数理解析研究所講究録
第2043巻 2017年 67-73

無限遅れを持つ SEIR 複数グループモデルの大域安定性
Global stability for an SEIR multigroup model with infinite delay

岡山大学大学院環境生命科学研究科　應谷　洋二, 梶原　毅, 佐々木　徹
Yoji Otani, Tsuyoshi Kajiwara and Toru Sasaki
Graduate school of Environmental and Life Science, Okayama University

概要

グループ構造を持つ SEIR モデルにおいて, Li and Shuai [12] は, 齢構造モデルを経由して分配的な無限遅れを持つモデルを構成した. グループ間の感染力に関わる係数からなる行列が既約であることを仮定して, このモデルにおける平衡点の安定性を考える.

リアプノフ汎関数を構成する際に現れる積分が well-defined であることを保証するために必要な一連のパーシステンスに関わる証明を丁寧に確認し, 平衡点の大域安定性を示すのに必要なリアプノフ汎関数を適切に構成した.

1 SEIR マルチグループモデル と 相空間

グループ番号を k とおき、$S_k(t)$ を感受性者数, $E_k(t)$ を曝露者数, $I_k(t)$ を感染者数, $R_k(t)$ を隔離者数とするとき、次のモデルを考える [12].

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S_k}{\mathrm{d}t} &= \Lambda_k - \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} S_k \int_0^\infty h_j(r) i_j(t,r)\mathrm{d}r - d_k^S S_k, \\
\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} S_k \int_0^\infty h_j(r) i_j(t,r)\mathrm{d}r - (d_k^E + \epsilon_k) E_k, \\
\frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t} &= \epsilon_k E_k - (d_k^I + \gamma_k) I_k, \\
\frac{\mathrm{d}R_k}{\mathrm{d}t} &= \gamma_k I_k - d_k^R R_k.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで、$h_k(\tau)$ を感染齢 τ の感染の強さを表すカーネル関数, Λ_k を感受性者の出生率, $d_k^S, d_k^E, d_k^I, d_k^R$ を S_k, E_k, I_k および R_k の自然死亡率, β_{kj} を S_k と I_j についての感染係数, ϵ_k をグループ k における感染症の発症率, γ_k をグループ k における隔離率とし、$B = (\beta_{kj})$ は既約行列とする.

時刻 t における感染齢 r の感染者数 $i_k(t,r)$ について,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\right) i_k(t,r) = -(d_k^I + \gamma_k) i_k(t,r), \quad i_k(t,0) = \epsilon_k E_k(t),$$

とすると, 以下のような, S_k と E_k だけの式で漸近挙動を考えることができる.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S_k}{\mathrm{d}t} &= \Lambda_k - \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} S_k \int_0^\infty f_j(r) E_j(t-r)\mathrm{d}r - d_k^S S_k, \\
\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} S_k \int_0^\infty f_j(r) E_j(t-r)\mathrm{d}r - (d_k^E + \epsilon_k) E_k,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

初期条件は次の通りとする.

$$E_k(s) = \phi_k(s), s \in (-\infty, 0], E_k(0) \geq 0, S_k(0) > 0 \text{ for all } k. \tag{1.3}$$

カーネル関数 $f_k(r)$ は, 有界な $h_k(r)$ を用いて次のように定義される:

$$f_k(r) = \epsilon_k h_k(r)\exp\{-(d_k^I + \gamma_k)r\}.$$

すべての k に対して $0 < \lambda < (d_k^I + \gamma_k)$ となる λ について,

$$\int_0^\infty f_k(r)\exp(\lambda r)\mathrm{d}r < \infty,$$

であり, 次の fading memory type の空間 C_λ と Y_λ をノルム $\|\cdot\|$ とともに定める.

$$C_\lambda = \Big\{\psi \in C((-\infty,0],\mathbb{R}) : \psi(s)\exp(\lambda s) \text{ は } (-\infty,0] \text{ において一様連続, } \sup_{s\le 0}|\psi(s)|\exp(\lambda s) < \infty\Big\},$$

$$Y_\lambda = \{\psi \in C_\lambda \,|\, \psi(s) \ge 0 \text{ for all } s \le 0\},$$

$$\|\psi\| = \sup_{s\le 0}\{|\psi(s)|\exp(\lambda s)\}.$$

$E_k(s)$ の初期関数はすべての k について $\phi_k(s) \in Y_\lambda$, 相空間は $X = \mathbb{R}^n \times {Y_\lambda}^n$ とする.

