数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 175-183

トレース不等式から見た不確定性関係

柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)

城西大学理学部 (Faculty of Science, Josai University)

1 Introduction

Heisenberg や Schrödinger の不確定性関係は非可換な物理量を観測する際に同時に正確に観測することはできないということを説明する関係式としてよく知られている．分散より小さい量として skew information が導入され, それを用いた不確定性関係が Heisenberg より精密な不確定性関係として得られた．ρ を物理状態を表す密度作用素 (有限次元の時は密度行列), A を物理量とすると, Wigner-Yanase skew information は次のように [12] で定義される．

$$I_{\rho}(A)=\frac{1}{2}Tr\left[\left(i\left[\rho^{1/2},A\right]\right)^{2}\right]=Tr[\rho A^{2}]-Tr[\rho^{1/2}A\rho^{1/2}A],$$

ただし $[X,Y]=XY-YX$ は commutator である．これは ρ と A の非可換性を表す量であると考えられる．さらに Dyson によって次のように one parameter 拡張がなされた．

$$I_{\rho,\alpha}(A)=\frac{1}{2}Tr[(i[\rho^{\alpha},A])(i[\rho^{1-\alpha},A])]=Tr[\rho A^{2}]-Tr[\rho^{\alpha}A\rho^{1-\alpha}A],\alpha\in[0,1].$$

この量は Wigner-Yanase-Dyson skew information といわれている．その後 [4] によってこれらの skew information は quantum Fisher information の特別な場合であることが示された．すべての quantum Fisher information の族は operator monotone function のある種のクラスで表現される．一方 Wigner-Yanase skew information に関連した不確定性関係とそれを拡張した Wigner-Yanase-Dyson skew information に関連した不確定性関係はそれぞれ Luo [8] と Yanagi [14] によって与えられた．さらに generalized metric adjusted skew information に関連した不確定性関係は [16, 2, 18] によってより一般化された．また物理量が必ずしもエルミート性をもたない場合の不確定性関係にも拡張された．この論文では密度作用素のトレースの条件を外した一般の正作用素にしたときに対応する不確定性関係を示すことによって量子力学でよく知られた忠実度とトレース距離に関連した不等式とは別の不等式が得られることに言及する．

2 Metric Adjusted Skew Information

$M_n(\mathbb{C})$ を $n\times n$ complex matrices 全体, $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を $n\times n$ self-adjoint matrices 全体とする．Hilbert-Schmidt 内積 を $\langle A,B\rangle = Tr[A^*B]$ とする．$M_{n,+}(\mathbb{C})$ を $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ の positive definite matrices 全体，$M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を 密度行列全体とする．すなわち

$$M_{n,+,1}(\mathbb{C}) \equiv \{\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C}) | Tr\rho = 1, \rho > 0\} \subset M_{n,+}(\mathbb{C}).$$

函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ が作用素単調であるとは

$$A,B\in M_{n,+}(\mathbb{C}),\quad 0\le A\le B \Longrightarrow 0\le f(A)\le f(B)$$

を満たすときである． 作用素単調函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ は $f(x)=xf(x^{-1})$ を満たすとき symmetric, $f(1)=1$ を満たすとき normalized と定義される．$\mathcal{F}_{op}$ を symmetric normalized operator monotone functions 全体とする．このとき $\mathcal{F}_{op}$ の典型的な例は次の通りである．

Example 2.1

$$f_{RLD}(x)=\frac{2x}{x+1},\quad f_{SLD}(x)=\frac{x+1}{2},\quad f_{BKM}(x)=\frac{x-1}{\log x},$$

$$f_{WY}(x)=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)^2,\quad f_{WYD}(x)=\alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha-1)(x^{1-\alpha}-1)},\ \alpha\in(0,1).$$

Remark 2.1 (Gibilisco-Isola,[5], Kubo-Ando [7], Petz [9]) 任意の $f\in\mathcal{F}_{op}$ に対して次の関係が成り立つ．

$$\frac{2x}{x+1}\le f(x)\le\frac{x+1}{2},\quad x>0.$$

すなわち $f\in\mathcal{F}_{op}$ は *harmonic mean* と *arithmetic mean* の間にある．

$f\in\mathcal{F}_{op}$ に対して $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$ とおく． このとき regular functions と non-regular functions を次のように定義する．

$$\mathcal{F}_{op}^r=\{f\in\mathcal{F}_{op}|f(0)\neq 0\},\qquad \mathcal{F}_{op}^n=\{f\in\mathcal{F}_{op}|f(0)=0\}.$$

Definition 2.1 (Gibilisco-Imparato-Isola [4] Gibilisco-Isola [5]) $f\in\mathcal{F}_{op}^r$ に対して $\tilde{f}$ を次のように定義する．

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2}\left\{(x+1)-(x-1)^2\frac{f(0)}{f(x)}\right\},\quad x>0.$$

Example 2.2

$$\tilde{f}_{WY}(x) = \sqrt{x}, \quad \tilde{f}_{WYD}(x) = \frac{x^{\alpha} + x^{1-\alpha}}{2}, \quad \tilde{f}_{SLD}(x) = \frac{2x}{x+1},$$

次の結果が成り立つ.

