数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 65-71

Some results on James type constant of a Banach space

岡山県立大学 名誉教授　高橋泰嗣
九州工業大学 名誉教授　加藤幹雄
岡山県立大学 情報工学部　三谷健一

1. Introduction

バナッハ空間の幾何学的性質に関する研究の起源をたどれば, Jordan-von Neumann [12] による内積空間の特徴づけ, 及び, Clarkson [5] による一様凸性の概念にまで遡る. L_p 空間の一様凸性がClarkson不等式を用いて証明されたように,空間の幾何学的性質の多くはノルム不等式を用いて記述される. 他方,バナッハ空間 X の幾何学的性質の度合いを記述する際, von Neumann-Jordan 定数 $C_{NJ}(X)$ や James 定数 $J(X)$ を用いる方法がある. $C_{NJ}(X)=1$ は内積空間を特徴づけ ([12]), $J(X)<2$ は uniform non-squareness を特徴づける ([9]). その後,様々な幾何学的定数が導入され,それらの定数を用いた幾何学的性質の特徴づけ,あるいは定数間の関係などが考察されてきた (cf. [1, 2, 3, 8, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 26, 30]).

本研究では, James定数の一般化であるJames型定数 $J_t(X)$ を考察する. $J_t(X)$ は Takahashi [16] により導入され, 2010年頃からC.Yangを中心に精力的に研究されている (cf. [19, 23, 24, 27, 28, 29]). 具体的な空間で $J_t(X)$ の値が求められてはいるが,ここでは極めて簡単な計算方法を紹介する. また, $J_t(X)$ と $J(X)$ との関係などについても詳細に考察する. これにより,これまで個別に議論された一連の幾何学的定数を統一的に扱うことが可能となる. 既知の結果の理解が深まると共に,更なる一般化が期待できる.

以下, X を2次元以上の実バナッハ空間とし,その閉単位球を B_X, 単位球面を S_X で表す. James 定数 $J(X)$, von Neumann-Jordan 定数 $C_{NJ}(X)$, James 型定数 $J_t(X)$ $(-\infty\le t<\infty)$ は次のように定義される.

$$J(X) = \sup\{\min(\|x+y\|, \|x-y\|):\ x,y\in S_X\}, \tag{1}$$

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}:\ x\in S_X, y\in B_X\right\}, \tag{2}$$

$$J_t(X)=\sup\left\{\left(\frac{\|x+y\|^t+\|x-y\|^t}{2}\right)^{1/t}:\ x,y\in S_X\right\}. \tag{3}$$

ただし, $J_0(X)=\sup\{\sqrt{\|x+y\|\|x-y\|}:\ x,y\in S_X\}$, $J_{-\infty}(X)=J(X)$.

2. Fundamental properties of the constant $J_t(X)$

バナッハ空間 X の James 型定数 $J_t(X)$ に関する基本的な結果を紹介する (cf. [16, 29]).

(i) $\sqrt{2} \leq J_t(X) \leq 2$ if $t \leq 2$, and $2^{1-1/t} \leq J_t(X) \leq 2$ if $t \geq 2$.

(ii) $J_t(X)$ is non-decreasing in $t \in (-\infty, \infty)$.

(iii) There exists a Banach space X such that $J_t(X)$ is strictly increasing in $t \in (-\infty, \infty)$.

$J(X) < 2$ のとき, X は uniformly non-square と言う.

(iv) X: uniformly non-square $\iff$ $J_t(X) < 2$ for all (some) $t \in (-\infty, \infty)$.

(v) X: uniformly non-square $\iff$ $J(X) < J_t(X)$ for some $t \in (-\infty, \infty)$.

(vi) For each $t \in (-\infty, \infty)$, there exists a uniformly non-square Banach space X such that $J_t(X) = J(X)$.

(vii) X: Hilbert space $\Rightarrow$ $J_t(X) = 2^{1-1/r}$, where $r = \max(2, t)$.

