{(2)}, \mu}^\dagger(\rho_0^+, \rho_1^+; \rho') p_{\mu, \mu^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+)} \quad (5.12)$$

5.1 節の説明の繰り返しになるが, 上の  $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$  から  $(\mu^{(1)}, \mu^{(2)})$  への推移の仕方を見てみよう. 仮定より  $\lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)}$  であるが,

- (1) 右辺第一項によりまず  $\lambda^{(1)}$  から  $\mu^{(1)}$  へ確率  $p_{\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+)$  で推移させて次のステップの  $\mu^{(1)}$  を定める.
- (2)  $\lambda^{(2)}$  と  $\mu^{(1)}$  の条件のもとで,  $\lambda^{(2)}$  を上昇推移確率  $p_{\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}}^\dagger(\rho_0^+, \rho_1^+; \rho')$  によって  $\mu^{(2)} (\supset \lambda^{(2)})$  に推移させて,  $\mu^{(2)} \supset \mu^{(1)}$  の条件を保つように下降推移確率  $p_{\mu^{(2)}, \mu^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+)$  をかけている. 分母は確率にするための正規化定数である.

こうして,  $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \in Y_{asc}^2$  から  $(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}) \in Y_{asc}^2$  への推移が定義された. このとき, (5.5) により,

$$\mathbb{S}_{\rho_0^+, \rho_1^+; \rho_2^-}(\lambda^{(2)}) p_{\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+) \stackrel{P^{(2)}}{\Longrightarrow} \mathbb{S}_{\rho_0^+, \rho_1^+; \rho_2^-, \rho'}(\lambda^{(2)}) p_{\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+)$$

と推移することがわかる. 変化するのは Schur 測度の後半のパラメーターのみであることに注意.

一般の  $N$  に対しても同様に (5.5) より

$$\begin{aligned} & \mu^{(N)}(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)}) \\ &= \mathbb{S}_{\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{N-1}^+; \rho_N^-}(\lambda^{(N)}) p_{\lambda^{(N)}, \lambda^{(N-1)}}^\dagger(\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{N-2}^+; \rho_{N-1}^+) \cdots p_{\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+) \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} & (\mu^{(N)} P^{(N)})(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)}) \\ &= \mathbb{S}_{\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{N-1}^+; \rho_N^-, \rho'}(\lambda^{(N)}) p_{\lambda^{(N)}, \lambda^{(N-1)}}^\dagger(\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{N-2}^+; \rho_{N-1}^+) \cdots p_{\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+) \end{aligned}$$

となることがわかる.  $\Lambda_{k-1}^k = \tilde{\Lambda}_{k-1}^k$  であることから

$$p_{\lambda^{(N)}, \lambda^{(N-1)}}^\dagger(\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{N-2}^+; \rho_{N-1}^+) \cdots p_{\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}}^\dagger(\rho_0^+; \rho_1^+)$$

の部分は共通で,  $P^{(N)}$  による 1 ステップの推移によって, 初期分布に相当する Schur 測度の後半のパラメーターが  $\rho_N^-$  から  $(\rho_N^-, \rho')$  へと変化するのみである.

## 5.5 Gelfand-Tsetlin pattern $\text{GT}_N$ 上のマルコフ連鎖

定義 5.7 で用いた  $P_k, \Lambda_{k-1}^k$  にあられる Schur 正な特殊化が

$$\rho_0^+ = \rho_1^+ = \cdots = \rho_{N-1}^+ = \rho = \rho^{(1)}, \quad \rho_N^- = 0, \quad \rho' = \rho^{(b)}$$

の場合を考える。  $\rho^{(1)}, \rho^{(b)}$  はそれぞれ例 3.6 の (i) と (ii) にあられるものである。このとき、上の特殊化のもと定義される推移確率  $P^{(N)}$  は注意 4.3 などから  $\mathbb{Y}_{asc, \prec}^N$  上のマルコフ連鎖を定義する。

特殊化  $\underbrace{(\rho, \rho, \dots, \rho)}_{k\text{-fold}}$  を簡単のために  $k\rho$  とあらずと、

$$\{\mu^{(N)}(P^{(N)})^t\}(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)}) = \mathbb{S}_{N\rho; t\rho}(\lambda^{(N)}) p_{\lambda^{(N)}, \lambda^{(N-1)}}^\downarrow((N-1)\rho; \rho) \cdots p_{\lambda^{(2)}, \lambda^{(1)}}^\downarrow(\rho; \rho) \quad (5.13)$$