Theorem 2.1 (G-I-I [4], Gibilisco-Hansen-Isola [3], Petz-Szabo [10]) $f \to \tilde{f}$ は $\mathcal{F}_{op}^{r}$ と $\mathcal{F}_{op}^{n}$ の間の 1 対 1 対応である. .

ここで Kubo-Ando [7] によって導入された matrix mean m_f は次のように operator monotone function $f \in \mathcal{F}_{op}$ と対応させることができる.

$$m_f(A, B) = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}, \quad A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$$

matrix mean の概念から次のようにして monotone metrics の集合を定義する.

$$\langle A, B \rangle_{\rho, f} = Tr[A m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1}(B)],$$

ただし $L_\rho(A) = \rho A,\ R_\rho(A) = A\rho$ である.

Definition 2.2 (Hansen [6], Gibilisco-Imparato-Isola [4]) $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C}),\ \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C}),\ f \in \mathcal{F}_{op}^{r}$ に対して次の量を定義する.

$$Corr_\rho^f(A, B) \equiv \frac{f(0)}{2} \langle i[\rho, A], i[\rho, B] \rangle_{\rho, f},\ I_\rho^f(A) \equiv Corr_\rho^f(A, A),$$

$$C_\rho^f(A, B) \equiv Tr[A m_f(L_\rho, R_\rho) B],\ C_\rho^f(A) \equiv C_\rho^f(A, A),$$

$$U_\rho^f(A) \equiv \sqrt{V_\rho(A)^2 - (V_\rho(A) - I_\rho^f(A))^2}.$$

$I_\rho^f(A)$ は *metric adjusted skew information*, $Corr_\rho^f(A, B)$ は *metric adjusted correlation measure* と呼ばれている.

Proposition 2.1 (Gibilisco-Imparato-Isola [4], Gibilisco-Isola [5]) $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C}),\ f \in \mathcal{F}_{op}^{r}$ に対して次の関係式を得る.

(1) $I_\rho^f(A) = Tr[\rho A_0^2] - Tr[A_0 m_{\tilde{f}}(L_\rho, R_\rho) A_0] = V_\rho(A) - C_\rho^{\tilde{f}}(A_0)$.

(2) $J_\rho^f(A) = Tr[\rho A_0^2] + Tr[A_0 m_{\tilde{f}}(L_\rho, R_\rho) A_0] = V_\rho(A) + C_\rho^{\tilde{f}}(A_0)$.

(3) $0 \le I_\rho^f(A) \le U_\rho^f(A) \le V_\rho(A)$.

(4) $U_\rho^f(A) = \sqrt{I_\rho^f(A) J_\rho^f(A)}$.

(5) $Corr_{\rho}^{f}(A,B)=\frac{1}{2}Tr[\rho A_0B_0]+\frac{1}{2}Tr[\rho B_0A_0]-Tr[A_0m_{\tilde{f}}(L_{\rho},R_{\rho})B_0]$
$=\frac{1}{2}Tr[\rho A_0B_0]+\frac{1}{2}Tr[\rho B_0A_0]-C_{\rho}^{\tilde{f}}(A_0,B_0).$

Theorem 2.2 (Yanagi [16], Furuichi-Yanagi [2]) $f\in\mathcal{F}_{op}^{r}$ が

$$\frac{x+1}{2}+\tilde{f}(x)\geq 2f(x)$$

を満たせば次の 2 つの不確定性関係が成り立つ.

$$U_{\rho}^{f}(A)U_{\rho}^{f}(B)\geq f(0)|Tr[\rho[A,B]]|^2,$$

$$U_{\rho}^{f}(A)U_{\rho}^{f}(B)\geq 4f(0)|Corr_{\rho}^{f}(A,B)|^2$$

ただし $A,B\in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ とする. .

ここで

$$f_{WYD}(x)=\alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^{\alpha}-1)(x^{1-\alpha}-1)},\quad \alpha\in(0,1),$$

のときには次の不確定性関係が得られる.

