数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 23-30

完備測地距離空間上で定義された凸関数のリゾルベントと収縮射影法

東邦大学・理学部 木村泰紀
Yasunori Kimura
Department of Information Science
Faculty of Science
Toho University

1 序論

凸関数の最小化問題は, 凸解析における基本的かつ重要な非線形問題であり, 解の存在や近似法など, 多岐にわたって研究がなされている. 本稿で取り扱う凸関数のリゾルベントの概念は, 凸解析と不動点理論をつなぐ架け橋の役割を担う重要な概念の一つである.

実ヒルベルト空間 H で定義された凸関数 $f : H \to]-\infty, +\infty]$ が真かつ下半連続であると仮定しよう. すなわち, $f(x_0) < \infty$ をみたす $x_0 \in H$ が存在し, かつ $x_n \to x$ をみたす任意の点列 $\{x_n\} \subset H$ と $x \in H$ に対して

$$f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

が成り立つとする. $a \in H$ を一つ固定し, 関数 $g : H \to]-\infty, +\infty]$ を, $x \in H$ に対して $g(x) = f(x) + \|x - a\|^2$ で定義すると, g は H 上で最小値をとり, その最小点 $x_a \in H$ は一意であることが知られている. ここで, $a \in X$ に $x_a \in X$ を対応させる写像 $J_f : H \to H$ を定義し, これを f のリゾルベントという.

近年, 凸関数のリゾルベントの概念の測地距離空間上への拡張に関する新しい知見が得られている. Mayer [4] は完備 CAT(0) 空間上の関数に対するリゾルベントを定義し, Kimura-Kohsaka [2] は完備 CAT(1) 空間上での定義を提案した.

リゾルベントを用いた最小点近似法としては, Rockafellar [5] が近似点列の弱収束性を証明した近接点法が有名だが, この手法による近似点列は一般に強収束はしないことが

Güler [1] によって示されている. 本稿では, 不動点近似法として Takahashi-Takeuchi-Kubota [6] によって提案された, 生成近似列の強収束が証明されている収縮射影法を取り上げ, 完備 CAT(1) 空間上で定義された凸関数の最小点近似へ応用することを試みた.

2 準備

距離空間 (X,d) の点 $x,y \in X$ と $l>0$ に対し, 写像 $c:[0,l]\to X$ が $c(0)=x$, $c(l)=y$ かつ任意の $s,t\in[0,l]$ に対して $d(c(s),c(t))=|s-t|$ をみたすとき, c を x,y を結ぶ測地線という. $r>0$ に対し, X が測地距離空間であるとは, 任意の $x,y\in X$ に対して x,y を結ぶ測地線が存在することをいう. 以下では任意の 2 点を結ぶ測地線がつねに一意であると仮定し, x,y を結ぶ測地線の像 $c([0,l])$ を $[x,y]$ であらわす. $[x,y]$ 上の点 $p=c(s)$ は, $[x,y]$ を $s:(l-s)$ に内分する点とみなすことができることから, $t=s/l$ を用いて

$$p=(1-t)x\oplus ty$$

とあらわす.

$\kappa\in\mathbb{R}$ に対して, 曲率 κ をもつ 2 次元モデル空間 M_κ^2 を

$$M_\kappa^2=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}}\mathbb{H}^2 & (\kappa<0),\\ \mathbb{R}^2 & (\kappa=0),\\ \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\mathbb{S}^2 & (\kappa>0)\end{cases}$$

と定義する. ただし, $\mathbb{H}^2,\mathbb{R}^2,\mathbb{S}^2$ はそれぞれ 2 次元の双曲空間, ユークリッド空間, 単位球面である. M_κ^2 の距離 ρ はそれぞれ, $\kappa<0$ のときは双曲距離, $\kappa=0$ のときはユークリッドノルムから導出された距離, $\kappa>0$ のときは, 大円距離である. M_κ^2 の直径を D_κ であらわす. すなわち,

$$D_\kappa=\operatorname{diam}M_\kappa^2=\begin{cases}\infty & (\kappa\le 0),\\ \pi/\sqrt{\kappa} & (\kappa>0).\end{cases}$$

