数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 57-64

Dunkle-Williams 不等式の一般化について

静岡大学・教育学研究科修士２年　田開 伯幸 (Noriyuki Tabiraki)
Graduate schools of Education, Shizuoka University
岡山県立大学・工学部　三谷 健一 (Ken-Ichi Mitani)
Department of Systems Engineering, Okayama Prefectural University
静岡大学・教育学部　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Faculty of Education, Shizuoka University

1 序

内積を持たない一般のノルム空間において, その幾何学的な性質, 例えば直交性ですら議論することは難しい. そこで, 幾何学的な性質に関連をすることが期待されるノルム不等式を用いて, ノルム空間の性質を考察する研究が進められてきた. その一つに Dunkle-Williams 不等式の研究がある. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間としたとき, Dunkl と Williams は 1964 年に以下のノルム不等式 (以下 Dunkle-Williams 不等式とよぶ) を示すとともに, ノルム空間が内積空間であるための条件を調べた. (cf. [1], [4])

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|} \quad (0 \neq x, y \in X)$$

このノルム不等式に関して, 以下の問題を考える.

問題 1.1 ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の 0 でない元 x, y に関して

(i) 正の定数 C を

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq C \leq \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}$$

を満たすように x, y によって特徴付けよ.

(ii) 正の定数 D を

$$D \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}$$

を満たすように x, y によって特徴付けよ.

(i) をDunkle-Williams不等式の精密化といい, (ii) をその逆不等式と呼ぶ. これらの問題は, 他の不等式に対しても同様に研究されていることを注意しておく. 問題1.1に関して1958年にMasseraとSchäfferが[6]で与えた不等式は

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq \frac{2\|x-y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} \leq \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}$$

を満たしDunkle-Williams不等式の精密化となっているが, 2006年にMaligrandaが[5]で以下の不等式を示して更なる精密化を与えた.

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq \frac{\|x-y\|+|\|x\|-\|y\||}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} \leq \frac{2\|x-y\|}{\max\{\|x\|,\|y\|\}} \leq \frac{4\|x-y\|}{\|x\|+\|y\|}$$

Dunkle-Williams不等式の逆不等式に関しては, 2007年にMercer [7]が以下を示した.

$$0 \leq \frac{\|x-y\|+|\|x\|-\|y\||}{\min\{\|x\|,\|y\|\}} \leq \left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

また, Dunkle-Williams不等式の, いわゆる一般化の研究がPečarić-Rajić [12]によって2007年に行われている.

定理 1.2 ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の0でない元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関して

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leqq i\leqq n}\left\{\frac{1}{\|x_i\|}\left(\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\|-\sum_{j=1}^n |\|x_j\|-\|x_i\||\right)\right\}\\
&\leq \left\|\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\\
&\leq \min_{1\leqq i\leqq n}\left\{\frac{1}{\|x_i\|}\left(\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\|-\sum_{j=1}^n |\|x_j\|-\|x_i\||\right)\right\}
\end{aligned}$$

一方で, 近年一般化された三角不等式の精密化およびその逆不等式の研究が盛んに行われている. ここで, 一般化された三角不等式とは, ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する以下のノルム不等式

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leqq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$$

をいう. 本稿では, 定理1.2の精密化および, その逆不等式を, 三角不等式の精密化の研究に関連して得ることが出来たことを報告する.

2 三角不等式および Dunkle-Williams 不等式の精密化と逆不等式

この章では, 三角不等式のおける精密化とその逆不等式に関する, 最近の研究成果を紹介するとともに, その応用としてDunkle-Williams不等式の精密化とその逆不等式が得られることを示す.

一般化された三角不等式に対して, 以下の精密化およびその逆不等式の問題を考える.

問題 2.1 ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して,

(i) $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + C \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ をみたす正の値 C を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けよ.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leqq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + D$ をみたす正の値 D を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けよ.

問題 2.1 は以下のように見直すことができる.

問題 2.2 ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して,

$$0 \leqq C \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqq D$$

をみたす定数 C, D を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ によって特徴付けよ.

