

# ラテン方陣に関する Alon-Tarsi 予想と 対称群上の帯球関数について

(The Alon-Tarsi conjecture on Latin squares  
and zonal spherical functions on symmetric groups)

琉球大学・理学部・数理科学科 木本 一史 (Kazufumi KIMOTO)\*  
Department of Mathematical Sciences, University of the Ryukyus

## Abstract

$n \times n$  行列であって、各行と各列が  $1, 2, \dots, n$  の順列をなすようなものを  $n$  次のラテン方陣と呼ぶ。ラテン方陣には符号という量が定義され、その値によって偶方陣・奇方陣という概念が定義される。Alon-Tarsi 予想とは「 $n$  が偶数の時、 $n$  次のラテン方陣において偶方陣と奇方陣の個数は異なる」という予想で、様々な他の予想と関係を持っている。本稿では、 $n$  次のラテン方陣に関する Alon-Tarsi 予想が、正方形ダイアグラムに対するヤング型部分群に関する  $n^2$  次対称群上の帯球関数に関する命題と同値となることを示す。

## 1 序

$n$  次のラテン方陣とは、各行各列が  $1, 2, \dots, n$  の順列であるような  $n$  次正方形行列のことであり、その数学的な研究についてはオイラー [5] に遡る。後述するように、各ラテン方陣に対して  $+1$  または  $-1$  の値をとる「符号」が定義され、その値に応じて「偶方陣」「奇方陣」といった概念が導入される。 $n$  が奇数の場合、 $n$  次の偶方陣と奇方陣の個数は等しいことが簡単に分かるが、 $n$  が偶数の場合には一般に「偶方陣と奇方陣の個数は相異なるであろう」と予想されており、この予想を Alon-Tarsi 予想と呼ぶ。これはグラフ理論における彩色の問題から生じた予想であったが、その後、色々な命題との関係が明らかにされてきた。本稿ではそのような例の 1 つとして、対称群上のヤング型部分群に関する帯球関数の値についての命題と Alon-Tarsi 予想との同値性を示し、そのことの応用として特別な場合 ( $p$  を奇素数として  $p-1$  次のラテン方陣の場合) に対する Alon-Tarsi 予想の証明を与える。これは Glynn [7] による結果の簡単な別証明である。

---

\* kimoto@math.u-ryukyu.ac.jp

この同値性の証明を仲介するのが、アルファ行列式と呼ばれる行列式の1パラメタ変形を経由して定義される、長方形行列のリース行列式という多項式関数である。特別なヤング型部分群に対する帯球関数の値をリース行列式やアルファ行列式を用いて表示する公式(定理5.1)が、目標とする「帯球関数の値についての命題と Alon-Tarsi 予想との同値性」の証明の鍵となる。

なお、本稿の内容は、先行する RIMS 研究集会において同じテーマで行った講演の報告 [11] と重複する部分が少ないからであるが、出来るだけ新しい話題を盛り込むよう努めたつもりである。本稿と [11] とを相補的なものとして捉えていただければ幸いである。

## 記号について

$n$  次対称群を  $\mathfrak{S}_n$  で表し、その単位元を  $e$  で表す。置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  の符号を  $\text{sgn } \sigma$  で、 $\sigma$  に対する置換行列を  $P(\sigma) = (\delta_{i\sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$  で表す。

$R$  成分の  $m \times n$  行列全体を  $\text{Mat}_{m,n}(R)$  ( $m = n$  のときは単に  $\text{Mat}_n(R)$ ) で表す。 $R = \mathbb{C}$  のときは単に  $\text{Mat}_{m,n}$ ,  $\text{Mat}_n$  などと書く。 $I_n$  で  $n$  次の単位行列を表す。全ての成分が1である行列を、型を添え字に書いて  $\mathbf{1}_{m,n}$ ,  $\mathbf{1}_n$  などと表す。 $(i, i)$  成分が  $a_i$  の対角行列を  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  で表す。

$\lambda$  が  $N$  の分割であることを  $\lambda \vdash N$  と表す。 $\lambda$  の長さ(非ゼロ和因子の個数)を  $l(\lambda)$  で表す。ヤング図形が長方形であるような分割  $\overbrace{(k, \dots, k)}^n \vdash kn$  を簡単に  $(k^n)$  で表す。分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  や非負整数を成分に持つ行列  $M = (m_{ij})$  に対して

$$\lambda! := \prod_i \lambda_i!, \quad M! := \prod_{i,j} m_{ij}!$$

とする。

有限集合  $A$  の元の個数を  $|A|$  で表す。

## 2 ラテン方陣と Alon-Tarsi 予想

$n$  次のラテン方陣 (Latin square) とは、各行各列が  $1, 2, \dots, n$  の順列であるような  $n$  次正方向列のことである(ちなみに「ラテン方陣」という名称は、オイラー [5] がアルファベット(ラテン文字)を用いてラテン方陣を表記していることが由来となっているようだ)。 $n$  次のラテン方陣の全体を  $\text{LS}(n)$  で表すことにする。

### 例 2.1.

$$\text{LS}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{LS}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

**注意 2.2.**  $n$  次ラテン方阵の総数  $\text{ls}(n) := |\text{LS}(n)|$  の具体的な値は  $n \leq 11$  までしか知られていない [20] :

$$\begin{aligned} \text{ls}(1) &= 1, \\ \text{ls}(2) &= 2, \\ \text{ls}(3) &= 12, \\ \text{ls}(4) &= 576, \\ \text{ls}(5) &= 161280, \\ \text{ls}(6) &= 812851200, \\ \text{ls}(7) &= 61479419904000, \\ \text{ls}(8) &= 108776032459082956800, \\ \text{ls}(9) &= 5524751496156892842531225600, \\ \text{ls}(10) &= 399297506328521594869002590276812800, \\ \text{ls}(11) &= 776966836171770144107444346734230682311065600000. \end{aligned}$$

漸近的には  $\text{ls}(n)^{1/n^2} \sim e^{-2n}$  である [15].

