数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 100-104



# Estimates for integral equations with real interpolation technique

信州大学 理学部 数学科 筒井 容平
Department of Mathematical Sciences, Shinshu University Yohei Tsutsui

## 1 Introduction

全空間での熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \\ u(0) = a \end{cases}$$

の解は、形式的には次の積分方程式を満たす;

$$u(t) = e^{t\Delta}a + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau) d\tau,$$

where $e^{t\Delta}g(x) := g * G_{\sqrt{t}}(x),\ G_{\sqrt{t}}(x) := t^{-n/2}G(x/\sqrt{t})$ and $G$ is the Gaussian. 右辺の 2 項目の評価に関して次のような critical なものが知られている.

**Theorem 1.1** ([9], [13]). *Let $n \geq 3$.*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau) d\tau \right\|_{L^{n,\infty}} \lesssim \sup_{\tau<t} \|f(\tau)\|_{L^{n/2,\infty}}.$$

Critical という意味は,

$$\|e^{(t-\tau)\Delta} f(\tau)\|_{L^{n,\infty}} \lesssim (t-\tau)^{-1} \|f(\tau)\|_{L^{n/2,\infty}} \notin L^1((0,t))$$

に由来する. つまり, 絶対収束はせず, 条件収束していると理解できる. また, $f$ が時間に独立である場合,

$$\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} f d\tau = e^{t\Delta}\Delta^{-1}f - \Delta^{-1}f$$

と (形式的には) なることから、左辺は 2 階積分の作用素と理解できる.

## 2 Results

上の定理は, 次のように拡張できる.

**Theorem 2.1.** *(i) Let $n \geq 3,\ p \in (1, n/2)$ and $1/q = 1/p - 2/n$, (i.e. $n/(n-2) \leq p < \infty$). この時,*

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)\Delta} g(\tau) d\tau \right\|_{L^{q,\infty}} \lesssim \sup_{-\infty<\tau<t} \|g(\tau)\|_{L^{p,\infty}}.$$

*(ii) ([12]) $p \in [1,\infty]$ と $s \in \mathbb{R}$ に対して,*

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)\Delta} g(\tau) d\tau \right\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} \lesssim \sup_{-\infty<\tau<t} \|g(\tau)\|_{\dot{B}^{s-2}_{p,\infty}}.$$

この評価を 非圧縮 Navier-Stokes 方程式の時間周期問題について応用することを考える。

$$(N.S.)\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = f \\ \mathrm{div}\ u = 0, \end{cases}$$

ここで, $f = f(t,x)$ は時間周期 $\omega > 0$ を持つ与えられた外力とする. つまり, $f(t+\omega, x) = f(t,x)$ for all $t > 0$. $u = (u_j)_{j=1}^n$ と $\pi$ は, それぞれ 流体の速度ベクトルと圧力を表す未知函数である. 第一式は運動量保存則, 第二式は質量保存則である. 第二式 と Gauss の発散定理から

$$0 = \int_\Omega \mathrm{div}\ u dx = \int_{\partial\Omega} u\cdot n\, d\sigma,$$

ここで, $n$ は 領域 $\Omega$ の外向き単位法線ベクトル. これは, 流体が非圧縮であることを表している. $\mathrm{div}\ u := \sum_{j=1}^n \partial_j u_j = 0$ であるとき, 次の等式が成立することに注意する:

$$(u\cdot\nabla)v := \left(\sum_{j=1}^n u_j\partial_j v_k\right)_{1\le k\le n} = \nabla\cdot(u\otimes v),$$

ここで, $u\otimes v := (u_j v_k)_{1\le j,k\le n}$.

Helmholtz projection $\mathbb{P} := (\delta_{i,j} - R_iR_j)_{1\le i,j\le n}$, ($R_i := (-\Delta)^{-1/2}\partial_i$ : Riesz 変換) は, 次のような性質を持つ;

$$(*)\begin{cases} \mathrm{div}\ u = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(u) = u \\ \mathbb{P}(\nabla\pi) = 0. \end{cases}$$

これからは, Fourier 変換を通すと確認できる. この projection を (N.S.) の第一式の両辺に作用させ, $(*)$ を用いて, $\mathbb{P}$ と 微分作用素との交換を認めると;

$$\partial_t u - \Delta u + \mathbb{P}\nabla(u\otimes u) = \mathbb{P}f$$

となる. この方程式の積分方程式への変換は, Kozono-Nakao [7] により次のように与えられている;

$$(I)\ u(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}f(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^t e^{(t-\tau)\Delta}\mathbb{P}\nabla(u\otimes u)(\tau)d\tau.$$

Theorem 2.1 を使うことにより, 次のような解の存在が得られる.