Corollary 2.1 $A,B\in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, $\rho\in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$U_{\rho}^{f_{WYD}}(A)U_{\rho}^{f_{WYD}}(B)\geq\alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A,B]]|^2,$$

$$U_{\rho}^{f_{WYD}}(A)U_{\rho}^{f_{WYD}}(B)\geq 4\alpha(1-\alpha)|Corr_{\rho,\alpha,\frac{1}{2}}(A,B)|^2,$$

ただし

$$Corr_{\rho,\alpha,\frac{1}{2}}(A,B)=\frac{1}{2}Tr[\rho AB]+\frac{1}{2}Tr[\rho BA]-\frac{1}{2}Tr[\rho^{\alpha}A\rho^{1-\alpha}B]-\frac{1}{2}Tr[\rho^{1-\alpha}A\rho^{\alpha}B].$$

3 Generalized metric adjusted skew information

前節の拡張となる不確定性関係が得られる. $g,f\in\mathcal{F}_{op}^{r}$ が次の条件 (A) を満たすとする.

$$g(x)\geq k\frac{(x-1)^2}{f(x)},\ \text{for some } k>0.$$

このとき

$$\Delta_g^f(x)=g(x)-k\frac{(x-1)^2}{f(x)}\in\mathcal{F}_{op}$$

とおく.

Definition 3.1 $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の量を定義する.

$$\begin{aligned} Corr_\rho^{(g,f)}(A,B) &= k\langle i[\rho, A_0], i[\rho, B_0]\rangle_f \\ &= Tr[A_0 m_g(L_\rho, R_\rho)B_0] - Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho)B_0]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\rho^{(g,f)}(A) &= Corr_\rho^{(g,f)}(A,A) \\ &= Tr[A_0 m_g(L_\rho, R_\rho)A_0] - Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho)A_0] - Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho)A_0]. \end{aligned}$$

$$J_\rho^{(g,f)}(A) = Tr[A_0 m_g(L_\rho, R_\rho)A_0] - Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho)A_0] + Tr[A_0 m_{\Delta_g^f}(L_\rho, R_\rho)A_0].$$

$$U_\rho^{(g,f)}(A) = \sqrt{I_\rho^{(g,f)}(A) \cdot J_\rho^{(g,f)}(A)}.$$

Theorem 3.1 条件 *(A)* の下で次が成り立つ.

(1) $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して

$$I_\rho^{(g,f)} \cdot I_\rho^{(g,f)} \geq |Corr_\rho^{(g,f)}(A,B)|^2.$$

(2) $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して次の条件 *(B)* を満たすとする.

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq \ell f(x) \text{ for some } \ell > 0.$$

このとき

$$U_\rho^{(g,f)}(A) \cdot U_\rho^{(g,f)}(B) \geq k\ell |Tr[\rho[A,B]]|^2.$$

4 Generalized quasi-metric adjusted skew information

必ずしもエルミートではない $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ に対する一般化された不確定性関係を考える.

Definition 4.1 $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次の量を定義する.

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) &= k\langle (L_A - R_B)X, (L_A - R_B)Y\rangle_f \\ &= kTr[X^*(L_A - R_B)m_f(L_A, R_B)^{-1}(L_A - R_B)Y] \\ &= Tr[X^* m_g(L_A, R_B)Y] - Tr[X^* m_{\Delta_b^f}(L_A, R_B)Y], \end{aligned}$$

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,X),$$

$$\Psi_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) = Tr[X^* m_g(L_A, R_B)Y] + Tr[X^* m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y],$$
$$J_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Psi_{A,B}^{(g,f)}(X,X),$$
$$U_{A,B}^{(g,f)}(X) = \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot J_{A,B}^{(g,f)}(X)}.$$

Theorem 4.1 条件 *(A)* の下で次が成り立つ.

(1) $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot I_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)|^2 \geq \frac{1}{16}(I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y))^2.$$

(2) $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次の条件 *(B)* を満たすとする.

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq \ell f(x) \text{ for some } \ell > 0.$$

このとき

(a) $U_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq k\ell |Tr[X^*|L_A - R_B|Y]|^2.$

(b) $U_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \frac{f(0)^2\ell}{k}|\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)|^2.$

ここで

$$g(x) = f_{SLD}(x) = \frac{x+1}{2},$$
$$f(x) = f_{WYD}(x) = \alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha} - 1)}, \quad \alpha \in (0,1),$$
$$k = \frac{f(0)}{2}, \ell = 2$$

のときには Theorem 4.1 の (2) (a) より fidelity と trace distance との間の新しい関係式が得られる.

Corollary 4.1 $A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}Tr[A + B - |L_A - R_B|I] \leq \inf_{0 \leq \alpha \leq 1} Tr[A^{1-\alpha}B^\alpha] \leq Tr[A^{1/2}B^{1/2}] \\ \leq \; & \frac{1}{2}Tr[A^\alpha B^{1-\alpha} + A^{1-\alpha}B^\alpha] \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}Tr[A+B]\right)^2 - \alpha(1-\alpha)(Tr[|L_A - R_B|I])^2}. \end{aligned}$$

Remark 4.1 次の *(1), (2)* に注意する.