1992 年に Hudzik と Landes は [2] で 2 個の元に対する三角不等式の精密化である以下の不等式を示した.

定理 2.3

$$0 \leq \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x\| + \|y\| - \|x+y\|$$

2005 年に加藤-斎藤-田村 [3] はバナッハ空間の幾何学的な性質の特徴づけに関連して, Hudzik-Landes の不等式 [2] を n 個の場合へ拡張するとともに, その逆不等式も与えた.

定理 2.4 ([3, Theorem 1]) バナッハ空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$0 \leqq \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \min_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqq \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right) \max_{1 \leqq i \leqq n} \|x_i\|$$

この不等式の成功に誘発されて, その後様々な設定のもとで三角不等式の精密化の研究が進んでいる. その 1 つに, 三谷-斎藤-加藤-田村 [9] があり, 彼らは定理 2.4 の不等式をより精密化することに成功した.

定理 2.5 ([9, Theorem 1]) バナッハ空間 X の 0 でない n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して,

以下の不等式が成立する.

$$0 \leqq \sum_{k=2}^{n}\left(k-\left\|\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right)(\|x_k^*\|-\|x_{k+1}^*\|)$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|-\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|$$
$$\leqq \sum_{k=2}^{n}\left(k-\left\|\sum_{i=n-(k-1)}^{n}\frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}\right\|\right)(\|x_{n-k}^*\|-\|x_{n-(k+1)}^*\|),$$

ここで x_i^* は $\|x_1^*\| \geqq \|x_2^*\| \geqq \cdots \geqq \|x_n^*\|$, かつ $x_0^* = x_{n+1}^* = 0$ を満たす x_i の並べ替えである.

2012 年に, 峰野-中村-大和田は [8] で問題 2.2 の全ての値を特徴付ける不等式を与えるとともに, それが定理 2.4 および定理 2.5 を含むことを示した. それらを理解するために, 2 個の元の場合と 3 個の元の場合で先ずは説明する.

定理 2.6 ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の元 x, y に関して,

$$f_2(p,q) = \|px\| + \|qy\| - \|px+qy\| \geq 0 \quad (p, q \in [0,\infty))$$

により f_2 を定めれば, f_2 は連続であり, 以下を満たす.

$$f_2(s_1,s_2) \leq f_2(t_1,t_2) \quad (s_1,s_2,t_1,t_2 \in [0,\infty)),\ s_1 \leq t_1,\ s_2 \leq t_2)$$

このとき f_2 は単調増加であるという.

これより直ちに Hudzik-Landes および 加藤-斎藤-田村の結果を得る. $\|x\| > \|y\| > 0$ であるとき,

$$s_1 = \frac{\|y\|}{\|x\|},\ s_2 = 1,\ t_1 = 1, t_2 = \frac{\|x\|}{\|y\|}$$

とおけば

$$0 = f_2(0,1) \leq f_2(s_1,s_2) \leq f_2(1,1) \leq f_2(t_1,t_2)$$

が成立する. すなわち

$$0 \leq \left(2-\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\min\{\|x\|,\|y\|\}$$
$$\leq \|x\|+\|y\|-\|x+y\|$$
$$\leq \left(2-\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\max\{\|x\|,\|y\|\}$$

である.

次に 3 個の元について考える．簡単のために左側の不等式 (精密化) のみをあつかう．ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の元 x, y, z $(\|x\| \geq \|y\| \geq \|z\| > 0)$ に対して，加藤-斎藤-田村の不等式は以下のとおりである．

$$\begin{aligned}(\mathrm{KST}) &= \left(3 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\|\right)\|z\| \\ &\leq \|x\| + \|y\| + \|z\| - \|x+y+z\|\end{aligned}$$

また，三谷-斎藤-加藤-田村の不等式は

$$\begin{aligned}(\mathrm{MSKT}) &= \left(3 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\|\right)\|z\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)(\|y\| - \|z\|) \\ &\leq \|x\| + \|y\| + \|z\| - \|x+y+z\|\end{aligned}$$