$L \in \text{LS}(n)$  に対し  $2n$  個の置換  $r_1, \dots, r_n, c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{S}_n$  が存在して

$$L = \begin{pmatrix} r_1(1) & \dots & r_1(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n(1) & \dots & r_n(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(1) & \dots & c_n(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1(n) & \dots & c_n(n) \end{pmatrix} \quad (1)$$

である。このとき、

$$\text{sgn } L := \prod_{i=1}^n \text{sgn } r_i \prod_{i=1}^n \text{sgn } c_i.$$

で  $L$  の符号を定める。  $L$  の符号の値が  $+1$  か  $-1$  かに応じて  $L$  を偶方阵または奇方阵と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \text{els}(n) &= |\{L \in \text{LS}(n) \mid \text{sgn } L = +1\}|, \\ \text{ols}(n) &= |\{L \in \text{LS}(n) \mid \text{sgn } L = -1\}| \end{aligned}$$

とおく.  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  を1つ固定して  $LS(n) \ni L \mapsto P(\sigma)L \in LS(n)$  なる写像を考えるとこれは全単射であって

$$\operatorname{sgn}(P(\sigma)L) = (\operatorname{sgn} \sigma)^n \operatorname{sgn} L$$

である. 特に  $n$  が奇数のとき,  $\sigma$  として互換を選べば  $\operatorname{sgn}(P(\sigma)L) = -\operatorname{sgn} L$  なので,  $L \mapsto P(\sigma)L$  は  $n$  次の偶方陣全体と奇方陣全体の間での全単射を与える, つまり  $\operatorname{els}(n) = \operatorname{ols}(n)$  が分かる.  $n$  が偶数の場合には次が予想されている.

**Alon-Tarsi 予想.**  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$2 \mid n \implies \operatorname{els}(n) \neq \operatorname{ols}(n)$$

が成り立つ.

**注意 2.3.** 数値的には,  $n = 2, 4, 6, 8$  に対しては  $\operatorname{els}(n) > \operatorname{ols}(n)$  が成り立っている [21].

元々はグラフの彩色問題に関連して生じた予想である. 具体的には,  $n$  次のラテン方陣に対する Alon-Tarsi 予想が正しいとすると, 次の命題が従う [1].

**定理 2.4 (Dinitz 予想).** 完全二部グラフ  $K_{n,n}$  のライングラフ  $L(K_{n,n})$  は  $n$ -choosable である.

**注意 2.5.** グラフ  $G = (V, E)$  に対し,  $E$  を頂点集合とし,  $e, e' \in E$  が  $G$  において端点を共有するときに  $e$  と  $e'$  は隣接するとして定義されるグラフ  $L(G)$  を  $G$  のライングラフと呼ぶ. またグラフ  $G = (V, E)$  において, 各頂点に「 $n$  色からなるパレット」を任意に割り当てるとき, それぞれの「パレット」から適当に色を選ぶことで必ず  $G$  の彩色が得られるとき,  $G$  は  $n$ -choosable であるという.  $n$ -choosable ならば  $n$ -彩色可能であるが, 逆は正しくない [4].

なお, Dinitz 予想じたいは一般の場合に Galvin [6] によって (Alon-Tarsi 予想とは独立に) 解決された.

**注意 2.6.** (1) のラテン方陣  $L$  に対して

$$\operatorname{rowsgn} L := \prod_{i=1}^n \operatorname{sgn} r_i, \quad \operatorname{colsgn} L := \prod_{i=1}^n \operatorname{sgn} c_i$$

と定める (と  $\operatorname{sgn} L = \operatorname{rowsgn} L \operatorname{colsgn} L$  である).

$$\begin{aligned} \operatorname{rels}(n) &:= |\{L \in LS(n) \mid \operatorname{rowsgn} L = +1\}|, \\ \operatorname{rols}(n) &:= |\{L \in LS(n) \mid \operatorname{rowsgn} L = -1\}|, \\ \operatorname{cels}(n) &:= |\{L \in LS(n) \mid \operatorname{colsgn} L = +1\}|, \end{aligned}$$

$$\text{cols}(n) := |\{L \in \text{LS}(n) \mid \text{colsgn } L = -1\}|$$

と定義すると, Alon-Tarsi 予想は

$$2 \mid n \implies \text{rels}(n) \neq \text{rols}(n),$$

$$2 \mid n \implies \text{cels}(n) \neq \text{cols}(n)$$

などとも同値である [8] (こちらは Huang-White 予想と呼ばれることがある).

$L \in \text{LS}(n)$  に対し

$$L = \sum_{i=1}^n i P(\sigma_i)$$

となる  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \mathfrak{S}_n$  がある, つまり  $L$  は  $n$  個の置換行列の一次結合として表される. このとき  $L$  がラテン方阵であるという条件は  $P(\sigma_1) + P(\sigma_2) + \dots + P(\sigma_n) = \mathbf{1}_n$  となることであることを注意しておく. さてこのとき

$$\text{symsgn } L := \prod_{i=1}^n \text{sgn } \sigma_i$$

と定めると

$$\text{symsgn } L = (-1)^{n(n-1)/2} \text{sgn } L$$

が成り立つ [9].

$$\text{sels}(n) = |\{L \in \text{LS}(n) \mid \text{symsgn } L = +1\}|,$$

$$\text{sols}(n) = |\{L \in \text{LS}(n) \mid \text{symsgn } L = -1\}|$$

とおくと, Alon-Tarsi 予想は

$$2 \mid n \implies \text{sels}(n) \neq \text{sols}(n)$$

と同値となる.