$\kappa\in\mathbb{R}$ とする. (X,d) を, 任意の $u,v\in X$ に対して $d(u,v)<D_\kappa/2$ をみたす測地距離空間とする. 3 点 $x,y,z\in X$ を頂点とする三角形を, 測地線を用いて $\triangle(x,y,z)=[y,z]\cup[z,x]\cup[x,y]$ で定義すると, $d(y,z)=\rho(\overline{y},\overline{z})$, $d(z,x)=\rho(\overline{z},\overline{x})$, $d(x,y)=\rho(\overline{x},\overline{y})$ をみたす $\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in M_\kappa^2$ がとれる. この 3 点からなる三角形 $\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ を $\triangle(x,y,z)$ の比較三角形という. $\triangle(x,y,z)$ 上の点 p は, その比較三角形上の点 $\overline{p}\in\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ と自然に対応している. 例えば $p\in[x,y]$ のときは, $p=(1-t)x\oplus ty$ をみたす $t\in[0,1]$ によって

$\overline{p} = (1-t)\overline{x} \oplus t\overline{y}$ とあらわされる．この $\overline{p} \in \triangle(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ は $p \in \triangle(x, y, z)$ の比較点と呼ばれる．

各 $u, v \in X$ に対して $d(u, v) < D_\kappa/2$ をみたす測地距離空間 X から，任意の 3 点 $x, y, z \in X$ をとり，$p, q \in \triangle(x, y, z)$ とその比較点 $\overline{p}, \overline{q} \in \triangle(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ をとると，

$$d(p, q) \leq \rho(\overline{p}, \overline{q})$$

がつねに成り立つとき，X は $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空間であるという．

測地距離空間 X の部分集合 C が凸であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して $[x, y] \subset C$ が成り立つことをいう．X が $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空間で C を X の空でない閉凸集合とする．$x \in X$ が $d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y) < D_\kappa/2$ をみたすとき，$d(x, y_x) = d(x, C)$ をみたす $y_x \in C$ が一意に存在する．とくに，任意の $u, v \in X$ に対して $d(u, v) < D_\kappa/2$ が成り立つときには，$x \in X$ に $y_x \in C$ を対応させる写像 $P_C : X \to C$ が定義でき，これを X から C への距離射影と呼ぶ．$\kappa \leq 0$ のとき，$\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空間上で定義される任意の距離射影は非拡大，すなわち，任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(P_C x, P_C(y)) \leq d(x, y)$$

が成り立つことが知られているが，$\kappa > 0$ のときは一般に非拡大にならない．一方，任意の $x \in X$ と $z \in C$ に対して

$$d(P_C x, z) \leq d(x, z)$$

が成り立つこと，すなわち P_C が擬非拡大となることは，任意の $\kappa \in \mathbb{R}$ で成り立つことが知られている．

(X, d) を，任意の $u, v \in X$ に対して $d(u, v) < D_\kappa/2$ をみたす完備 $\mathrm{CAT}(\kappa)$ 空間とし，$f : X \to]-\infty, +\infty]$ を下半連続な真凸関数とする．f は X 上で最小値をとるとは限らないが，$a \in X$ を固定し，

$$\begin{aligned}
\psi_\kappa(t) &= t^2 + \frac{\kappa}{6}t^4 + \frac{31\kappa^2}{360}t^6 + \frac{173\kappa^3}{5040}t^8 + \frac{25261\kappa^4}{1814400}t^{10} + \cdots \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\kappa}\tan(\sqrt{\kappa}t)\sin(\sqrt{\kappa}t) & (\kappa > 0), \\ t^2 & (\kappa = 0), \\ \dfrac{1}{-\kappa}\tanh(\sqrt{-\kappa}t)\sinh(\sqrt{-\kappa}t) & (\kappa < 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

を用いて，$g : X \to]-\infty, +\infty]$ を

$$g(x) = f(x) + \psi_\kappa(d(x, a))$$

と定義すれば, g は X 上で最小値をとり, その最小点 $x_a \in X$ は一意に定まることが知られている. $a \in X$ に $x_a \in X$ を対応させる写像 $J_f : X \to X$ を f のリゾルベントという. このとき, $z \in X$ が f の最小点となることと z が J_f の不動点であることは同値である. つまり, f の最小点の全体を $\operatorname{argmin}_{x \in X} f(x)$ とし, J_f の不動点の全体を $\operatorname{Fix} J_f$ とすると,

$$\operatorname*{argmin}_{x \in X} f(x) = \operatorname{Fix} J_f$$

が成り立つ.