(viii) X: Hilbert space $\iff$ $J_2(X) = \sqrt{2}$.

次の結果は, 一様凸空間 X の $J_t(X)$ を計算する際用いられる (Examples 参照).

(ix) If $J_s(X) = 2^{1-1/s}$ for some $s \geq 2$, then $J_t(X) = 2^{1-1/t}$ for all $t \geq s$.

3. The constant $J_t(X)$ and modulus of convexity

バナッハ空間 X の modulus of convexity $\delta_X(\varepsilon)$, characteristic of convexity $\varepsilon_0(X)$ は次のように定義される : For $0 \leq \varepsilon \leq 2$

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \ x, y \in S_X, \|x-y\| = \varepsilon\right\},$$

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \in [0,2] : \ \delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

$\varepsilon_0(X) = 0$ のとき, X は uniformly convex と言う. また, $\varepsilon_0(X) < 2$ のとき, X は uniformly non-square と言う.

$J_t(X)$ の計算には modulus of convexity $\delta_X(\epsilon)$ を用いる方法がある (cf.[23, 29]):

$$J_t(X) = \sup\left\{\left(\frac{\varepsilon^t + 2^t(1-\delta_X(\varepsilon))^t}{2}\right)^{1/t} : \ \varepsilon \in [0,2]\right\}. \tag{4}$$

ただし, $J_0(X) = \sup\left\{\sqrt{2\varepsilon(1-\delta_X(\varepsilon))} : \ \varepsilon \in [0,2]\right\} \geq \sqrt{2\varepsilon_0(X)}$ (cf.[1]).

$$J(X) = J_{-\infty}(X) = \sup\{\min(\varepsilon, \ 2(1-\delta_X(\varepsilon))) : \ \varepsilon \in [0,2]\} \geq \varepsilon_0(X).$$

James 定数 $J = J(X)$ は, 方程式 $2(1-\delta_X(\varepsilon)) = \varepsilon$ の解として求められる．つまり, $2(1-\delta_X(J)) = J$ (cf.[4]).

一般に, $\delta_X(\varepsilon)$ を求めるのは容易ではないが, $\varepsilon_0(X)$ は比較的簡単に分かる.

(4) 式に $\varepsilon = \varepsilon_0(X)$ を代入して

$$J_t(X) \geq \left(\frac{\varepsilon_0(X)^t + 2^t}{2}\right)^{1/t} = 2^{1-1/t}\left[1 + (\varepsilon_0(X)/2)^t\right]^{1/t}.$$

Theorem 1. Let $-\infty < s < \infty$. Then for any Banach space X

$$J_s(X) \geq 2^{1-1/s}\left[1 + (\varepsilon_0(X)/2)^s\right]^{1/s}. \tag{5}$$

Moreover, if equality holds in the above inequality, then

$$J_t(X) = 2^{1-1/t}\left[1 + (\varepsilon_0(X)/2)^t\right]^{1/t} \tag{6}$$

for all $t \geq s$.

この定理の重要なところは後半部分にある．X が uniformly non-square でないとき, すなわち, $\varepsilon_0(X) = 2$ のときは自明である．また, X が一様凸, すなわち, $\varepsilon_0(X) = 0$ のときは (ix) が成り立つことを意味する．なお, この定理は $s = -\infty$ のときも成立する．この場合, 不等式 (5) は $J(X) = J_{-\infty}(X) \geq \varepsilon_0(X)$ であり, $\varepsilon_0(X) = 2$ のときに限り等号が成立する.

具体的な空間 X に対し, それまでに知られた結果を用いて $J_t(X)$ の値が簡単に求まることがある．そのためには, これまでに導入された幾何学的定数と $J_t(X)$ との関係を確認しておく必要がある.

$$J_{-\infty}(X) = J(X)$$

は当然であるが,

$$J_0(X) = T(X) = \sqrt{2C'_Z(X)}\ ([1,\ 16]),\ J_1(X) = A_2(X)\ ([3]),$$

$$J_2(X) = \sqrt{E(X)/2} = \sqrt{2C'_{NJ}(X)} \leq \sqrt{2C_{NJ}(X)}\ ([2,\ 8,\ 16])$$

などがある．以下に, 既知の結果と定理 1 を用いて $J_t(X)$ が簡単に求められる例を紹介しよう.