**例 2.7.**

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (r_i(j))_{1 \leq i, j \leq 3} = (c_j(i))_{1 \leq i, j \leq 3} = \sum_{i=1}^3 i P(\sigma_i)$$

とすると

$$r_1 = (12), \quad r_2 = (13), \quad r_3 = (23),$$

$$c_1 = (123), \quad c_2 = e, \quad c_3 = (132),$$

$$\sigma_1 = (132), \quad \sigma_2 = e, \quad \sigma_3 = (123)$$

なので

$$\text{rowsgn } L = -1, \quad \text{colsgn } L = +1 \quad (\implies \text{sgn } L = -1), \quad \text{symsgn } L = +1$$

となる.

$p$  を奇素数として,  $n = p + 1$  のとき (Drisko [3]) と  $n = p - 1$  のとき (Glynn [7]) には,  $n$  次のラテン方阵に対する Alon-Tarsi 予想が正しいことが示されている.  $n = p - 1$  の場合の簡単な別証明を本稿の最後に与える.

Alon-Tarsi 予想と同値な命題, Alon-Tarsi 予想から従う命題は, 上述の Dinitz 予想以外にも色々ある. 二つほど例を挙げる.

**予想 2.8 (Rota 予想).**  $F$  を標数 0 の体とし,  $V$  を  $F$  上の  $n$  次元ベクトル空間とする.  $B_1, B_2, \dots, B_n$  を  $V$  の  $n$  組の基底とする. このとき, それぞれの基底のベクトルに適当に

$$B_i = \{b_1^i, b_2^i, \dots, b_n^i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

と名前を付けて,

$$B^j = \{b_j^1, b_j^2, \dots, b_j^n\} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

たちも全て  $V$  の基底となるように出来る.

**予想 2.9 (Kumar-Landsberg [14]).**  $dg$  を  $SU(n)$  上のハール測度とすると,  $g_{ij}$  を標準的な  $SU(n)$  の座標関数として

$$\int_{SU(n)} \prod_{i,j=1}^n g_{ij} dg \neq 0$$

が成り立つ.

Alon-Tarsi 予想を仮定すると Rota 予想が従う. また予想 2.9 は Alon-Tarsi 予想と同値である ([14] にはこれ以外にもいくつか同値命題が与えられている).

### 3 帯球関数

#### 3.1 ヤング型部分群と両側剰余類

$N$  の分割  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)$  に対し,

$$\Omega_i^\mu := \left\{ \sum_{r < i} \mu_r + s \mid 1 \leq s \leq \mu_i \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

とおく.  $\Omega_1^\mu \sqcup \Omega_2^\mu \sqcup \cdots \sqcup \Omega_l^\mu = \{1, 2, \dots, N\}$  である.

$$\mathfrak{S}_\mu := \{\sigma \in \mathfrak{S}_N \mid \sigma\Omega_i^\mu = \Omega_i^\mu, i = 1, 2, \dots, l\}$$

と定める (ヤング型の部分群とよばれる).  $\mathfrak{S}_\mu \cong \mathfrak{S}_{\mu_1} \times \mathfrak{S}_{\mu_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_l}$ ,  $|\mathfrak{S}_\mu| = \mu!$  である.  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  に対して

$$M^\mu(\sigma) = (m_{ij}^\mu(\sigma))_{1 \leq i, j \leq l(\mu)}, \quad m_{ij}^\mu(\sigma) = |\sigma\Omega_i^\mu \cap \Omega_j^\mu|$$

と定める. 簡単に分かるように,

$$\mathfrak{S}_\mu \sigma \mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_\mu \sigma' \mathfrak{S}_\mu \iff M^\mu(\sigma) = M^\mu(\sigma')$$

$$|\mathfrak{S}_\mu \sigma \mathfrak{S}_\mu| = \frac{|\mathfrak{S}_\mu|^2}{M^\mu(\sigma)!}$$

などが成り立つ. また

$$\mathcal{M}_\mu = \left\{ M = (m_{ij}) \in \text{Mat}_{l(\mu)}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \mid \sum_{s=1}^n m_{is} = \sum_{s=1}^n m_{si} = \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, l(\mu)) \right\}$$

とすれば  $\mathfrak{S}_\mu \backslash \mathfrak{S}_N / \mathfrak{S}_\mu \ni \mathfrak{S}_\mu \sigma \mathfrak{S}_\mu \mapsto M^\mu(\sigma) \in \mathcal{M}_\mu$  は全単射である.

### 3.2 帯球関数

$\lambda \vdash N$  に対し,  $\lambda$  に対応する  $\mathfrak{S}_N$  の既約指標を  $\chi^\lambda$  で表す.

$$\omega_\mu^\lambda(x) := \frac{1}{|\mathfrak{S}_\mu|} \sum_{k \in \mathfrak{S}_\mu} \chi^\lambda(xk) \quad (x \in \mathfrak{S}_N)$$

と定める. これは  $\mathfrak{S}_\mu$ -両側不変な関数となる. 特に  $\lambda = \mu$  の場合は簡単のため  $\omega^\lambda = \omega_\lambda^\lambda$  とおく. 対  $(\mathfrak{S}_N, \mathfrak{S}_\mu)$  が Gelfand 対のときには, これは通常の [16] の意味での帯球関数となるので, ここでは緩やかに  $\omega_\mu^\lambda$  のことを帯球関数と呼ぶことにする. 基本的な性質を箇条書きしてみると以下の通り.

- $\chi^\lambda(x) \in \mathbb{Z}$  なので  $\omega_\mu^\lambda(x) \in \mathbb{Q}$  である.
- 単位元における値  $\omega_\mu^\lambda(e)$  は Kostka 数  $K_{\lambda\mu}$  に等しい. 特に  $\omega^\lambda(e) = 1$  である.
- 分割の自然な順序

$$\lambda \geq \mu \stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i \quad (\forall i \geq 1)$$

に関して  $\lambda \geq \mu$  でなければ  $\omega_\mu^\lambda$  は恒等的にゼロである.

