

# ランダム行列を用いた予算制約・集中投資度制約がある場合の 最小投資リスクの理論評価

多田 大智\*, 新里 隆†, 肖 霄\*, 山本 久志\*  
\* 首都大学東京大学院 システムデザイン研究科  
† 一橋大学 森有礼高等教育国際流動化センター

Daichi Tada\*, Takashi Shinzato†, Xiao Xiao\*, Hisashi Yamamoto\*  
\*Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University

†Mori Arinori Center for Higher Education and Global Mobility, Hitotsubashi University

## 1 はじめに

ポートフォリオとは資産を複数の投資対象に分散投資すること,あるいは投資対象の組み合わせのことを言い,ポートフォリオ最適化問題とは構築されたポートフォリオの組み合わせの最適な比率(投資比率)を決定する問題のことを指す.この問題は,リターン(期待収益率)とリスクを用いることで定式化されるが,最もよく知られているのはリスクに収益率の分散を用いる平均分散モデルである[1].このモデルは1952年に,Markowitzによって提案されたポートフォリオ最適化問題の中でも代表的なモデルであり,これを機に最適化問題を分析する研究が数多く報告されるようになった[2].例えば,KonnoとYamazakiは絶対偏差をリスクとする絶対偏差モデルを提案した[3].平均分散モデルでは最適解を求めるために2次計画法を使う必要があるが,絶対偏差モデルでは線形計画法で問題が解けるため実用的であることが示された.また,RockafellarとUryasevは確率的に変動する収益率の下リスクに注目し,信頼水準を下回らないようなリスク指標に基づいた期待ショートフォールモデルを提案した[4].さらに,近年ではオペレーションズ・リサーチ(OR)以外の分野で開発された解析手法を用いて,ポートフォリオ最適化問題を分析する研究が活発に行われている.例えば,Cilibertiらは情報統計力学の分野で開発されたレプリカ解析を用いて,絶対偏差モデルと期待ショートフォールモデルの解析を行った[5].また,Pafkaらは数理統計学や原子核物理学の分野で開発されたランダム行列理論を用いて,実データから計算される収益率の相関行列の経験固有値分布とMarčenko-Pastur則により得られる漸近固有値分布のズレを比較することで銘柄間の相関を定量的に評価した[6].一方,Shinzatoらはレプリカ解析やランダム行列理論を平均分散モデルに適用して最小投資リスクと集中投資度の典型的な振る舞いを解析した[7][8][9][10][11].中でもShinzatoは,ORの分野で広く用いられるリスクに対して初めて平均操作を行い,後に最適化操作を行う解析順序では最適投資戦略に関して明確な知見を提供することができないとして,レプリカ解析を用いて最適化操作の後に平均操作を行う解析順序で評価を行っている.

近年,その活用が様々な分野に及ぶレプリカ解析は統計物理学の分野で発展し,ファイナンスの分野でも活発に研究がなされている.しかし,レプリカ解析から得られる結果の妥当性は数値的に検証されているが数学的には保証されていないため投資家に知見提供をする際に,その正当性を強く主張することができない.そこで本研究では,ポートフォリオ最適化問題の中でも代表的な平均分散モデルに対してランダム行列理論を用いて最適解の振る舞いを厳密に評価する.特にランダム行列アンサンブルの特徴の1つである自己平均性の性質を用いて,所与の収益率セットに対する投資リスクを投資リスクのアンサンブル平均に置き換えて評価を行う[10].そしてランダム行列理論の結果とレプリカ解析の結果,さらに数値実験の3つを比較することで理論結果が正しいことを示す.

本稿の構成は以下の通りである。次章では平均分散モデルを定式化し、最適解の振る舞いを解析するために評価指標としてリスクと集中投資度を定義する。そして、3章では既存手法であるレプリカ解析の考え方とその問題点について説明し、4章でランダム行列理論を用いて、予算制約と集中投資度制約がある場合の最小投資リスクの導出を行う。続く5章で理論結果と数値実験の結果を比較し、理論結果が正しいことを確認する。最後に、6章でまとめと今後の課題について言及する。