2 平衡点と基礎再生産数

平衡点 $(S_1^*,\ldots,S_n^*,E_1^*,\ldots,E_n^*)$ は

$$\Lambda_k - \sum_{j=1}^n \beta_{kj}S_k^* a_j E_j^* - d_k^S S_k^* = 0, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^n \beta_{kj}S_k^* a_j E_j^* - (d_k^E + \epsilon_k)E_k^* = 0. \tag{2.2}$$

を満たし, 次が成り立つ.

$$\Lambda_k - d_k^S S_k^* - (d_k^E + \epsilon_k)E_k^* = 0.$$

もし, ある i について $E_i^* = 0$ ならば, すべての k について $E_k^* = 0$ となることが, (β_{kj}) の既約性から導かれる. したがって、このときの平衡点は $P^0(S_1^0, S_2^0, \ldots, S_n^0, 0, 0, \ldots, 0)$, ただし $S_k^0 = \Lambda_k/d_k^S$ である.

また、ある i について $E_i^* = 0$ ならば, (β_{kj}) の既約性により、すべての k について $0 < S_k^* < S_k^0, E_k^* > 0$ となり, このときの平衡点を $P^*(S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*, E_1^*, E_2^*, \ldots, E_n^*)$ で表す.

基礎再生産数 R_0 は, 次世代行列 $N = \left(\dfrac{\beta_{kj}S_k^0 a_j}{d_k^E + \epsilon_k}\right)$ のスペクトル半径 $\rho(N)$ である.

3 正値性と有界性

S_k の正値性と有界性は, $\mathrm{d}S_k/\mathrm{d}t \le \Lambda_k - d_k^S S_k$ から次のように得られる.

命題 3.1. どのような初期条件に対しても,

$$0 < S_k(t) \le \max\left\{S_k(0), \frac{\Lambda_k}{d_k^S}\right\} \;\; \textit{for } t \ge 0,$$

となり, すべての $t \ge T$ について $S_k(t) \le \Lambda_k/d_k^S + 1$ が成り立つような $T > 0$ が存在する.

S_k の正値性について, (1.2) の第 2 式で $d_k^E + \epsilon_k = \delta_k$ とおくとき,

$$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} S_k(t) \int_0^\infty f_j(r) E_j(t-r)\mathrm{d}r - \delta_k E_k(t), \tag{3.1}$$

$$E_k(t) = \exp(-\delta_k t)E_k(0) + \exp(-\delta_k t)\int_0^t \exp(\delta_k s)\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}S_k(s)\int_0^\infty f_j(r)E_j(s-r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

が得られ, 初期関数 $\phi_k(s) = E_k(s), s \le 0$ は非負である. もし, ある i と $s(\le 0)$ について $E_i(s) > 0$ ならば, , すべての k について $E_k(t) > 0, t > 0$ が (β_{kj}) の既約性から成り立つ. $d_k^* = \min\{d_k^S, \delta_k\}$ とおけば,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(S_k + E_k)}{\mathrm{d}t} &= \Lambda_k - d_k^S S_k - \delta_k E_k \\ &\le \Lambda_k - d_k^*(S_k + E_k).\end{aligned}$$

となり, $S_k + E_k$ は有界である. したがって E_k は, S_k の正値性から, 有界である.