- $\omega^\lambda$  は関係式

$$\omega^\lambda(x)\omega^\lambda(y) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_\lambda|} \sum_{k \in \mathfrak{S}_\lambda} \omega^\lambda(xky) \quad (x, y \in \mathfrak{S}_N)$$

を満たす。

**例 3.1.**  $\omega^{(2^2)}$  の値は

$$\omega^{(2^2)}(x) = \frac{1}{4} \left( \chi^{(2^2)}(x) + \chi^{(2^2)}(x(12)) + \chi^{(2^2)}(x(34)) + \chi^{(2^2)}(x(12)(34)) \right)$$

である。具体的に  $\mathfrak{S}_{(2^2)} \setminus \mathfrak{S}_4 / \mathfrak{S}_{(2^2)}$  の適当な完全代表系に対して計算すると

$$\omega^{(2^2)}(e) = 1, \quad \omega^{(2^2)}((13)) = -\frac{1}{2}, \quad \omega^{(2^2)}((13)(24)) = 1$$

となる。一般に  $n = 2m$ ,  $\mu = (m^2)$  のとき (このとき  $(\mathfrak{S}_{2m}, \mathfrak{S}_{(m^2)})$  は Gelfand 対である) の  $\omega_\mu^\lambda$  の値は超幾何関数を用いて表される [2]:  $0 \leq k \leq m$  のとき

$$\omega_{(m^2)}^{(2m-k, k)}(g_s) = {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -k, k-2m-1, -s \\ -m, -m \end{matrix}; 1 \right),$$

特に  $k = m$  のとき

$$\omega^{(m^2)}(g_s) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -m-1, -s \\ -m \end{matrix}; 1 \right) = (-1)^s \binom{m}{s}^{-1}$$

が成り立つ。ただし  $g_s = (1 \ m+1)(2 \ m+2) \dots (s \ m+s) \in \mathfrak{S}_{2m}$  ( $s = 0, 1, \dots, m$ ) である。

## 4 アルファ行列式とリース行列式

### 4.1 アルファ行列式

$\mathfrak{S}_N$  上の関数  $\nu$  を

$$\nu(\sigma) := N - (\sigma \text{ のサイクル分解におけるサイクルの個数}) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

で定義する。  $\sigma$  のサイクルタイプが  $\mu \vdash N$  ならば

$$\nu(\sigma) = N - l(\mu) = \sum_{i \geq 2} (i-1)\mu_i$$

である。  $\nu(\sigma)$  は、  $\sigma$  をいくつかの互換の積として表す時、必要となる互換の個数の最小値とも等しい。従って  $\nu$  は  $\mathfrak{S}_N$  上の類関数であり、しかも自然な埋め込み  $\iota: \mathfrak{S}_N \rightarrow \mathfrak{S}_M$



$(M > N)$  に対して  $\nu(\sigma) = \nu(\iota(\sigma))$  ( $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ ) が成り立つ。また  $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N$  が disjoint ならば  $\nu(\sigma\tau) = \nu(\sigma) + \nu(\tau)$  である。

$A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_N$  に対して

$$\det_{\alpha} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \alpha^{\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^N a_{\sigma(i)i}$$

と定め、これを  $A$  のアルファ行列式と呼ぶ。

**例 4.1.**

$$\det_{\alpha} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \alpha^2 a_{21}a_{32}a_{13} + \alpha^2 a_{31}a_{12}a_{23} \\ + \alpha a_{11}a_{32}a_{23} + \alpha a_{31}a_{22}a_{13} + \alpha a_{21}a_{12}a_{33}.$$

$\det_{-1} A = \det A$ ,  $\det_1 A = \text{per } A$  ( $A$  のパーマネント) であるので、アルファ行列式は行列式とパーマネントを補間する行列関数のパラメタ族である。 $\nu$  は (従って  $\alpha^{\nu(\cdot)}$  も) 類関数であり、分割  $\lambda \vdash N$  に対する  $A$  の immanant

$$\text{Imm}^{\lambda} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \chi^{\lambda}(\sigma) \prod_{i=1}^N a_{\sigma(i)i}$$

を用いると、フーリエ展開

$$\alpha^{\nu(\sigma)} = \frac{1}{N!} \sum_{\lambda \vdash N} f^{\lambda} f_{\lambda}(\alpha) \chi^{\lambda}(\sigma) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

により

$$\det_{\alpha} A = \frac{1}{N!} \sum_{\lambda \vdash N} f^{\lambda} f_{\lambda}(\alpha) \text{Imm}^{\lambda} A \quad (2)$$

である。ここで  $f^{\lambda} = K_{\lambda(1^N)}$  は  $\lambda$  のヤング図形に対する標準盤の総数、 $f_{\lambda}(x)$  は

$$f_{\lambda}(x) := \prod_{(i,j) \in \lambda} (1 + (j-i)x) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (1 + (j-i)x)$$

で定義される多項式 (いわゆる content polynomial を少し修正したもの) である。

アルファ行列式は

- 行と列それぞれに関して多重線形である
- $\det_{\alpha} {}^t A = \det_{\alpha} A$
- $\det_{\alpha} \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \det_{\alpha} A \det_{\alpha} C$

- 「余因子展開」を持つ (例 4.2)

など, 行列式と共通する性質を持つ. 一方で乗法性  $\det_\alpha(AB) = \det_\alpha A \det_\alpha B$  や中心性  $\det_\alpha(AB) = \det_\alpha(BA)$  などは一般には成り立たない ( $n \geq 2$  のとき, 任意の  $A, B \in \text{Mat}_n$  に対して  $\det_\alpha(AB) = \det_\alpha(BA)$  が成立するのは  $\alpha = -1$  のときに限る) が, 特別な場合として

$$\det_\alpha AP(\sigma) = \det_\alpha P(\sigma)A \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_N)$$

は成立する.