## 2 ポートフォリオ最適化解析

### 2.1 平均分散モデル

本研究では、空売り規制のない定常的な投資市場において  $N$  銘柄を対象に投資を行う場合を考える。投資家の銘柄  $k(=1, 2, \dots, N)$  への投資比率を  $\omega_k$  で表し、ポートフォリオを構成する各銘柄への投資比率をまとめて  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T \in \mathbb{R}^N$  で表す。ただし、記号  $T$  はベクトルや行列の転置を表す。また、銘柄  $k$  の期間  $\mu(=1, 2, \dots, p)$  における収益率  $\bar{x}_{k\mu}(V[\bar{x}_{k\mu}] = 1)$  は各々独立で、分布を既知と仮定する。さらに、 $p$  期間の収益率の組み合わせ  $(\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \dots, \bar{x}_{Np}) \in \mathbb{R}^{N \times p}$  を用いて、ポートフォリオ  $\vec{\omega}$  の平均分散モデルのリスク関数  $\mathcal{H}(\vec{\omega})$  を、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{\omega}) &= \frac{1}{2N} \sum_{\mu=1}^p \left( \sum_{k=1}^N \bar{x}_{k\mu} \omega_k - \sum_{k=1}^N E[\bar{x}_{k\mu}] \omega_k \right)^2 \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\mu=1}^p \left( \sum_{k=1}^N (\bar{x}_{k\mu} - E[\bar{x}_{k\mu}]) \omega_k \right)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

で定義する。式 (1) より、リスク関数  $\mathcal{H}(\vec{\omega})$  は各期間におけるポートフォリオの収益率と期待収益率の偏差の2乗を全期間で総和していることが分かる。ここで、 $x_{k\mu} = \bar{x}_{k\mu} - E[\bar{x}_{k\mu}]$  として式 (1) を変形すると、

$$\mathcal{H}(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i \omega_j \left( \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p x_{i\mu} x_{j\mu} \right), \quad (2)$$

となり、さらに要素が、

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p x_{i\mu} x_{j\mu}, \quad (3)$$

となる分散共分散行列  $J = \{J_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  を用いて次式を得る。

$$\mathcal{H}(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \vec{\omega}. \quad (4)$$

また、資金が有限であるとして予算制約を次式で定義する。

$$\sum_{k=1}^N \omega_k = N. \quad (5)$$

ここで、式 (5) は通常であれば比率の総和なので  $\sum_{k=1}^N \omega_k = 1$  であるが、どちらの制約式でも最適解の各銘柄間の相対投資比率は一致するため、また、後に定義する評価指標 (式 (7)) の解釈を見通しよくするために式 (5) を用いることにする。

### 2.2 評価指標

最適解を与えるポートフォリオ  $\vec{\omega}$  の振る舞いを評価するために、1 銘柄あたりの最小投資リスク  $\varepsilon_N$  と集中投資度  $q_\omega$  をそれぞれ、

$$\varepsilon_N = \frac{1}{N} \mathcal{H}(\vec{\omega}), \quad (6)$$

$$q_\omega = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_k^2, \quad (7)$$

で定義する。リスク  $\varepsilon_N$  は式 (4) で与えられるリスク関数を  $N$  等分割した値で、1 銘柄当たりのリスクを表している。一方で、集中投資度  $q_\omega$  はポートフォリオ  $\vec{\omega}$  のばらつき具合を表す指標で、分散投資がどの程度達成されているかを表している。ここで、集中投資度  $q_\omega$  の性質を以下に記す。

(i) 各銘柄に均等に投資をする場合 (均等投資型)

どの銘柄にも均等に投資をする場合、すなわち  $\vec{\omega} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$  であるとする定義より、集中投資度  $q_\omega$  は  $q_\omega = 1$  となる。

(ii) 特定の銘柄に集中して投資をする場合 (集中投資型)

特定の銘柄に集中して投資をする場合、例えば、 $\vec{\omega} = (N, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$  であるとする定義より、集中投資度  $q_\omega$  は  $q_\omega = N$  となる。

以上、(i)(ii) から投資形態が均等投資型に近づけば、集中投資度  $q_\omega$  は 1 に漸近し、集中投資度型に近づけば、集中投資度  $q_\omega$  は 1 から遠ざかることが分かる。また、定義より集中投資度  $q_\omega$  は、

$$\begin{aligned} q_\omega - 1 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_k^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_k \right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \omega_k - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i \right)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

であることから、 $q_\omega \geq 1$  である。また、この集中投資度  $q_\omega$  に近い指標で Herfindahl-Hirschman Index ( $HHI$ ):

$$HHI = \sum_{k=1}^N \omega_k^2, \quad (9)$$

があるが、 $HHI$  では式 (8) のような統計的な解釈を与えることができないことも考慮して、集中投資度  $q_\omega$  を評価指標として用いることとする。