命題 3.2. あらゆる初期条件に対して

$$0 < E_k(t) \le \max\left\{S_k(0) + E_k(0), \frac{\Lambda_k}{d_k^*}\right\} \textit{ for } t \ge 0,$$

であり, $E_k(t) \le \Lambda_k/d_k^* + 1$ *for* $t \ge T$ となるような $T > 0$ が存在する.

定理 3.3. 初期条件 (1.3) を満たすような, (1.2) の解を u とする. このとき, $\|(E_k)_t\| \le M_k$ *for* $t \ge 0$ となるような, t によらない M_k が存在する.

Proof. 任意の $t \ge 0$ について,

$$\|(E_k)_t\| \le \max\left\{\|\phi_k\|,\ S_k(0) + E_k(0),\ \frac{\Lambda_k}{d_k^*}\right\} = M_k, \tag{3.3}$$

であり, この M_k は t によらない. □

(1.2) の解 $((E_1)_t, \ldots, (E_n)_t)$ は, すべての $t \ge 0$ に対して相空間 $Y_\lambda{}^n$ にあり, したがって $(E_k)_t(s) \le \|(E_k)_t\|\mathrm{e}^{-\lambda s}$ for $s \le 0$ である. よって, 一般性を失わずに, 次のように初期条件を書き直すことができる.

$$E_k(s) = \phi_k(s), s \in (-\infty, 0], \phi_k \in Y_\lambda, E_k(0) > 0, S_k(0) > 0, \text{ for all } k.$$

したがって, すべての $t \ge 0$ と k について $E_k(t) > 0$ である.

4 一様パーシステンス

次の, Hale and Waltman [6] によるパーシステンスの定理が有用である:

定理 4.1. 以下の条件を仮定する:
(i) X^0 は, X において, 稠密な開集合で $X^0 \cup X_0 = X$ かつ $X^0 \cap X_0 = \emptyset$;
(ii) solution operator $T(t)$ は, $T(t) : X^0 \to X^0, T(t) : X_0 \to X_0$ を満たす;
(iii) $T(t)$ は X において, *point dissipative;*
(iv) もし U が X において有界ならば, $\gamma^+(U)$ も X において有界;
(v) $T(t)$ は *asymptotically smooth ;*
(vi) $\mathcal{A} = \cup_{x \in A_b}\omega(x)$ は孤立非巡回的被覆 $N = \cup_{i=1}^k N_i$ を持ち, A_b は $T(t)$ の X_0 に制限された *global attractor* である;
(vii) それぞれの $N_i \in N$ について $W^s(N_i) \cap X^0 = \emptyset$; ただし W^s は安定集合である.
このとき, $T(t)$ は, X_0 に関して *uniform repeller* である, すなわち, $\eta > 0$ があって, $x \in X^0$に対して, $\liminf_{t\to\infty} d(T(t)x, X_0) \ge \eta$ となる.

$$X^0 = \{(S_1, \dots, S_n, E_1, \dots, E_n) \in X \mid E_k(s) > 0 \text{ for some } s \le 0, \text{ for some } k\},$$
$$X_0 = \{(S_1, \dots, S_n, E_1, \dots, E_n) \in X \mid E_k(s) = 0 \text{ for all } s \le 0, \text{ for all } k\},$$

のように定義すれば, $X = X^0 \cup X_0$, $X^0 \cap X_0 = \emptyset$, X^0 と X_0 は共に positive invariant である.

定理 4.2. システム (1.2) を考えて, $R_0 > 1$ と $(\boldsymbol{S}_0, \boldsymbol{E}_0) \in X^0$ を仮定すれば,

$$\liminf_{t\to\infty} \|(E_k)_t\| \ge \eta.$$

となる $\eta > 0$ が存在する.