**例 4.2 (余因子展開).** 1 列で展開する場合,  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n$  に対してその 1 行と  $r$  行を入れ替えた後で 1 行と 1 列を取り除いて得られる行列を  $A_r$  とおけば

$$\det_\alpha A = a_{11} \det_\alpha A_1 + \alpha \sum_{r=2}^n \det_\alpha A_r$$

が成り立つ. たとえば  $n = 3$  の場合の余因子展開は

$$\begin{aligned} \det_\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ = a_{11} \det_\alpha \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \alpha a_{21} \det_\alpha \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \alpha a_{31} \det_\alpha \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. 具体的な適用例として,  $A = \mathbf{1}_n$  とすると  $r$  に依らず  $A_r = \mathbf{1}_{n-1}$  なので

$$\det_\alpha \mathbf{1}_n = (1 + (n-1)\alpha) \det_\alpha \mathbf{1}_{n-1}$$

という漸化式が得られ, これから  $\det_\alpha \mathbf{1}_n = \prod_{j=1}^{n-1} (1 + j\alpha)$  が分かる.

**注意 4.3.** アルファ行列式は Vere-Jones [19] が “ $\alpha$ -permanent” として (こことは少し違う定義で) 導入した. ここで採用されている定義と “ $\alpha$ -determinant” という名称は白井・高橋 [18] による.

## 4.2 リース行列式

行数が列数を割り切るような長方形列  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n, kn}$  に対して

$$\text{wrdet}_k A := \det_{-1/k}(A \otimes \mathbf{1}_{k,1})$$

と定め、これを  $A$  の  $k$ -リース行列式 (wreath determinant), または単にリース行列式と呼ぶ。ここに  $A \otimes B$  は行列のクロネッカー積

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (A = (a_{ij}))$$

を表す。

**注意 4.4.** [13] におけるリース行列式の定義と上の定義は、行と列の役割が逆になっている。

**例 4.5.**  $2 \times 4$  行列の 2-リース行列式は

$$\begin{aligned} \text{wrdet}_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} &= \det_{-1/2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}(a_{11}a_{12}a_{23}a_{24} + a_{13}a_{14}a_{21}a_{22}) \\ &\quad - \frac{1}{8}(a_{11}a_{13}a_{22}a_{24} + a_{11}a_{14}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{21}a_{24} + a_{12}a_{14}a_{21}a_{23}). \end{aligned}$$

$k$ -リース行列式は以下の性質を持つ [13].

(W1)  $\text{wrdet}_k$  は列に関して多重線形である。

(W2)  $\text{wrdet}_k QA = (\det Q)^k \text{wrdet}_k A$  ( $\forall Q \in GL_n$ ) が成り立つ。

(W3)  $\text{wrdet}_k AP(\sigma) = \text{wrdet}_k A$  ( $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{(k^n)}$ ) が成り立つ。

**注意 4.6 (リース行列式という名前について).** リース積  $\mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_k^n \rtimes \mathfrak{S}_n$  を  $\mathfrak{S}_k^n = \mathfrak{S}_{(k^n)}$  の同一視を通じて  $\mathfrak{S}_{k^n}$  の部分群とみなしたとき,  $g = ((\tau_1, \dots, \tau_n), \sigma) \in \mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\text{wrdet}_k AP(g) = (\text{sgn } \sigma)^k \text{wrdet}_k A$$

が成り立つ。つまり  $\text{wrdet}_k$  はリース積  $\mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_n$  の右側からの作用に関して相対不変である。リース行列式という名前はこの性質に由来する。

逆にこれらの 3 つの条件 (W1), (W2), (W3) はリース行列式を特徴付ける :

**定理 4.7.**  $f: \text{Mat}_{n, kn} \rightarrow \mathbb{C}$  であって, 上記の 3 条件 (W1), (W2), (W3) を満たすものは, 定数倍を除いて  $\text{wrdet}_k$  に一致する。

この事実に対する直接的かつ初等的な証明を与える。そのために少し記号を用意する。

$\mathcal{M}_{n,k} := \mathcal{M}_{(k^n)}$  とおく, すなわち

$$\mathcal{M}_{n,k} = \left\{ M = (m_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \mid \sum_{s=1}^n m_{is} = \sum_{s=1}^n m_{si} = k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \right\}.$$

$\sigma \in \mathfrak{S}_{kn}$  に対して  $M^{(k^n)}(\sigma) \in \mathcal{M}_{n,k}$  である.  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,k}$  に対して

$$I(M) = (\overbrace{e_1 \dots e_1}^{m_{11}} \dots \overbrace{e_n \dots e_n}^{m_{n1}} \dots \overbrace{e_1 \dots e_1}^{m_{1n}} \dots \overbrace{e_n \dots e_n}^{m_{nn}})$$

とおく. ここに  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は  $\mathbb{C}^n$  の標準単位ベクトルを表す. たとえば特に

$$I(kI_n) = (\overbrace{e_1 \dots e_1}^k \dots \overbrace{e_n \dots e_n}^k) = I_n \otimes \mathbf{1}_{1,k}$$

である. また

$$I(M^{(k^n)}(\sigma)) = I(kI_n)P(\sigma) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_{kn}) \quad (3)$$

が成り立つ.  $n^2$  個の変数  $x_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) を用意し,  $M = (m_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$  に対して

$$x^M = \prod_{i,j=1}^n x_{ij}^{m_{ij}}$$

で単項式を略記する. また  $x_{ij}$  たちの多項式  $P$  に対し, その展開における  $x^M$  の係数を  $[x^M]P$  で表す.