となる。  $t=0$  のときは、  $\mathbb{S}_{N\rho; 0}(\lambda^{(N)}) = \delta_\emptyset(\lambda^{(N)})$  であるから  $\mu^{(N)} = \delta_{(\emptyset, \dots, \emptyset)}$ 。つまり、(5.13) は  $(\emptyset, \dots, \emptyset)$  からスタートしたマルコフ連鎖の  $t$ -ステップ後の分布をあらず Schur 過程になることを示している。

(5.3) にあられる

$$\frac{P_k(x_k, \tilde{x}_k) \tilde{\Lambda}_{k-1}^k(\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k-1})}{\Delta_{k-1}^k(x_k, \tilde{x}_{k-1})}$$

の分子に相当する部分は今の設定では

$$\begin{aligned} & p_{\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}}^\uparrow(\rho_0^+, \dots, \rho_{k-1}^+; \rho') p_{\mu^{(k)}, \mu^{(k-1)}}^\downarrow(\rho_0^+, \rho_1^+, \dots, \rho_{k-2}^+; \rho_{k-1}^+) \\ & = p_{\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}}^\uparrow(k\rho^{(1)}; \rho^{(b)}) p_{\mu^{(k)}, \mu^{(k-1)}}^\downarrow((k-1)\rho^{(1)}; \rho^{(1)}). \end{aligned}$$

$p_{\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}}^\uparrow(k\rho^{(1)}; \rho^{(b)}) > 0$  となるのは  $\lambda^{(k)} \subset \mu^{(k)}$  の差が vertical strip の場合であり、  $p_{\mu^{(k)}, \mu^{(k-1)}}^\downarrow((k-1)\rho^{(1)}; \rho^{(1)}) > 0$  となるのは  $\mu^{(k)} \supset \mu^{(k-1)}$  の差が horizontal strip となる場合である。

注意 4.3 により、  $(\lambda^{(1)}(t), \lambda^{(2)}(t), \dots, \lambda^{(N)}(t)) \in \mathbb{Y}_{asc, \prec}^N$  の各  $\lambda^{(k)}(t)$  は高々  $k$  個の非零の行をもち、すべて次の interlacing 性をもつ：

$$\lambda_1^{(k)} \geq \lambda_1^{(k-1)} \geq \lambda_2^{(k)} \geq \cdots \geq \lambda_{k-1}^{(k-1)} \geq \lambda_k^{(k)} \quad (k = 2, 3, \dots, N)$$

特に  $k=1$  のときは  $\lambda^{(1)}$  は定数と見做せて、

$$p_{\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}}^\uparrow(\rho^{(1)}; \rho^{(b)}) = \begin{cases} \frac{b}{1+b} & \text{if } \mu^{(1)} = \lambda^{(1)} + 1, \\ \frac{1}{1+b} & \text{if } \mu^{(1)} = \lambda^{(1)}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

こうやって定まるマルコフ連鎖を写像 (4.8) によって Gelfand-Tsetlin pattern  $\text{GT}_N$  上のマルコフ連鎖に写すと、初期条件  $\lambda^{(1)} = \cdots = \lambda^{(N)} = \emptyset$  に対応する初期条件は

$$x^{(j)}(0) = (-j+1, -j+2, \dots, -1, 0) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

であり (図 6 の  $t=0$  に対応)、以下のような時間発展をする： $j=1, 2, \dots, N$  の順に各点  $x_i^{(j)}(t)$  ( $i=1, 2, \dots, j$ ) は独立に確率  $b/(1+b)$  で  $x_i^{(j)}(t+1) = x_i^{(j)}(t) + 1$  と右側にジャンプ；確率  $1/(1+b)$  で  $x_i^{(j)}(t+1) = x_i^{(j)}(t)$  でその場に留まろうとするが、条件

$$x_{i-1}^{(j)}(t+1) < x_{i-1}^{(j-1)}(t+1) \leq x_i^{(j)}(t+1) \quad (5.14)$$

をみたすように動きを修正する。つまり、

- $x_i^{(j)}(t) = x_{i-1}^{(j-1)}(t+1) - 1$  となるときは,  $x_i^{(j)}(t+1) = x_i^{(j)}(t) + 1 (= x_{i-1}^{(j-1)}(t+1))$  とする.
- $x_{i-1}^{(j)}(t) = x_{i-1}^{(j-1)}(t+1) - 1$  となるときは,  $x_{i-1}^{(j)}(t+1) = x_{i-1}^{(j)}(t)$  とする.
- それ以外のときは, 右に1ジャンプしてもその場に留まっても条件 (5.14) はみたされる. このとき, 独立に確率  $b/(1+b)$  で  $x_i^{(j)}(t+1) = x_i^{(j)}(t) + 1$ ; 確率  $1/(1+b)$  で  $x_i^{(j)}(t+1) = x_i^{(j)}(t)$  とする.