Proof. 定理 4.1 の条件を確かめる. (i), (ii) は容易.
(iii) point dissipativity は既に 命題 3.1 と 命題 3.2 で示されている.
(iv) $\|\phi_k\|$ が有界ならば, (3.3) による.
(v) X のどんな 有界な forward invariant な部分集合 U についても,

$$\mathcal{M}_k := \left\{\psi \in C_\lambda : \sup_{s\le 0} \psi(s) e^{\frac{\lambda}{2}s} \le M_k^2\right\}, \quad \mathcal{M} = \prod_{k=1}^{n} [0, M_k^1] \times \prod_{k=1}^{n} \mathcal{M}_k,$$

$M_k^1 = \max\left\{S_k(0), \frac{\Lambda_k}{d_k^S}\right\}$, $M_k^2 = \max\left\{\sup_{\phi_k\in U} \|\phi_k\|, \Lambda_k/d_k^S, \Lambda_k/d_k^*\right\}$, を用いて定まる上のような $\mathcal{M}_k$ と $\mathcal{M}$ について $\lim_{t\to\infty} d(T(t)U, \mathcal{M}) = 0$. したがって $T(t)$ は asymptotically smooth である.
(vi) $\mathcal{A} = \{P^0\}$ (ただし, $P^0 = (\boldsymbol{S}^0, \boldsymbol{0}) \in X$) であり, 孤立している. したがって, 被覆は単に $N = \{P^0\}$ であり, これは非巡回的である, すなわち X_0 に, P^0 と自分自身をつなぐ軌道はない.
(vii) $W^s(P^0) \cap X^0 = \emptyset$ であることを示す. そうでないと仮定すると, X^0 に次のような解が存在する：

$$\lim_{t\to\infty} (S_k, E_k) = (\Lambda_k/d_k^S, 0).$$

関数 $U(t)$ を次のように定める：

$$U(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k E_k(t), \quad c_k = \frac{\omega_k}{\delta_k} \left(= \frac{\omega_k}{d_k^E + \epsilon_k}\right),$$

ここで, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ は, 各成分が非負の次世代行列 N のスペクトル半径 $\rho(N)$ に対応する, 成分がすべて正の左固有ベクトルで, $r_1 = \rho(N)^{1/3}$ とおけば, $r_1 > 1$ であり, $T > 0$ が存在して $S_k(t) > S_k^0/r_1$ for $\forall t \ge T$ となる.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{\delta_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} S_k(t) \int_0^\infty f_j(r) E_j(t-r)\mathrm{d}r - \delta_k E_k(t)\right) \\
&\ge \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{\delta_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} \frac{S_k^0}{r_1} \int_0^t f_j(r) E_j(t-r)\mathrm{d}r - \delta_k E_k(t)\right)
\end{aligned}$$

ここで, $t - T$ を改めて t とおくと, $t \ge 0$ において不等式が常に成り立つ. ラプラス変換により, $\mathcal{L}[\boldsymbol{E}] = (\mathcal{L}[E_1](s), \mathcal{L}[E_2](s), \dots, \mathcal{L}[E_n](s))$, $\delta_0 = \min_{1\le k\le n} \delta_k$ とおく.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right](s) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{\delta_k} \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t}\right](s) \le -\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{\delta_k} E_k(0) + \frac{s}{\delta_0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \mathcal{L}[E_k](s) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{\delta_k} E_k(0) + \frac{s}{\delta_0} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathcal{L}[\boldsymbol{E}].
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k}{\delta_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}\frac{S_k^0}{r_1}\int_0^t f_j(r)E_j(t-r)\mathrm{d}r-\delta_k E_k(t)\right)\right]\\
&=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\left(\frac{1}{r_1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_{kj}S_k^0}{\delta_k}\mathcal{L}\left[f_j\right]\mathcal{L}\left[E_j\right]-\mathcal{L}\left[E_k\right]\right) \qquad (4.2)\\
&>\sum_{k=1}^{n}\omega_k\left(\frac{1}{r_1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_{kj}S_k^0}{\delta_k}\frac{a_j}{r_1}\mathcal{L}\left[E_j\right]-\mathcal{L}\left[E_k\right]\right)=\frac{\rho(N)}{r_1^2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathcal{L}[\boldsymbol{E}]-\boldsymbol{\omega}\cdot\mathcal{L}[\boldsymbol{E}].
\end{aligned}
$$