$\kappa > 0$ のとき, f のリゾルベント J_f は次の性質をもつことが知られている. 任意の $x, y \in X$ に対して

$$\begin{aligned} &2\cos(\sqrt{\kappa}d(J_f x, y))\cos(\sqrt{\kappa}d(x, J_f y)) \\ &\qquad \leq (\cos(\sqrt{\kappa}d(J_f x, x)) + \cos(\sqrt{\kappa}d(J_f y, y)))\cos^2(\sqrt{\kappa}d(J_f x, J_f y)). \end{aligned}$$

とくに $y \in S = \operatorname{Fix} J_f$ とすると,

$$\begin{aligned} &2\cos(\sqrt{\kappa}d(J_f x, y))\cos(\sqrt{\kappa}d(x, y)) \\ &\leq (\cos(\sqrt{\kappa}d(J_f x, x)) + 1)\cos^2(\sqrt{\kappa}d(J_f x, y)) \\ &\leq 2\cos^2(\sqrt{\kappa}d(J_f x, y)) \end{aligned}$$

より $d(J_f x, y) \leq d(x, y)$ が得られる. これを J_f の擬非拡大性という.

以下の定理は, 完備 CAT(1) 空間における [3] の結果からの直接の帰結である.

定理 1 (Kimura-Satô [3]). X を完備 CAT(1) 空間とし, 任意の $u, v \in X$ に対して $d(u, v) < \pi/2$ をみたすと仮定する. $\{C_n\}$ を X の空でない閉凸集合列で, 包含関係に関して単調減少, すなわち, $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$ をみたすとする. $u \in X$ とし, 点列 $\{x_n\} \subset X$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = P_{C_n} u$ で定義する. ただし $P_{C_n} : X \to C_n$ は C_n への距離射影である. このとき, $C_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ ならば $\{x_n\}$ は $P_{C_0} u \in X$ に収束する.

3 収縮射影法による最小点近似

本節では $\kappa > 0$ のときの完備 CAT(κ) 空間 X を取り上げ, X 上での凸関数に対する最小点近似定理を証明する. 点列の生成は収縮射影法を用いる. まずはじめに $\kappa = 1$ の場合の結果を示そう.

定理 2. (X, d) を次の条件をみたす完備 CAT(1) 空間とする.

(i) 任意の $u, v \in X$ に対して $d(u,v) < D_1/2 = \pi/2$ が成り立つ;

(ii) 任意の $u, v \in X$ に対して $\{w \in X : d(u,w) \leq d(v,w)\}$ は凸集合となる.

$f : X \to]-\infty, +\infty]$ を下半連続な真凸関数とし, $S = \operatorname{argmin}_{x \in X} f(x) \neq \emptyset$ であるとする. 正の実数列 $\{\lambda_n\}$ が $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$ をみたすと仮定し, これを用いて X の点列 $\{x_n\}$ を次のように生成する. 任意に固定した $u \in X$ に対して, $C_1 = X$, $x_1 = u$ とし, さらに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n \cap \{z \in X : d(J_{\lambda_n f} x_n, z) \leq d(x_n, z)\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} u \end{aligned}$$

とする. ただし, $J_{\lambda_n f} : X \to X$ は $\lambda_n f$ のリゾルベント, すなわち, $x \in X$ に対して

$$J_{\lambda_n f} x = \operatorname*{argmin}_{y \in X} (\lambda_n f(y) + \tan d(x,y) \sin d(x,y))$$

で定義される作用素である. このとき $\{x_n\}$ は $P_S u \in X$ に収束する.