*Proof.*  $f: \text{Mat}_{n,kn} \rightarrow \mathbb{C}$  は (W1),(W2),(W3) を満たすとする.  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n,kn}$  に対して (W1) より

$$f(\text{diag}(t_1, \dots, t_n)A) = \sum_{i_1, \dots, i_{kn}=1}^n t_{i_1} \dots t_{i_{kn}} a_{i_1 1} \dots a_{i_{kn} kn} f(e_{i_1} \dots e_{i_{kn}})$$

である. 一方 (W2) により

$$f(\text{diag}(t_1, \dots, t_n)A) = \det(\text{diag}(t_1, \dots, t_n))^k f(A) = (t_1 \dots t_n)^k f(A)$$

である. よって  $\{i_1, \dots, i_{kn}\}$  が multiset として  $\{\overbrace{1, \dots, 1}^k, \dots, \overbrace{n, \dots, n}^k\}$  と等しくなければ  $f(e_{i_1} \dots e_{i_{kn}}) = 0$  である. このことと (W3) を合わせれば結局, 各  $M \in \mathcal{M}_{n,k}$  に対する  $f(I(M))$  の値が定数倍を除いて一意に決まることを言えば良い.

$x_{ij}$  を  $(i, j)$  成分とする  $n$  次行列  $X = (x_{ij})$  を考える.  $X \otimes \mathbf{1}_{1,k} = XI(kI_n)$  に注意して

$$f(X \otimes \mathbf{1}_{1,k}) = (\det X)^k f(I(kI_n))$$

である. 一方で上の議論より

$$f(X \otimes \mathbf{1}_{1,k}) = \sum_{i_1, \dots, i_{kn}} x_{i_1 1} \dots x_{i_k 1} x_{i_{k+1} 2} \dots x_{i_{kn} n} f(e_{i_1} \dots e_{i_{kn}})$$

$$= \sum_{M \in \mathcal{M}_{n,k}} \frac{k!^n}{M!} f(I(M)) x^M$$

である。よって上の二つの式で  $x^M$  の係数を比較することで

$$f(I(M)) = f(I(kI_n)) \times \frac{M!}{k!^n} [x^M] (\det X)^k$$

を得るが、この値は共通の定数  $f(I(kI_n))$  を除けば  $M$  だけで決まっている。  $\square$

**系 4.8.**  $M \in \mathcal{M}_{n,k}$  に対し

$$\frac{\text{wrdet}_k I(M)}{\text{wrdet}_k I(kI_n)} = \frac{M!}{k!^n} [x^M] (\det X)^k.$$

## 5 リース行列式と帯球関数

分割  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l) \vdash N$  に対して行列  $\mathbf{1}_\mu \in \text{Mat}_N$  を

$$\mathbf{1}_\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{1}_{\mu_l} \end{pmatrix}$$

で定めると任意の  $\lambda \vdash N$  と  $x \in \mathfrak{S}_N$  に対して

$$\text{Imm}^\lambda(\mathbf{1}_\mu P(x)) = \sum_{\sigma \in x \mathfrak{S}_\mu} \chi^\lambda(\sigma) = \mu! \omega_\mu^\lambda(x)$$

であることに注意しておく。

**定理 5.1.**  $\sigma \in \mathfrak{S}_{kn}$  に対して

$$\begin{aligned} \omega^{(k^n)}(\sigma) &= \left(\frac{k^k}{k!}\right)^n \sum_{y \in \mathfrak{S}_{(k^n)}} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\nu(\sigma y)} \\ &= \frac{\text{wrdet}_k I(M(\sigma))}{\text{wrdet}_k I(M(e))} \\ &= \frac{M(\sigma)!}{(k!)^n} [x^{M(\sigma)}] (\det X)^k \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし簡単のため  $M(\sigma) = M^{(k^n)}(\sigma)$  と書いた。また  $X$  は  $(i, j)$  成分が  $x_{ij}$  なる  $n$  次行列である。

*Proof.* (2) により

$$\det_\alpha(\mathbf{1}_{(k^n)} P(\sigma)) = \frac{1}{(kn)!} \sum_{\lambda \vdash kn} f^\lambda f_\lambda(\alpha) \text{Imm}^\lambda(\mathbf{1}_{(k^n)} P(\sigma))$$

が成り立つ。両辺を計算すると

$$\sum_{y \in \mathfrak{S}_{(k^n)}} \alpha^{\nu(\sigma y)} = \frac{k!^n}{(kn)!} \sum_{\lambda \vdash kn} f^\lambda f_\lambda(\alpha) \omega_{(k^n)}^\lambda(\sigma)$$

である。  $\omega_{(k^n)}^\lambda$  は  $\lambda \geq (k^n)$  でなければ恒等的に 0 である。また  $f_\lambda(\alpha)$  は  $\lambda_1 > k$  のとき  $1+k\alpha$  を因子に持つので、  $f_\lambda(-1/k)$  は  $\lambda_1 \leq k$  でなければ 0 になる。二つの条件  $\lambda \geq (k^n)$  と  $\lambda_1 \leq k$  を両立する  $kn$  の分割は  $\lambda = (k^n)$  しかない。よって  $\alpha = -1/k$  を代入することで

$$\sum_{y \in \mathfrak{S}_{(k^n)}} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\nu(\sigma y)} = \frac{k!^n}{(kn)!} f^{(k^n)} f_{(k^n)}(-1/k) \omega^{(k^n)}(\sigma) \quad (4)$$

となる。  $f^\lambda$  に対するフックの公式

$$f^\lambda = \frac{N!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} (\lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1)} \quad (\lambda \vdash N)$$

と  $f_\lambda(x)$  の定義から

$$\begin{aligned} f^{(k^n)} f_{(k^n)}(-1/k) &= \frac{(kn)!}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k ((n-i) + (k-j) + 1)} \times \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{j-i}{k}\right) \\ &= \frac{(kn)!}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k (i+j-1)} \times \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k \frac{i+j-1}{k} \\ &= \frac{(kn)!}{k^{kn}} \end{aligned}$$