(1) *Corollary 4.1* は *Powers-Stφrmer [11]* と *Audenaert et al [1]* によって得られた次の結果の別の表現である.

$$\frac{1}{2}Tr[A+B-|A-B|] \leq \inf_{0\leq\alpha\leq 1} Tr[A^{1-\alpha}B^{\alpha}] \leq Tr[A^{1/2}B^{1/2}]$$
$$\leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}Tr[A+B]\right)^2 - \frac{1}{4}(Tr[|A-B|])^2}.$$

(2) $Tr[|L_A - R_B|I]$ と $Tr[|A-B|]$ の関係はない. なぜなら

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

のときは

$$Tr[|L_A - R_B|I] = 3, \quad Tr[|A-B|] = \sqrt{10}.$$

一方

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

のときは

$$Tr[|L_A - R_B|I] = 8, \quad Tr[|A-B|] = \sqrt{58}.$$

Acknowledgements The author was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26400119.

References

[1] K.M.R.Audenaert, J.Calsamiglia, L.I.Masancs, R.Munnoz-Tapia, A.Acin, E.Bagan and F.Verstraete, The quantum Chernoff bound, Rev. Lett., vol 98, pp 160501-1-4, 2007.

[2] S.Furuichi and K.Yanagi, Schrödinger uncertainty relation, Wigner-Yanase-Dyson skew information and metric adjusted correlation measure, J. Math. Anal. Appl., vol 388, no 2, pp 1147-1156, 2012.

[3] P.Gibilisco, F.Hansen and T.Isola, On a correspondence between regular and non-regular operator monotone functions, Linear Alg. Appl., vol.430(2009), pp.2225-2232.

[4] P.Gibilisco, D.Imparato and T.Isola, Uncertainty principle and quantum Fisher information, II, J. Math. Phys., vol.48(2007), 072109.

[5] P.Gibilisco and T.Isola, On a refinement of Heisenberg uncertainty relation by means of quantum Fisher information, J. Math. Anal. Appl., vol.375(2011), pp.270-275.

[6] F.Hansen, Metric adjusted skew information, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., vol.105(2008), pp.9909-9916.

[7] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann., vol.246(1980), pp.205-224.

[8] S.Luo, Heisenberg uncertainty relation for mixed states, Phys. Rev. A, vol.72(2005), p.042110.

[9] D.Petz, Quantum information theory and quantum statistics, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[10] D.Petz and V.E.S. Szabó, From quasi-entropy to skew information, Int. J. Math. vol.20(2009), pp.1421-1430.

[11] R.T.Powers and E.Stϕrmer, Free states of the canonical anticommunication relations, Commun. Math. Phys., vol 16, pp 1-33, 1970.

[12] E.P.Wigner and M.M.Yanase, Information content of distribution, Proc. Nat. Acad. Sci. U,S,A., vol.49(1963), pp.910-918.

[13] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, A generalized skew information and uncertainty relations, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-51, no 12, pp 4401-4404, 2005.

[14] K.Yanagi, Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information, J. Math. Anal. Appl., vol 365, pp 12-18, 2010.

[15] K.Yanagi, Uncertainty relation on generalized Wigner-Yanase-Dyson skew information, Linear Alg. Appl., vol433, pp 1524-1532, 2010.

[16] K.Yanagi, Metric adjusted skew information and uncertainty relation, J. Math. Anal. Appl., vol 380, no 2, pp 888-892, 2011.

[17] K.Yanagi and S.Kajihara, Generalized uncertainty relation associated with a monotone or anti-monotone pair skew information, Research and Communications in Mathematics and Mathematical Sciences, vol 1, no 1, pp 1-18, 2012.

[18] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, Uncertainty relations for generalized metric adjusted skew information and generalized metric adjusted correlation measure, J. Uncertainty Analysis and Applications, vol 1, no 12, pp 1-14, 2013.

[19] K.Yanagi and K.Sekikawa, Non-hermitian extensions of Heisenberg type and Schrödinger type uncertainty relations, J. Inequalities and Applications, vol 2015, no 381, pp 1-9, 2015.

[20] K.Yanagi, Non-hermitian extension of uncertainty relation, J. Nonlinear and Convex Analysis, vol 17, no 1, pp 17-26, 2016.

[21] K.Yanagi, Generalized trace inequalities related to fidelity and trace distance, Linear and Nonlinear Analysis, vol 2, no 2, pp 263-270. 2016.