$X = L_p$ のとき, $C_{NJ}(X)$ は Clarkson 不等式を用いて計算される ([5, 6]). $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $u = \min(p, p')$ とするとき $C_{NJ}(X) = 2^{2/u-1}$ である．同様

の方法で $J_t(X) = 2^{1/u}$ $(t \leq u')$ が示される．$J_{u'}(X) = 2^{1-1/u'}$ が成り立つことから，$t > u'$ のときは (ix) を用いて $J_t(X) = 2^{1-1/t}$ が得られる．

$X = (L_p(L_q))$ の場合も，$u = \min(p, p', q, q')$ とするとき Takahashi-Kato [17] の結果を用いて，$J_t(X) = 2^{1/u}$ $(t \leq u')$ が示される．したがって $t > u'$ のときは $J_t(X) = 2^{1-1/t}$ となる．これらは次のようにまとめられる．

Example 1. Let $r = \max(p, p', t)$. Then

$$J_t(L_p) = 2^{1-1/r}.$$

Example 2. Let $r = \max(p, p', q, q', t)$. Then

$$J_t(L_p(L_q)) = 2^{1-1/r}.$$

この例は部分空間を考えることにより, Sobolev, Besov, Triebel-Sobolev などの重要な関数空間に適用できる (cf.[17]).

同様の方法で, 次の例も示される．

Example 3. Let $X = L_{p_n}(L_{p_{n-1}}(...(L_{p_1}))$. Then

$$J_t(X) = 2^{1-1/r},$$

where $r = \max(p_1, p_1', p_2, p_2', ..., p_n, p_n', t)$.

これらの例は一様凸空間であることから, (ix) を用いた．次に, 一様凸でない例を紹介する．

Example 4. For $2 \leq p < \infty$ and $1 \leq \lambda \leq 2^{1/p}$ let $X_{\lambda,p}$ be the space ℓ_p with the norm

$$\|x\|_{\lambda,p} = \max\{\|x\|_p,\ \lambda\|x\|_\infty\}.$$

Then, $J_t(X_{\lambda,p}) = \lambda 2^{1-1/p}$ if $t \leq p$, and $J_t(X_{\lambda,p}) = 2^{1-1/t}\left[1 + (\lambda^p - 1)^{t/p}\right]^{1/t}$ if $t \geq p$.

前半部分, すなわち, $t \leq p$ のときは Kato-Maligranda-Takahashi [13] と全く同様の方法で $J_t(X_{\lambda,p}) = \lambda 2^{1-1/p}$ が示される．問題は後半部分である．C.Yang-Y.Wang [29] は, まず, modulus of convexity を求め, それを用いて $J_t(X_{\lambda,p})$ を計算した．既に述べたように, modulus of convexity を求めること自体が容易でない．ここでは容易に分かる $\varepsilon_0(X_{\lambda,p})$ を用いた極めて簡単な計算を紹介する．

$\varepsilon_0(X_{\lambda,p}) \geq 2(\lambda^p - 1)^{1/p}$ が容易に分かるので, 前半部分の結果から

$$J_p(X_{\lambda,p}) = \lambda 2^{1-1/p} \leq 2^{1-1/p}\left[1 + (\varepsilon_0(X_{\lambda,p})/2)^p\right]^{1/p}$$

となる．定理 1 の前半部分から，等式が成り立つことが分かる．特に，$\varepsilon_0(X_{\lambda,p}) = 2(\lambda^p - 1)^{1/p}$．よって $t \geq p$ のときは定理 1 の後半部分を用いて

$$J_t(X_{\lambda,p}) = 2^{1-1/t}\left[1 + (\varepsilon_0(X_{\lambda,p})/2)^t\right]^{1/t} = 2^{1-1/t}\left[1 + (\lambda^p - 1)^{t/p}\right]^{1/t}.$$