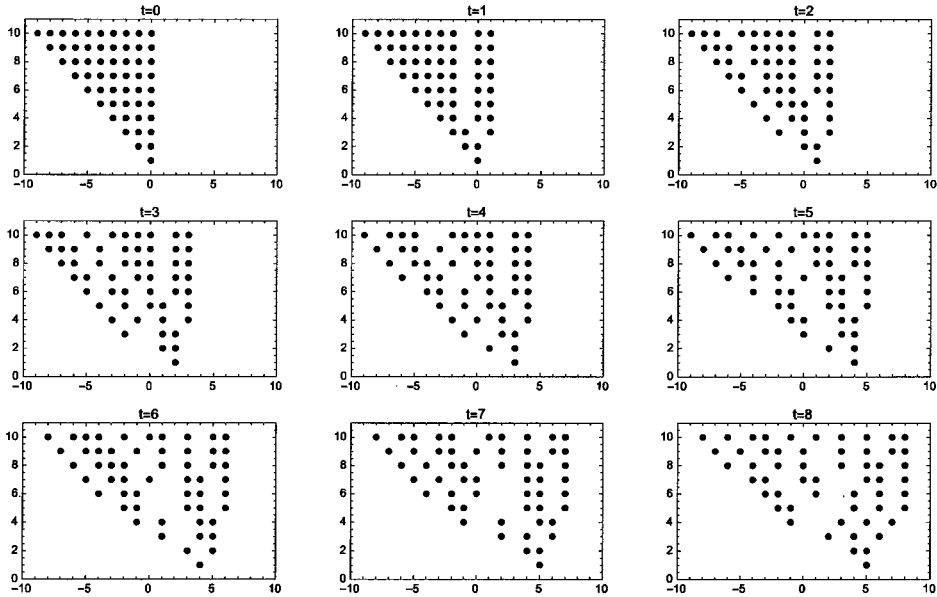


図 6:  $\text{GT}_{10}$  上のマルコフ連鎖  $t=0$  から  $t=8$  まで

図 6 は  $\text{GT}_{10}$  上のマルコフ連鎖を  $b=1$  のとき,  $\{(x_i^{(j)}(t), j), i=1, 2, \dots, j\}, j=1, 2, \dots, 10$  として  $t=0$  から  $t=8$  まで描いたものである. このマルコフ連鎖の射影を見ると以下のように種々の確率過程が見てとれる.

- 構成より一番下の  $x_1^{(1)}(t)$  は毎ステップで独立に右に確率  $b/(1+b) (= 1/2)$  でジャンプするマルコフ連鎖 (片側ランダムウォーク) である.
- 一番左端の  $\{x_1^{(j)}(t), j=1, 2, \dots, N\}$  に着目したものは, TASEP (totally asymmetric simple exclusion process) とよばれる. 常に  $x_1^{(N)}(t) < x_1^{(N-1)}(t) < \dots < x_1^{(2)}(t) < x_1^{(1)}(t)$  をみたしている.
- 一番上端  $\{x_i^{(N)}(t), i=1, 2, \dots, N\}$  に着目したものは, 離散時間の Charlier 過程とよばれ, 独立に  $N$  個の片側ランダムウォークを走らせて, お互いに衝突しないと条件付けをして得られる確率過程となる.
- 一番右端  $\{x_i^{(i)}(t), i=1, 2, \dots, N\}$  に着目したものは,  $x_1^{(1)}(t) \leq x_2^{(2)}(t) \leq \dots \leq x_{N-1}^{(N-1)}(t) \leq x_N^{(N)}(t)$  をみたし, 一番下の  $x_1^{(1)}(t)$  が右に動くと全体右方向に押す力が働くので PushTASEP とよばれる.