である．ここで，それぞれの不等式における値を簡単のために (KST) および (MSKT) とおいた．$x, y, z \in X$, $\|x\| \geq \|y\| \geq \|z\| > 0$, $0 \leqq s, t, u, p, q \leqq 1$ に対して，峰野-中村-大和田は以下の不等式

$$\begin{aligned}&\|sx\| + \|ty\| + \|uz\| - \|sx + ty + uz\| \\ &+ \|(1-s)px\| + \|(1-t)qy\| - \|(1-s)px + (1-t)qy\| \\ &\leq \|x\| + \|y\| + \|z\| - \|x+y+z\|\end{aligned}$$

を示したが，2 個の場合と同様に

$$\begin{aligned}f_3(s,t,u,p,q) &\overset{\mathbf{def}}{=} \|sx\| + \|ty\| + \|uz\| - \|sx + ty + uz\| \\ &\quad + \|(1-s)px\| + \|(1-t)qy\| - \|(1-s)px + (1-t)qy\|\end{aligned}$$

により連続関数 f_3 を与えれば $f_3(s,t,u,0,0)$ は s, t, u に関して単調増加であり，$p \leq p_0$, $q \leq q_0$ に対して $f_3(s,t,u,p,q) \leq f_3(s,t,u,p_0,q_0)$ かつ

$$f_3(0,0,0,0,0) = 0,\ f_3(1,1,1,p,q) = \|x\| + \|y\| + \|z\| - \|x+y+z\|$$

を満たす．これより $x, y, z \in X$, $\|x\| \geq \|y\| \geq \|z\| > 0$ に対して，直ちに

$$\begin{aligned}0 &= f_3(0,0,0,0,0) \\ &\leq f_3\left(\frac{\|z\|}{\|x\|}, \frac{\|z\|}{\|y\|}, \frac{\|z\|}{\|x\|}, 0, 0\right) = (\mathrm{KST}) \\ &\leq f_3\left(\frac{\|z\|}{\|x\|}, \frac{\|z\|}{\|y\|}, \frac{\|z\|}{\|x\|}, \frac{\|y\| - \|z\|}{\|x\| - \|z\|}, 1\right) = (\mathrm{MSKT}) \\ &\leq f_3(1,1,1,0,0) = \|x\| + \|y\| + \|z\| - \|x+y+z\|\end{aligned}$$

を得る．我々は峰野-中村-大和田の不等式を利用して，Pečarić-Rajić の精密化である以下の不等式を得た．

定理 2.7 (Mitani-Tabiraki-Ohwada (2016)) ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の元 x, y, z $(\|x\| \geq \|y\| \geq \|z\| > 0)$ に対して,

$$s_0 = \frac{\|z\|}{\|x\|}, t_0 = \frac{\|z\|}{\|y\|}, u_0 = \frac{\|z\|}{\|z\|}, p_0 = \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot \frac{\|y\| - \|z\|}{\|x\| - \|z\|}, q_0 = 1$$

とおけば, 次の不等式を得る.

$$\begin{aligned} 0 &= f(0,0,0,0,0) \\ &\leq f(s_0, t_0, u_0, 0, 0) = (\mathrm{KST}) \\ &\leq f\left(s_0, t_0, u_0, \frac{\|y\| - \|z\|}{\|x\| - \|z\|}, 1\right) = (\mathrm{MSKT}) \\ &\leq f(s_0, t_0, u_0, p_0, 1) \\ &\leq f(1,1,1,0,0) = \|x\| + \|y\| + \|z\| - \|x + y + z\| \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} &f(s_0, t_0, u_0, p_0, 1) \\ &= \left(3 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\|\right) \|z\| + \frac{\|y\| - \|z\|}{\|y\|}(\|x\| + \|y\| - \|x + y\|) \end{aligned}$$

である.

これより直ちに, 我々は次の Dunkle-Williams タイプの不等式を得る.