**Theorem 2.2.** *([10])* $n \ge 3$ とし, $f \in BC(\mathbb{R}; L^{n/3,\infty})$ が時間周期 $\omega > 0$ を持ち,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_{L^{n/3,\infty}} \ll 1$$

であれば, *(I)* の解で時間周期 $\omega$ を持つ $u \in BC(\mathbb{R}; L^{n,\infty})$ が存在し, $\nabla u \in BC(\mathbb{R}; L^{n/2,\infty})$. さらに, もし $f \in BC(\mathbb{R}; L^{p,\infty})$ *with* $p \in (n/3, \infty)$ であれば,

- $u \in BC(\mathbb{R}; L^{r_1,\infty})$ for $r_1 = np/(n-2p)$ if $p < n/2$ or any $r_1 < \infty$ if $p \ge n/2$
- $\nabla u \in BC(\mathbb{R}; L^{r_2,\infty})$ for $r_2 = np/(n-p)$ if $p < n$ or any $r_2 < \infty$ if $p \ge n$.

**Remark 2.1.** $n = 3$ の場合も同様な結果が、$L^{n/3,\infty}$ を $L^1$ に変えると得られる. 前半の結果は, *[13]* のものに含まれているが, 後半の解の性質は、新たなものとなっている.

# 3 Proof of the critical estimate

ここで, Theorem 2.1 の (ii) の証明を与える.

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ with supp $\varphi \subset \{1/2 \le |\xi| \le 2\}$ かつ $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = 1$ for $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ を固定し, $\varphi_j(D)f := \mathcal{F}^{-1}\left[\varphi\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)\hat{f}\right] \in \mathcal{S}'$ for $f \in \mathcal{S}'$ と定める. [2] and [1] を参照して, $\mathcal{S}'$ の部分空間 $\mathcal{S}'_h$ を導入する:

$$f \in \mathcal{S}'_h \iff \psi(\lambda D)f := \mathcal{F}^{-1}\left[\psi(\lambda\cdot)\hat{f}\right] \to 0 \text{ in } L^\infty \text{ as } \lambda \to \infty,$$

for all $\psi \in \mathcal{S}$. これを用いて, Besov 空間を定義する. $p \in [1, \infty)$ と $s < n/p$ に対して, Besov 空間 $\dot{B}^s_{p,\infty}$ を 次で定める:

$$\dot{B}^s_{p,\infty} := \left\{ f \in \mathcal{S}'_h ; \|f\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} := \left\| \left\{ 2^{js} \|\varphi_j(D)f\|_{L^p} \right\}_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q} < \infty \right\}.$$

この定義においては, この指数の範囲では Banach 空間となる.

証明には, 実補間による特徴付けを用いる:

$$\dot{B}^s_{p,\infty} = (\dot{B}^{s_0}_{p,\infty}, \dot{B}^{s_1}_{p,\infty})_{\theta,\infty},$$

ここで, $\theta \in (0,1)$ かつ $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. 後者は, 次のような norm を持つ Banach 空間である:

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^{-\theta} K(\lambda, f; \dot{B}^{s_0}_{p,\infty}, \dot{B}^{s_1}_{p,\infty}).$$

$K-$functional は

$$K(\lambda, f; \dot{B}^{s_0}_{p,\infty}, \dot{B}^{s_1}_{p,\infty}) := \inf_{\substack{f=f_0+f_1 \\ f_0\in\dot{B}^{s_0}_{p,\infty},\ f_1\in\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}}} \left( \|f_0\|_{\dot{B}^{s_0}_{p,\infty}} + \lambda \|f_1\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}} \right).$$

これを用いて証明を与える. まず、 変数変換して, 次のように書き直す.

$$\int_{-\infty}^{t} e^{(t-\tau)\Delta} g(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau,$$

ここで, $\tilde{g}(\tau) := g(t-\tau)$.