証明. 最初に $\{x_n\}$ および $\{C_n\}$ の定義が妥当であることを帰納法で示す. x_1 は与えられており, $C_1 = X$ は明らかに S を含む閉凸集合である. $k \in \mathbb{N}$ を任意に固定し, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ が定義されており, かつ $C_1, C_2, \ldots, C_k$ が S を含む閉凸集合であると仮定しよう. このとき, 集合 $\{z \in X : d(x_k, z) \leq d(J_{\lambda_n f}(x_k), z)\}$ は定理の仮定より凸集合であり, また明らかに閉集合である. ここで $p \in S = \operatorname{argmin}_{x \in X} f(x)$ をとると, $p \in \operatorname{Fix} J_{\lambda_k f}$ となることと, $J_{\lambda_k f}$ の擬非拡大性より

$$d(p, J_{\lambda_k f} x_k) \leq d(p, x_k)$$

が成り立つ. よって, 帰納法の仮定とあわせて

$$p \in C_k \cap \{z \in X : d(z, J_{\lambda_k f} x_k) \leq d(z, x_k)\} = C_{k+1}$$

となり, $S \subset C_{k+1}$ が示された. したがって C_{k+1} は空でない閉凸集合であり, $x_{k+1} = P_{C_{k+1}} u$ によって x_{k+1} が定義できることもわかる. 以上によって $\{x_n\}$ および $\{C_n\}$ の定義が妥当であることが示された.

$\{C_n\}$ は空でない閉凸集合の列で, 定義より包含関係に関して単調減少であり, さらに $C_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ とすると C_0 も空でない閉凸集合である. よって, 定理1より,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} P_{C_n} u = P_{C_0} u$$

となる. $x_0 = P_{C_0} u$ とすると, $x_0 \in C_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$d(J_{\lambda_n f} x_n, x_0) \leq d(x_n, x_0).$$

よって $\lim_{n\to\infty} J_{\lambda_n f}x_n = x_0$ が成り立つ．リゾルベントの定義より，$p = P_S u \in S$ と $\tau \in]0,1[$ に対して $z_\tau = \tau J_{\lambda_n f}x_n \oplus (1-\tau)p$ とすると

$$\begin{aligned}\lambda_n f(J_{\lambda_n f}x_n) + \psi_1(d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)) &\leq \lambda_n f(z_\tau) + \psi_1(d(z_\tau, x_n))\\ &\leq \tau\lambda_n f(J_{\lambda_n f}x_n) + (1-\tau)\lambda_n f(p) + \psi_1(d(z_\tau, x_n))\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$\psi_1(t) = \tan t \sin t = \frac{1}{\cos t} - \cos t$$

であることから，

$$\begin{aligned}&(1-\tau)\lambda_n(f(J_{\lambda_n f}x_n) - f(p))\\ &\leq \psi_1(d(z_\tau, x_n)) - \psi_1(d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n))\\ &= \left(\frac{1}{\cos d(z_\tau, x_n)} - \frac{1}{\cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)}\right) - (\cos d(z_\tau, x_n) - \cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n))\\ &= \left(\frac{1}{\cos d(z_\tau, x_n)\cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)} + 1\right)(\cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n) - \cos d(z_\tau, x_n)).\end{aligned}$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n = d(J_{\lambda_n f}x_n, p)$ とする．ある $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $D_{n_0} = 0$ が成り立つときは，$J_{\lambda_{n_0} f}x_{n_0} = p \in S = \mathrm{Fix}\, J_{\lambda_n f}$ より，$n > n_0$ に対して $C_n = C_{n_0}$ となり，よって $\{x_n\}$ は $p = P_S u$ に収束する．

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $D_n > 0$ のときは，

$$\begin{aligned}&(\cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n) - \cos d(z_\tau, x_n))\sin D_n\\ &= \cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)\sin D_n - \cos d(\tau J_{\lambda_n f}x_n \oplus (1-\tau)p, x_n)\sin D_n\\ &\leq \cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)\sin D_n\\ &\quad - \cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)\sin(\tau D_n) - \cos d(p, x_n)\sin((1-\tau)D_n)\\ &= \cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)(\sin D_n - \sin(\tau D_n)) - \cos d(p, x_n)\sin((1-\tau)D_n)\\ &= 2\cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)\cos\frac{(1+\tau)D_n}{2}\sin\frac{(1-\tau)D_n}{2} - \cos d(p, x_n)\sin((1-\tau)D_n)\end{aligned}$$