ただし, $\mathcal{L}[f_j](0)=a_j$ だから, 十分小さいすべての $s>0$ について $\mathcal{L}[f_j](s)>a_j/r_1$.
したがって,(4.1),(4.2) から,

$$
-\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k}{\delta_k}E_k(0)>\left(r_1-1-\frac{s}{\delta_0}\right)\boldsymbol{\omega}\cdot\mathcal{L}[\boldsymbol{E}].
$$

この左辺は負であり, 右辺は 十分小さい $s>0$ について正にできるから矛盾. したがって, (vii) が成り立ち, 定理 4.1 を適用することが出来て, $\liminf_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|(E_k)_t\|\geq\eta_0$, となるような $\eta_0>0$ が存在する. このとき, すべての k について次が成り立つような $\eta>0$ が存在することを示すことが出来る.

$$
\liminf_{t\to\infty}\|(E_k)_t\|\geq\eta.
$$

□

次の補題 を $(E_k)_t$ に適用できる.

補題 4.3. $\liminf_{t\to\infty}\|y_t\|\geq\eta$ *for* $y_t\in Y_\lambda$ と仮定するなら, $0<\eta'<\eta$ について, $\limsup_{t\to\infty}y(t)\geq\eta'$ *for all* η' が成り立つ..

したがって,

$$
\limsup_{t\to\infty}E_k(t)\geq\eta'.
$$

定理 4.2 において, $T(t)$ が asymptotically smooth であることと, 定理 2.2 [18] により,

命題 4.4. $R_0>1$ とする. $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})$ が $(\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{E}_0)\in X^0$ であるような (1.2) の解とすれば, 次のような正の η'' が存在する.

$$
\liminf_{t\to\infty}E_k(t)>\eta''.
$$

5 $R_0>1$ におけるリアプノフ汎関数

モデル (1.2) におけるリアプノフ汎関数の構成のために, 次の汎関数を定義する.

$$
W_k^{\infty}(\phi_t;c)=c\int_0^{\infty}\alpha_k(a)H\left(\frac{\phi(t-a)}{c}\right)\mathrm{d}a, \qquad (5.1)
$$

ここで, $\alpha_k(a)=\int_a^{\infty}f_k(\tau)\mathrm{d}\tau$, $H(u)=u-1-\ln u$ および $c>0$ である.

$R_0>1$ とする. $(\tilde{\boldsymbol{S}},\tilde{\boldsymbol{E}})$ を $(\tilde{\boldsymbol{S}}_0,\tilde{\boldsymbol{E}}_0)\in X^0$ であるような (1.2) の解とする. そのとき, 命題 3.1, 命題 3.2 および 命題 4.4 により, $(\tilde{\boldsymbol{S}},\tilde{\boldsymbol{E}})$ の ω-極限集合 Ω は空でなく, コンパクトかつ不変である. したがって, もし $(\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{E}_0)\in\mathbb{R}^n\times {Y_\lambda}^n$ が Ω の点であれば, 解のすべての点が Ω にあるような, $(\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{E}_0)$ を通る entire solution が存在する. Ω にある解 $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})$ について, 命題 3.1, 命題 3.2 および 命題 4.4 により,

$$
\epsilon\leq E_k(t)\leq M \text{ for all } t\in\mathbb{R}.
$$

となるような $\epsilon > 0$ と $M > 0$ が存在する. そのとき, 汎関数 (5.1) は Ω にあるすべての解に対して well-defined である. システム (1.2) の, 感染のある唯一の平衡点を $P^* = (S_1^*, \ldots, S_n^*, E_1^*, \ldots, E_n^*)$ で表す.

$$\bar{\beta}_{kj} = \beta_{kj} a_j S_k^* E_j^*, \quad 1 \le k, j \le n, \quad n \ge 2,$$

とおき, $(\bar{\beta}_{kj})$ のラプラシアン行列を $\bar{B}$ とすると,

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \sum_{l\neq 1} \bar{\beta}_{1l} & -\bar{\beta}_{21} & \cdots & -\bar{\beta}_{n1} \\ -\bar{\beta}_{12} & \sum_{l\neq 2} \bar{\beta}_{2l} & \cdots & -\bar{\beta}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\beta}_{1n} & -\bar{\beta}_{2n} & \cdots & \sum_{l\neq n} \bar{\beta}_{nl} \end{bmatrix}.$$

(β_{kj}) は既約だから, $(\bar{\beta}_{kj})$ と $\bar{B}$ もまた既約である.