系 2.8 ([11], Theorem 2.1) ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の元 x, y, z $(\|x\| \geq \|y\| \geq \|z\| > 0)$ に対して,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|z\|}\|x + y + z\| - \left\{\left(\frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|x\|}\right)\|x\| + \left(\frac{1}{\|z\|} - \frac{1}{\|y\|}\right)\|x + y\|\right\} \\ &\leq \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\| \end{aligned}$$

3 個の元に対しては定理 2.7 のとおり, 我々の不等式は加藤-斎藤-田村および三谷-斎藤-加藤-田村の不等式の精密化であるが, 4 個以上の元のときは, 加藤-斎藤-田村の不等式の精密化ではあるが, 三谷-斎藤-加藤-田村の不等式との関係は未だわかっていない. 更に, 系 2.8 は定理 1.2 の精密化にもなっていることを注意する.

最後に, n 個の元について考える. 基本的なアイデアは定理 2.7 および系 2.8 と同じであるが, 多くの準備を要するため結果のみを紹介する. 詳細は [11] を参照して頂きたい.

定理 2.9 $n \geq 2$ とする. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ の 0 でない任意の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して,

以下の不等式が成立する.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\min\limits_{1\le j\le n}\|x_j\|}\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\| - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\|x_{k+1}^*\|}-\frac{1}{\|x_k^*\|}\right)\left\|\sum_{j=1}^{k}x_j^*\right\| \\
&\le \left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| \\
&\le \frac{1}{\max\limits_{1\le j\le n}\|x_j\|}\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j\right\| + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\|x_k^*\|}-\frac{1}{\|x_{k-1}^*\|}\right)\left\|\sum_{j=k}^{n}x_j^*\right\|,
\end{aligned}
$$

ここで $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の $\|x_1^*\| \ge \|x_2^*\| \ge \cdots \ge \|x_n^*\|$ を満たす並べ替えである.

参考文献

[1] C. F. Dunkl and K. S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly, **71** (1964), 53–54.

[2] H. Hudzik and T. R. Landes, *Characteristic of convexity of Köthe function spaces,* Math. Ann. **294** (1992), 117–124.

[3] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces*, Math. Inequal. Appl., **10** (2007), 451–460.

[4] W. A. Kirk and M. F. Smiley, *Another characterization of inner product*, Amer. Math. Monthly, **71** (1964),890-891.

[5] L. Maligranda, *Simple norm inequalities,* Amer. Math. Monthly, **113** (2006), 256–260.

[6] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis I,* Ann. of Math. **67** (1958), 517–573.

[7] P. R. Mercer, *The Dunkl-Williams inequality in an inner product space*, Math. Inequal. Appl., **10** (2007), 447–450.

[8] K. Mineno, Y. Nakamura and T. Ohwada, *Characterization of the intermediate values of the triangle inequality,* Math. Inequal. Appl., **15** (2012), 1019–1035.

[9] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, M. Kato and T. Tamura, *On sharp triangle inequalities in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **336** (2007), no. 2, 1178–1186.

[10] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, *On sharp triangle inequalities in Banach spaces II,* J. Inequal. Appl. 2010, Art. ID 323609, 17 pp.

[11] K.-I. Mitani, N. Tabiraki and T. Ohwada, *Noteon Dunkle-Williams inequality with n elements,* Nihonkai Math. J., **27** (2016), 125–133.

[12] J. Pečarić and R. Rajić, *The Dunkl-Williams inequality with n elements in normed linear spaces,* Math. Inequal. Appl., **10** (2007), 461–470.

[13] H. Sano, T. Izumida, K.-I. Mitani, T. Ohwada and K.-S. Saito, *Characterization of intermediate values of the triangle inequality II,* Cent. Eur. J. Math., **12** (2014), no. 5, 778–786.

[14] H. Sano, K. Mineno, Y. Hirota, S. Izawa, C. Tamiya and T. Ohwada, *Characterization of the intermediate values of the triangle inequality III,* J. Nonlinear and Convex Analysis, **17**(2016), no.2, 297–310.