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau \right\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} &\approx \left\| \int_0^\infty e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau \right\|_{(\dot{B}^{s_0}_{p,\infty}, \dot{B}^{s_1}_{p,\infty})_{1/2,\infty}} \\ &\lesssim \sup_{\lambda>0} \lambda^{-1/2} \left( \|I\|_{\dot{B}^{s_0}_{p,\infty}} + \lambda \|II\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}} \right), \end{aligned}$$

ここで, $2s = s_0 + s_1$ であり,

$$I := \int_0^{\lambda_*} e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau \ \& \ II := \int_{\lambda_*}^\infty e^{\tau\Delta} \tilde{g}(\tau) d\tau.$$

$\lambda_* > 0$ は, 後で決める $\lambda$ に依存する数. Kozono-Ogawa-Taniuchi [8] による Besov 空間における熱核の平滑化効果から, それぞれ次のように評価される.

$$\|I\|_{\dot{B}^{s_0}_{p,\infty}} \lesssim \lambda_*^{1/4} \sup_{\tau>0} \|\tilde{g}(\tau)\|_{\dot{B}^{s-2}_{p,\infty}} \ \& \ \|II\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}} \lesssim \lambda_*^{-1/4} \sup_{\tau>0} \|\tilde{g}(\tau)\|_{\dot{B}^{s-2}_{p,\infty}}.$$

故に,

$$\left\|\int_0^\infty e^{\tau\Delta}\tilde{g}(\tau)d\tau\right\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} \lesssim \sup_{\lambda>0} \lambda^{-1/2}(\lambda_*^{1/4} + \lambda\lambda_*^{-1/4}) \sup_{\tau<t} \|g(\tau)\|_{\dot{B}^{s-2}_{p,\infty}}.$$

最後に, $\lambda_* > 0$ を最良なものをとることにより, 証明が完了する.

(i) の証明も同様にできる. (ii) は, 滑らかさに関する critical は評価であるが, 重みに関する同様なものも可能である [11]. 他にも、いくつかの函数空間で示されている, [3], [4], [5], [6].

# References


[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin and R. Danchin, *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **343**, Springer, Heidelberg, 2011.

[2] G. Bourdaud, *Realizations of homogeneous Besov and Lizorkin-Triebel spaces*, Math. Nachr. **286** (2013), no. 5-6, 476–491.

[3] M. Cannone and G. Karch, *Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system ?*, J. Differential Equations **197** (2004), no. 2, 247–274.

[4] L.C.F. Ferreira, *On a bilinear estimate in weak-Morrey spaces and uniqueness for Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **105** (2016), no. 2, 228–247.

[5] Y. Le Jan and A.S. Sznitman, *Stochastic cascades and 3-dimensional Navier-Stokes equations*, Probab. Theory Related Fields **109** (1997), no. 3, 343–366.

[6] P. Konieczny and T. Yoneda, *On dispersive effect of the Coriolis force for the stationary Navier-Stokes equations*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 10, 3859–3873.

[7] H. Kozono and M. Nakao, *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Tohoku Math. J. (2), **48** (1996), 33-50.

[8] H. Kozono, T. Ogawa and Y. Taniuchi, *Navier-Stokes equations in the Besov space near $L^\infty$ and BMO*, Kyushu J. Math., **57** (2003), 303-324.

[9] Y. Meyer, *Wavelet, Paraproduct and Navier-Stokes Equations*, Current developments in mathematics. International Press, (1996), 105-212.

[10] T. Okabe and Y. Tsutsui, *Time periodic strong solutions to the incompressible Navier-Stokes equations with external force of non-divergence form*, submitted.

[11] Y. Tsutsui, *The Navier-Stokes equations and weak Herz spaces*, Adv. Differential Equations **16** (2011), no. 11-12, 1049–1085.

[12] Y. Sugiyama, Y. Tsutsui and J.L.L. Velázquez, *Global solutions to a chemotaxis system with non-diffusive memory*, J. Math. Anal. Appl. **410** (2014), no. 2, 908-917.

[13] M. Yamazaki, *The Navier-Stokes equations in the weak-$L^n$ space with time-dependent external force*, Math. Ann. **317** (2000), no. 4, 635–675.