方程式 $\bar{B}\boldsymbol{v} = 0$ は, 正の解 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ を持つ.

$$\sum_{l=1}^{n} \bar{\beta}_{kl} v_k = \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_{jk} v_j. \tag{5.2}$$

次の V がリアプノフ汎関数となることを示す.

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2, \\ V_1 &= \sum_{k=1}^{n} v_k \left\{ S_k^* H\left(\frac{S_k}{S_k^*}\right) + E_k^* H\left(\frac{E_k}{E_k^*}\right) \right\}, \\ V_2 &= \sum_{k,j=1}^{n} v_k \beta_{kj} S_k^* \int_0^\infty \alpha_j(r) E_j^* H\left(\frac{E_j(t-r)}{E_j^*}\right) \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

(2.1), (2.2), および相加相乗平均の不等式と $H(u) \ge 0$ 　を用いて,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \le \sum_{k,j=1}^{n} v_k \bar{\beta}_{kj} \left\{ \left(\frac{E_j}{E_j^*} - \ln \frac{E_j}{E_j^*} \right) - \left(\frac{E_k}{E_k^*} - \ln \frac{E_k}{E_k^*} \right) \right\}.$$

(5.2) 　により,

$$\sum_{k,j=1}^{n} v_k \bar{\beta}_{kj} \left(\frac{E_j}{E_j^*} - \ln \frac{E_j}{E_j^*} \right) = \sum_{k,j=1}^{n} v_k \bar{\beta}_{kj} \left(\frac{E_k}{E_k^*} - \ln \frac{E_k}{E_k^*} \right).$$

したがって,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \le 0.$$

6 $R_0 \le 1$ 　のときのリアプノフ汎関数

$L(t)$ を次のように定義する.

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left\{ S_k^0 H\left(\frac{S_k(t)}{S_k^0}\right) + E_k(t) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{kj} S_k^0 \int_0^\infty \alpha_j(r) E_j(t-r) \mathrm{d}r \right\},$$

ただし,

$$c_k = \frac{\omega_k}{d_k^E + \epsilon_k}, \quad \Lambda_k = d_k^S S_k^0, \quad \alpha_k(0) = \int_0^\infty f_k(\sigma) \mathrm{d}\sigma = a_k.$$

$(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{E})$ の ω-極限集合 Ω は空でなく, $L(t)$ はすべての解に対して well-defined である.

命題 6.1. $R_0 \le 1$ のとき, $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{E})$ が Ω にある, モデル (1.2) の解ならば, $L(t)$ の導関数は非正で

ある.

Proof. 次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty \alpha_j(r)E_j(t-r)\mathrm{d}r &= \alpha_j(0)E_j(t) + \int_0^\infty \alpha_j'(r)E_j(t-r)\mathrm{d}r \\ &= a_jE_j(t) - \int_0^\infty f_j(r)E_j(t-r)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

このとき, L の導関数は次のようになる:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^n \omega_k \left[\frac{d_k^S S_k^0}{d_k^E+\epsilon_k}\left(2-\frac{S_k}{S_k^0}-\frac{S_k^0}{S_k}\right)+\sum_{j=1}^n \frac{\beta_{kj}S_k^0 a_j}{d_k^E+\epsilon_k}E_j(t)-E_k\right]$$

相加相乗平均の不等式を用いて,

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \leq \boldsymbol{\omega}\cdot(N\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}) = (\rho(N)-1)\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{E}.$$

$\rho(N)\leq 1$ だから, この導関数は非正である. ここで, $\boldsymbol{E}=(E_1,E_2,\ldots,E_n)$ である. したがって $L(t)$ は平衡点 $(S_1^0,\ldots,S_n^0,0,\ldots,0)$ に対するリアプノフ汎関数となる. □

定理 6.2. $R_0\leq 1$ のとき, すべての解は平衡点 $(\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{0})$ に収束する. ただし, $\boldsymbol{S}^0=(S_1^0,\ldots,S_n^0)$ である.