Example 5. Let $X = \mathbb{R}^2$ with the norm defined by

$$\|x\| = \max\{|x_1| + (\sqrt{2}-1)|x_2|,\ |x_2| + (\sqrt{2}-1)|x_1|\} \quad \text{for } x = (x_1, x_2).$$

Then, $J_t(X) = \sqrt{2}$ if $t \leq 1$, and $J_t(X) = 2^{1-1/t}\left[1 + (\sqrt{2}-1)^t\right]^{1/t}$ if $t \geq 1$.

この 2 次元空間 X の単位球面 S_X は正八角形で，$J(X) = \sqrt{2}$ であることはよく知られている．$t \leq 1$ のとき，$J_t(X) = \sqrt{2}$ もよく知られている (cf. [16])．また，明らかに $\varepsilon_0(X) = 2(\sqrt{2}-1)$ だから，$J_1(X) = \sqrt{2} = 1 + \varepsilon_0(X)/2$. よって $t \geq 1$ のとき，定理 1 により

$$J_t(X) = 2^{1-1/t}\left[1 + (\varepsilon_0(X)/2)^t\right]^{1/t} = 2^{1-1/t}\left[1 + (\sqrt{2}-1)^t\right]^{1/t}.$$

これらの例に見られるように，既知の幾何学的定数の値と定理 1 を用いることにより，未知の $J_t(X)$ の値が簡単に求められることが分かった．これ以外にも定理 1 を適用して $J_t(X)$ の値が容易に求められるようなバナッハ空間 X の例として，Day-James 空間 ℓ_2-ℓ_1, ℓ_∞-ℓ_1 などがある．

4. Relations between $J_t(X)$ and $J(X)$

$-\infty < t < \infty$ とする．$J(X) \leq J_t(X)$ であるから，$J_t(X)$ を $J(X)$ で上から評価することが問題となる．$J_1(X)$ と $J(X)$ の関係として

$$J_1(X) \leq 1 + 2(1 - 1/J(X)) \tag{7}$$

が知られている ([18, 21])．この不等式は $C_{NJ}(X) \leq J(X)$ の証明で重要な役割を果たす．同様にして，

$$J_0(X) \leq 2\sqrt{2(1 - 1/J(X))} \tag{8}$$

が示される．この結果の一般化として $0 < t < \infty$ に対し

$$J_t(X) \leq 2^{1-1/t}\left[1 + 2^t(1 - 1/J(X))^t\right]^{1/t} \tag{9}$$

が示された ([19, 23])．(9) で $t = 1$ の場合が (7) である．ここでは $J_t(X)$ を $J_0(X)$ で評価することにより，不等式 (9) の別証明を与えると共に，等号成立条件を考察する．

Theorem 2. Let $0 < t < \infty$. Then for any Banach space X

$$J_t(X) \le 2^{1-1/t}\left[1 + (J_0(X)/2)^{2t}\right]^{1/t},$$

where equality holds only when $J_0(X) = \sqrt{2\varepsilon_0(X)}$.

この定理と (8) から,不等式 (9) が導かれる. (9) で等号が成立するための必要十分条件は, $J_0(X) = \sqrt{2\varepsilon_0(X)}$, かつ, (8) で等号が成立することである. X が uniformly non-square でないときは, 明らかに (9) で等号が成立するのであるが, uniformly non-square で等号が成立するような X が存在するか否かは分かっていない. なお, $J_0(X) = \sqrt{2\varepsilon_0(X)}$ が成り立つような X の例としては, Day-James 空間 ℓ_2-ℓ_1 がある (cf. [16]).

References

[1] J. Alonso and E. Llorens-Fuster, Geometric mean and triangles inscribed in a semicircle in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), 1271-1283.