注意 5.9.  $N$  個の 1 次元ブラウン運動が互いに衝突しないという条件付けをして得られるものは Dyson ブラウン運動といい、エルミート行列値ブラウン運動 (GUE ブラウン運動) の実固有値から得られる確率過程と同分布であることが知られている。

このようにして一見関係のないランダム行列理論や TASEP が, Schur 過程に付随するマルコフ連鎖を Gelfand-Tsetlin pattern のマルコフ連鎖と解釈したときの射影として見えることがわかった。

## 6 最後に

はじめにも述べたように integrable probability では, Schur 過程は Macdonald 過程へと拡張されて研究が進んでおり, 最近では stochastic six-vertex model なるものまで研究されるようになって [3]. これらの確率モデルの研究では, 内在する表現論的な構造を用いて種々の特性量を具体的に表示し, その表示を解析することにより種々の極限定理の証明を行うという方向性が一般的である. このように具体的な計算ができかつそれ自身面白いモデルの深い理解を進めることも重要であるが, 一方確率論の中心極限定理に代表される普遍性の理解を進めることも重要である. この方向で現在もっともホットな話題は KPZ(Kardar-Parisi-Zhang) 普遍性とよばれる Gauss 普遍性とは異なる新しい普遍性である [5, 6, 9]. 現在の所, KPZ 普遍性の証明は, Schur 過程やそれに類似の構造を用いた具体的な表示を利用しているものがほとんどである. 古典的には二項分布のような具体的な分布を用いて証明された中心極限定理が, 現在ではかなり一般の極限定理として理解できているように, 今後 KPZ 普遍性も広い枠組みで記述され理解されるようになることが期待される.

## 参考文献

- [1] A. Borodin, Schur dynamics of the Schur processes, *Adv. Math.* **228** (2011), 2268–2291.
- [2] A. Borodin and I. Corwin, Macdonald processes, *Probab. Theory Relat. Fields* **158** (2014), 225–400.
- [3] A. Borodin, I. Corwin and V. Gorin, Stochastic six-vertex model, available at <http://arxiv.org/abs/1407.6729>
- [4] A. Borodin and V. Gorin, Lectures on integral probability, available at <http://arxiv.org/abs/1212.3351>
- [5] I. Corwin, The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class, *Rand. Mat.: Theo. Appl.* **1:1130001**(2012).
- [6] I. Corwin, Kardar-Parisi-Zhang universality class, *Notice of the AMS*, March 2016, 230–239.
- [7] A. Edrei, On the generating function of a doublyinfinite, totally positive sequence, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), no. 3, 367–383.
- [8] A. Edrei, Proof of a conjecture of Schoenberg on the generating function of a doublyinfinite, totally positive sequence, *Canadian J. Math.* **5** (1953), 86–94.

- [9] K. Kardar, G. Parisi and Y. Z. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986), 889–892.
- [10] S. Karlin, Total positivity. Vol. I. Stanford University Press, Stanford, Calif 1968 xii+576 pp.
- [11] S. V. Kerov, Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis, *Translations of Mathematical Monographs*, **219**. American Mathematical Society, 2003.
- [12] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition, Oxford University Press, 1995.
- [13] P. A. MacMahon, Combinatory Analysis. Cambridge University Press, 1915-1916. reprinted by Chelsea Publishing Company, New York, 1960.
- [14] A. Okounkov, Infinite wedge and random partitions, *Selecta Math.* **7** (2001), 57–81.
- [15] A. Okounkov, Symmetric functions and random partitions, available at <http://arxiv.org/abs/math/0309074v1>
- [16] A. Okounkov and N. Reshetikhin, Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), 581–603.
- [17] D. Romik, *The Surprising Mathematics of Longest Increasing Subsequences*, Cambridge University Press, 2015.
- [18] B. E. Sagan, *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*. Second edition. *Graduate Texts in Mathematics* **203**, Springer-Verlag, 2001.
- [19] I. J. Schoenberg, Some analytical aspects of the problem of smoothing, in: *Courant Anniversary Volume “Studies and Essays”*, New York, 1948, pp. 351-370.
- [20] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants (I): fermion, Poisson and boson point processes, *J. Funct. Anal.* **205** (2003), 414–463.
- [21] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants (II): fermion shifts and their ergodic properties (with Y. Takahashi), *Annals of Prob.* **31** (2003), 1533–1564.
- [22] A. Soshnikov, Determinantal random point fields, *Russian Math. Surveys*, **55** (2000), 923–975.
- [23] E. Thoma, Die unzerlegbaren, positive-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, *Math. Zeitschr.* **85** (1964), 40–61.
- [24] 数学セミナー 2016年3月号「シューア関数」特集号, 日本評論社.