参考文献

[1] F.V. Atkinson and J.R. Haddock, *On determining phase spaces for functional differential equations,* Funkcial. Ekvac., **31**(1988), 331–347.

[2] C.J. Browne and S.S. Pilyugin, *Global analysis of age-structured within-host model,* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **8**(2013), 1999–2017

[3] T. Burton and V. Hutson, *Repellers in systems with infinite delay,* J. Math. Anal. Appl., **137**(1989), 240–263.

[4] H. Gomez-Acevedo , M.Y. Li and S. Jacobson, *Multistability in a model for CTL response to HTLV-I infection and its implications to HAM/TSP development and prevention,* Bull. Math. Biol., **72**(2010), 681–696.

[5] J.K. Hale and J. Kato, *Phase space for retarded equations with infinite delay,* Funkcial. Ekvac., **21**(1978), 11–41.

[6] J.K. Hale and P. Waltman, *Persistence in infinite-dimensional systems,* SIAM J. Math. Anal., **20**(1989), 388–395.

[7] A. Iggidr, J-C. Kamgang, G. Sallet and J-J. Tewa, *Global analysis of new malaria intrahost models with a competitive exclusion principle,* SIAM J. Appl. Math., **67**(2006), 260–278.

[8] T. Inoue, T. Kajiwara and T. Sasaki, *Global stability of models of humoral immunity against multiple viral strains,* J. Biol. Dyn., **4**(2010), 282–295.

[9] T. Kajiwara, T. Sasaki and Y. Takeuchi, *Construction of Lyapunov functionals for delay differential equations in virology and epidemiology,* Nonlinear Analysis RWA, **13**(2012), 1802–1826.

[10] T. Kajiwara, T. Sasaki and Y. Takeuchi, *Construction of Lyapunov functions of the models for infectious diseases in vivo: from simple models to complex models,* Math. Biosci. Eng., **12**(2015), 117–133.

[11] A. Korobeinikov, *Global properties of basic virus dynamics models,* Bull. Math. Biol., **66**(2004), 879–883.

[12] M. Y. Li, Z. Shuai and C. Wang *Global stability of multi-group epidemic models with distributed delays,* J. Math. Anal. Appl., **361**(2010), 38–47.

[13] C.C. McCluskey, *Global stability for an SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay,* Math. Biosci. Eng., **6**(2009), 603–610.

[14] A. Murase, T. Sasaki and T. Kajiwara, *Stability analysis of pathogen–immune interaction dynamics,* J. Math. Biol., **51**(2005), 247–267.

[15] M.A. Nowak and C.R.M. Bangham, *Population dynamics of immune responses to persistent viruses,* Science, **272**(1996), 74–79.

[16] Y. Otani, T. Kajiwara and T. Sasaki, *Lyapunov functionals for virus-immune models with infinite delay,* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **9**(2015), 3093–3114

[17] G. Röst and J. Wu, *SEIR epidemiological model with varying infectivity and infinite delay,* Math. Biosci. Eng., **5**(2008), 389–402.

[18] H.R. Thieme, *Uniform weak implies uniform strong persistence for non-autonomous semiflows,* Proceedings of the American Mathematical Society, **127.8** (1999) 2395–2403.

[19] J. Wang, G. Huang and Y. Takeuchi, *Global asymptotic stability for HIV-1 dynamics with two distributed delays,* Mathematical Medicine and Biology, **29**(2012), 283–300