なので第 1 の等号が示された。また (4) は ((3) に注意して)

$$\det_{-1/k}(\mathbf{1}_{(k^n)} P(\sigma)) = \det_{-1/k}(\mathbf{I}(M(e)) P(\sigma) \otimes \mathbf{1}_{k,1}) = \text{wrdet}_k \mathbf{I}(M(\sigma))$$

に等しいので第 2 の等号が成り立つ。第 3 の等号の成立は系 4.8 より明らか。 □

**系 5.2.**  $m < n$  として  $\sigma \in \mathfrak{S}_{km}$  を自然な埋め込みで  $\sigma \in \mathfrak{S}_{kn}$  とみなすとき

$$\omega^{(k^m)}(\sigma) = \omega^{(k^n)}(\sigma)$$

が成り立つ。

*Proof.*  $\mathfrak{S}_{(k^n)}$  を  $\mathfrak{S}_{(k^m)} \times \mathfrak{S}_{(k^{n-m})}$  とみなすことで

$$\omega^{(k^n)}(\sigma) = \left(\frac{k^k}{k!}\right)^n \sum_{(y_1, y_2) \in \mathfrak{S}_{(k^m)} \times \mathfrak{S}_{(k^{n-m})}} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\nu(\sigma y_1 y_2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{k^k}{k!}\right)^n \sum_{y_1 \in \mathfrak{S}_{(k^m)}} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\nu(\sigma y_1)} \sum_{y_2 \in \mathfrak{S}_{(k^{n-m})}} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\nu(y_2)} \\
&= \left(\frac{k^k}{k!}\right)^m \sum_{y_1 \in \mathfrak{S}_{(k^m)}} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\nu(\sigma y_1)} = \omega^{(k^m)}(\sigma). \quad \square
\end{aligned}$$

**系 5.3.**  $p$  を奇素数として  $k = p - 1$  のとき

$$\omega^{(k^n)}(\sigma) \equiv 1 \pmod{p} \quad (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{kn})$$

が成り立つ。特に  $\omega^{(k^n)}$  は零点を持たない。

*Proof.*  $k = p - 1$  のとき  $k^k \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $k! \equiv -1 \pmod{p}$ ,  $-\frac{1}{k} \equiv 1 \pmod{p}$  であることより

$$\omega^{(k^n)}(\sigma) = \left(\frac{k^k}{k!}\right)^n \sum_{y \in \mathfrak{S}_{(k^n)}} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\nu(\sigma y)} \equiv (-1)^n \sum_{y \in \mathfrak{S}_{(k^n)}} 1 \equiv 1 \pmod{p}$$

となる。 □

**系 5.4.**  $\iota: [kn] \rightarrow [n]$  を  $\iota(s) = j \iff s \in \Omega_j^{(k^n)}$  で定めると

$$\text{wrdet}_k A = \frac{1}{k^{kn}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{kn}} \omega^{(k^n)}(\sigma) \prod_{s=1}^{kn} a_{\iota(s)\sigma(s)}.$$

**注意 5.5** ( $\mathfrak{S}_\infty$  上の“帯球関数”). 系 5.2 から  $\mathfrak{S}_\infty$  上の両側  $\mathfrak{S}_{(k^\infty)}$ -不変な関数  $\omega^{(k^\infty)}$  が

$$\omega^{(k^\infty)}(\sigma) = \omega^{(k^n)}(\sigma) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_{kn} \subset \mathfrak{S}_\infty)$$

によって自然に定まり、さらに  $k = p - 1$  ( $p$  は奇素数) のとき系 5.3 により

$$\omega^{(k^\infty)}(\sigma) \equiv 1 \pmod{p} \quad (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_\infty)$$

が成り立つ。

**注意 5.6 (Immanant の拡張).**  $\lambda, \mu \vdash N$  として

$$\text{Imm}_\mu^\lambda(A) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \omega_\mu^\lambda(\sigma) \prod_{s=1}^N a_{s\sigma(s)} \quad (A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_N)$$

と定義する。  $\mu = (1^N)$  のとき  $\omega_\mu^\lambda = \chi^\lambda$  なので  $\text{Imm}_{(1^N)}^\lambda = \text{Imm}^\lambda$  である。  $A \in \text{Mat}_{n, kn}$  に対して

$$\text{wrdet}_k A = \frac{1}{k^{kn}} \text{Imm}_{(k^n)}^{(k^n)}(A \otimes \mathbf{1}_{k,1})$$

である。

**注意 5.7 (行列式の 2 パラメタ変形).** 行列式の 2 パラメタ  $\alpha, \beta$  による変形

$$\det_{\alpha, \beta} A = \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N} \alpha^{\nu(\sigma)} \beta^{\nu(\tau)} \prod_{i=1}^N a_{\sigma(i)\tau(i)} = \frac{1}{N!} \sum_{\lambda \vdash N} f^\lambda f_\lambda(\alpha) f_\lambda(\beta) \text{Imm}^\lambda A$$

を考えると ( $\beta = 0$  のとき  $\det_{\alpha, 0} A = \det_\alpha A$  である), 同じような「長方形分割に対応する項の切り出し」が出来る. すなわち  $N = kn$  のとき  $f_\lambda(-1/k) f_\lambda(1/n) \neq 0$  となる  $\lambda \vdash kn$  は  $\lambda = (k^n)$  のみであることから

$$\det_{-1/k, 1/n} A = \frac{\det_{-1/k, 1/n} I_{kn}}{f^{(k^n)}} \text{Imm}^{(k^n)} A \quad \left( \det_{-1/k, 1/n} I_{kn} = \frac{(kn)!}{(kn)^{kn}} \right)$$

が得られるので,  $\lambda = (k^n)$  に対する既約指標やそれから得られる球関数  $\omega_\mu^{(k^n)}$  ( $\mu \vdash kn$ ) の値に対する公式

$$\omega_\mu^{(k^n)}(\sigma) = \frac{f^{(k^n)} \det_{-1/k, 1/n}(\mathbf{1}_\mu P(\sigma))}{\mu! \det_{-1/k, 1/n} I_{kn}} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_{kn})$$

$$\left( \text{特に } K_{(k^n)\mu} = \omega_\mu^{(k^n)}(e) = \frac{f^{(k^n)} \det_{-1/k, 1/n} \mathbf{1}_\mu}{\mu! \det_{-1/k, 1/n} I_{kn}} \right)$$

$$\frac{\chi^{(k^n)}(\sigma)}{f^{(k^n)}} = \frac{\det_{-1/k, 1/n} P(\sigma)}{\det_{-1/k, 1/n} I_{kn}} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_{kn})$$

が得られる [10].