より，$E_n = 1/(\cos d(z_\tau, x_n)\cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)) + 1$ として

$$\begin{aligned}&\lambda_n(f(J_{\lambda_n f}x_n) - f(p))\frac{\sin D_n}{D_n}\\ &= E_n\frac{\sin((1-\tau)D_n/2)}{(1-\tau)D_n/2}\cos d(J_{\lambda_n f}x_n, x_n)\cos\frac{(1+\tau)D_n}{2}\\ &\quad - E_n\frac{\sin((1-\tau)D_n)}{(1-\tau)D_n}\cos d(p, x_n)\end{aligned}$$

となる. $\tau \uparrow 1$ とすると $z_\tau \to J_{\lambda_n f} x_n$, $E_n \to 1/\cos^2 d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) + 1$ となり,

$$
\begin{aligned}
&\lambda_n (f(J_{\lambda_n f} x_n) - f(p)) \frac{\sin D_n}{D_n} \\
&= \left(\frac{1}{\cos^2 d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n)} + 1 \right) (\cos d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \cos D_n - \cos d(p, x_n)) \\
&= \left(\frac{1}{\cos^2 d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n)} + 1 \right) (\cos d(J_{\lambda_n f} x_n, x_n) \cos d(J_{\lambda_n f} x_n, p) - \cos d(p, x_n))
\end{aligned}
$$

を得る. ここで $n \to \infty$ とすると, $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n$ と $\liminf_{n\to\infty} \sin D_n / D_n$ はともに正の値をとり, さらに $\lim_{n\to\infty} J_{\lambda_n f} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ より

$$
\begin{aligned}
0 &\le f(x_0) - f(p) \\
&\le \liminf_{n\to\infty} f(J_{\lambda_n f} x_n) - f(p) \\
&\le 2(\cos d(x_0, p) - \cos d(p, x_0)) = 0,
\end{aligned}
$$

すなわち, $f(x_0) = f(p) = \min_{x\in X} f(x)$ となる. これは $x_0 \in S$ を意味しており, $x_0 = P_{C_0} u$ で $S \subset C_0$ であることから $x_0 = P_S u$ であることが導かれる. 以上により $\{x_n\}$ は $P_S u$ に収束することが示された.

$\kappa > 0$ に対し, (X, d) が CAT(κ) 空間のとき, X 上の新たな距離として $d'(x, y) = \sqrt{\kappa} d(x, y)$ を定義すると, (X, d') は CAT(1) 空間となる. この事実を用いて, 次の定理が得られる.

定理 3. 正実数 κ に対し (X, d) を次の条件をみたす完備 CAT(κ) 空間とする.

(i) 任意の $u, v \in X$ に対して $d(u, v) < D_\kappa / 2$ が成り立つ;
(ii) 任意の $u, v \in X$ に対して $\{w \in X : d(u, w) \le d(v, w)\}$ は凸集合となる.

$f : X \to]-\infty, +\infty]$ を下半連続な真凸関数とし, $S = \operatorname{argmin}_{x\in X} f(x) \ne \emptyset$ であるとする. 正の実数列 $\{\lambda_n\}$ が $\inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n > 0$ をみたすと仮定し, これを用いて X の点列 $\{x_n\}$ を次のように生成する. 任意に固定した $u \in X$ に対して, $C_1 = X$, $x_1 = u$ とし, さらに任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
C_{n+1} &= C_n \cap \{z \in X : d(J_{\lambda_n f} x_n, z) \le d(x_n, z)\}, \\
x_{n+1} &= P_{C_{n+1}} u
\end{aligned}
$$

とする. ただし, $J_{\lambda_n f} : X \to X$ は $\lambda_n f$ のリゾルベント, すなわち, $x \in X$ に対して

$$
J_{\lambda_n f} x = \operatorname*{argmin}_{y\in X} (\lambda_n f(y) + \psi_\kappa(d(x, y)))
$$

で定義される作用素である．このとき $\{x_n\}$ は $P_S u \in X$ に収束する．

参考文献

[1] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.

[2] Y. Kimura and F. Kohsaka, *Spherical nonspreadingness of resolvents of convex functions in geodesic spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **18** (2016), 93–115.

[3] Y. Kimura and K. Satô, *Convergence of subsets of a complete geodesic space with curvature bounded above*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 5079–5085.

[4] U. F. Mayer, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 199–253.

[5] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[6] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.