[2] J. Alonso, P. Martin and P. L. Papini, Wheeling around von Neumann-Jordan constant in Banach spaces, Studia Math. **188** (2008), 135-150.

[3] M. Baronti, E. Casini and P. L. Papini, Triangles inscribed in a semicircle, in Minkowski planes, J. Math. Anal. Appl. **252** (2000), 124-146.

[4] E. Casini, About some parameters of normed linear spaces, Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **80** (1986), 11-15.

[5] J. A. Clarkson, Uniformly convex space, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 396-414.

[6] J. A. Clarkson, The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue-Bochner space, Ann. of Math. **38** (1937), 114-115.

[7] S. Dhompongsa, P. Piraisangjun and S. Saejung, Generalized Jordan-von Neumann constants and uniform normal structure, Bull. Austral. Math. Soc. **67** (2003), 225-240.

[8] J. Gao, A Pythagorean approach in Banach spaces, J. Inequal. Appl. **2006**: Article ID 94982 (2006), 1-11.

[9] J. Gao and K. S. Lau, On two classes of Banach spaces with uniform normal structure, Studia Math. **99** (1991), 41-56.

[10] K. Goebel and W. A. Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, 1990.

[11] R. C. James, Uniformly non-square Banach spaces, Ann. of Math. **80** (1964), 542-550.

[12] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, Ann. of Math. **36** (1935), 719-723.

[13] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, On James, Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficients of Banach spaces, Studia Math. **144** (2001), 275-295.

[14] M. Kato and Y. Takahashi, On sharp estimates concerning von Neumann-Jordan and James constants for a Banach space, Rend. Circ. Mat. Palermo Serie II, Suppl. **82** (2010), 75-91.

[15] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and Y. Takahashi, On the von Neumann-Jordan constant of generalized Banaś-Frączek spaces, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016), 311-316.

[16] Y. Takahashi, Some geometric constants of Banach spaces – A unified approach, In: Banach and Function Spaces II, eds. M. Kato and L. Maligranda, Yokohama Publishers, Yokohama, pp. 191-220, 2007.

[17] Y. Takahashi and M. Kato, Clarkson and random Clarkson inequalities for $L_r(X)$, Math. Nachr. **188** (1997), 341-348.

[18] Y. Takahashi and M. Kato, A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach space, J. Math. Anal. Appl. **359** (2009), 602-609.

[19] Y. Takahashi and M. Kato, James type constant of a Banach space, 実解析学シンポジウム 2010, pp. 71-74, 2010.

[20] Y. Takahashi and M. Kato, On a new geometric constant related to the modulus of smoothness of a Banach space, Acta Math. Sinica **30** (2014), 1526-1538.

[21] F. Wang, On the James and von Neumann-Jordan constants in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 695-701.

[22] F. Wang and B. Pang, Some inequalities concerning the James constant in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. **353** (2009), 305-310.

[23] F. Wang and C. Yang, An inequality between the James and James type constants in Banach spaces, Studia Math. **201** (2010), 191-201.

[24] C. Yang, An inequality between James type constant and the modulus of smoothness, J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), 622-629.

[25] C. Yang, Jordan-von Neumann constant for Banaś-Frączek space, Banach J. Math. Anal. **8** (2014), 185-192.

[26] C. Yang and H. Li, An inequality between Jordan-von Neumann constant and James constant, Appl. Math. Lett. **23** (2010), 277-281.

[27] C. Yang and H. Li, On the James type constant of $\ell_p - \ell_1$, J. Inequal. Appl. **2015**: Article ID 79 (2015).

[28] C. Yang and H. Wang, Two estimates for James type constant, Ann. Funct. Anal. **6** (2015), 139-147.

[29] C. Yang and Y. Wang, Some properties of James type constant, Appl. Math. Lett. **25** (2012), 538-544.

[30] G. Zbăganu, An inequality of M. Rădulescu and S. Rădulescu which characterizes the inner product spaces, Rev. Roumaine Math. Pure Appl. **47** (2002), 253-257.