## 6 Alon-Tarsi 予想と帯球関数

$M = M^{(n^n)}$  とする.  $g_n \in \mathfrak{S}_{n^2}$  を

$$g_n((i-1)n+j) = (j-1)n+i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

によって定めると  $M(g_n) = \mathbf{1}_n$  であり, また  $I(M(g_n)) = \overbrace{(I_n \ I_n \ \dots \ I_n)}^n$  である. 定理 5.1 より

$$\omega^{(n^n)}(g_n) = \left(\frac{n^n}{n!}\right)^n \sum_{y \in \mathfrak{S}_{(n^n)}} \left(-\frac{1}{n}\right)^{\nu(g_n y)} = \frac{\text{wrdet}_k I(M(g_n))}{\text{wrdet}_k I(M(e))} = \frac{1}{(n!)^n} [x^{\mathbf{1}_n}] (\det X)^n$$

だが,  $\det X = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x^{P(\sigma)}$  に注意すれば

$$\text{sels}(n) - \text{sols}(n) = \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathfrak{S}_n \\ P(\sigma_1) + \dots + P(\sigma_n) = \mathbf{1}_n}} \text{sgn}(\sigma_1 \dots \sigma_n) = [x^{\mathbf{1}_n}] (\det X)^n$$

なので, 次の結果を得る.



**定理 6.1.** Alon-Tarsi 予想は以下の (1)~(3) のそれぞれと同値である.

- (1)  $\text{wrdet}_n(\overbrace{I_n I_n \dots I_n}^n) \neq 0$
- (2)  $\omega^{(n^n)}(g_n) \neq 0$
- (3)  $\sum_{y \in \mathfrak{S}_{(n^n)}} \left(-\frac{1}{n}\right)^{\nu(g_n y)} \neq 0$

特に  $p$  を奇素数として  $n = p - 1$  のとき, 系 5.3 より  $\omega^{(n^n)}(g_n) \neq 0$  なので, この場合には Alon-Tarsi 予想が正しいことが分かる.

**注意 6.2.**  $\text{per } X = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x^{P(\sigma)}$  なので

$$\text{ls}(n) = \sum_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathfrak{S}_n \\ P(\sigma_1) + \dots + P(\sigma_n) = 1_n}} 1 = [x^{1_n}](\text{per } X)^n$$

である.

## 参考文献

- [1] N. Alon and M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica* **12** (1992), 125–134.
- [2] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I, Association Schemes*. The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, 1984.
- [3] A. A. Drisko, On the number of even and odd Latin squares of order  $p + 1$ . *Adv. Math.* **128** (1997), 20–35.
- [4] P. Erdős, A. Rubin and H. Taylor, Choosability in graphs. Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979), pp. 125–157, Congress. Numer., XXVI, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1980.
- [5] L. Euler, Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques. *Verh. Zeeuwsch Genoot. Weten Vliss* **9**, 85–239, 1782.  
<http://eulerarchive.maa.org/pages/E530.html>
- [6] F. Galvin, The list chromatic index of a bipartite multigraph. *J. Combin. Theory Ser. B* **63** (1995), 153–158.
- [7] D. G. Glynn, The conjectures of Alon-Tarsi and Rota in dimension prime minus one. *SIAM J. Discrete Math.* **24** (2010), no.2, 394–399.
- [8] R. Huang and G.-C. Rota, On the relations of various conjectures on Latin squares and straightening coefficients. *Discrete Math.* **128** (1994), 225–236.

- [9] J. C. M. Janssen, On even and odd Latin squares. *J. Combin. Theory Ser. A* **69** (1995), 173–181.
- [10] K. Kimoto, Averages of alpha-determinants over permutations. arXiv:1403.3723
- [11] 木本 一史, 対称群上の帯球関数とリース行列式 (Zonal spherical functions on symmetric groups and the wreath determinant). RIMS Kôkyûroku 「表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題 (Various Issues relating to Representation Theory and Non-commutative Harmonic Analysis)」
- [12] K. Kimoto, S. Matsumoto and M. Wakayama, Alpha-determinant cyclic modules and Jacobi polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 6447–6473.
- [13] K. Kimoto and M. Wakayama, Invariant theory for singular  $\alpha$ -determinants. *J. Combin. Theory Ser. A* **115** (2008), no. 1, 1–31.
- [14] S. Kumar and J. M. Landsberg, Connections between conjectures of Alon-Tarsi, Hadamard-Howe, and integrals over the special unitary group. *Discrete Math.* **338** (2015), 1232–1238.
- [15] J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics (2nd ed.)*, Cambridge University Press, 2001.
- [16] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials (2nd ed.)*, Oxford University Press, 1995.
- [17] S. Matsumoto and M. Wakayama, Alpha-determinant cyclic modules of  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . *J. Lie Theory* **16** (2006), no. 2, 393–405.
- [18] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants. I. Fermion, Poisson and boson point processes. *J. Funct. Anal.* **205** (2003), no. 2, 414–463.
- [19] D. Vere-Jones, A generalization of permanents and determinants. *Linear Algebra Appl.* **63** (1988), 267–270.
- [20] <http://oeis.org/A002860>
- [21] <http://oeis.org/A114630>