### 3 レプリカ解析

レプリカ解析は、磁性体の磁性現象を微視的な性質から説明するために導入されたランダムさを有する数学モデルにおいて、その振る舞いを解析するために開発された手法である。そのため、統計物理学の分野で発展し、スピングラスの性質を理論的に解明するための解析手法として広く使われるようになった。また、近年ではレプリカ解析の適用範囲が物理学に限らず、ニューラルネットワークや機械学習、組み合わせ最適化などの諸問題の解析にも有効であることが示されている [12]。そして、ファイナンスの分野でもその活用が目ざされており、ポートフォリオ最適化問題への応用が活発に研究されている。特に、Ciliberti らはレプリカ解析を絶対偏差モデルや期待ショートフォールモデルの解析に適用している [5]。また、Varga らは各期の総収益と期待収益の“差の分散”を目的関数として、予算制約と期待収益制約のあるポートフォリオ最適化問題に適用している [13]。一方、Shinzato は平均分散モデルに適用し、本研究に先駆けて予算制約と集中投資度制約がある場合の最小投資リスクの評価も行っている [11]。

今挙げたように、レプリカ解析はファイナンスを含む様々な分野で適用されているが、その一方で解析手法としての妥当性は数値的に検証されているが数学的に厳密ではないとされている。そこで以降、(i) レプリカ解析の考え方について先行研究 [11] を踏まえて言及し、(ii) その問題点について簡単にふれる。

## (i) レプリカ解析とは

分布関数  $\mathcal{F}(Z)$  が解析的な形で与えられている実数値確率変数  $Z(> 0)$  に対して、その対数の期待値  $E[\log Z]$  を求める問題を考える。ただし、 $E[\log Z]$  は直接計算することが困難な場合を想定する。このとき、レプリカ解析は次式で与えられるレプリカトリックを用いて  $E[\log Z]$  の評価を行う。

$$E[\log Z] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} \log E[Z^n]. \quad (10)$$

式 (10) の右辺に着目して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \log E[Z^n] &= \frac{1}{E[Z^n]} \frac{\partial E[Z^n]}{\partial n} \\ &= \frac{1}{E[Z^n]} E[Z^n \log Z] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow 0} E[\log Z], \end{aligned} \quad (11)$$

によって成り立つことが確認できる簡単な恒等式である。 $E[\log Z]$  を求める際に、 $E[Z^n]$  を計算する方が容易であればレプリカトリックを  $E[\log Z]$  を求めるための手段として活用することができる。

先行研究 [11] では平均分散モデルの最小投資リスクを評価するために確率変数  $Z$  を、

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\bar{\omega}) e^{-\beta \mathcal{H}(\bar{\omega})} d\bar{\omega}, \quad (12)$$

で定義する。ただし、 $P_0(\bar{\omega})$  は事前分布を表し、 $\beta$  はボルツマン分布の逆温度を表す。このとき、銘柄数  $N$  が大きい極限で 1 銘柄あたりの最小投資リスク  $\lim_{N \rightarrow \infty} E[\varepsilon_N]$  は、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\varepsilon_N] = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} E[\log Z], \quad (13)$$

で与えられる。式 (13) より、右辺の  $E[\log Z]$  を求めることができれば 1 銘柄あたりの最小投資リスク  $\varepsilon$  を評価できるが式 (12) で定義される  $Z$  から直接  $E[\log Z]$  を求めることは困難であり、レプリカトリックを活用して評価を行う。

## (ii) レプリカ解析の問題点

レプリカトリックは式 (10) の恒等式から分かる通り、 $n$  に関して微分や極限操作を行うため  $n$  が実数で定義されていなければならない。しかし、仮に  $n$  が自然数であれば  $\log E[Z^n]$  を求めることは比較的容易であるが、一般に  $n \in \mathbb{R}$  に対して  $\log E[Z^n]$  を評価することは難しい。例えば、 $a, b > 0$  に対して  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  や  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  はそれぞれ、左辺を右辺のように有限の項数で展開することができるが  $(a+b)^{2.5}$  は有限の項数で展開することができない。しかし、 $(a+b)^2 < (a+b)^{2.5} < (a+b)^3$  であることから  $(a+b)^{2.5}$  を漸近的に評価することが出来る。 $\log E[Z^n]$  の評価も同様の発想で、 $n \in \mathbb{N}$  に対して得られた結果を  $n \in \mathbb{R}$  に適用することを考える。そこで、以下の解析手順に則って評価を行う。

1.  $n$  を自然数とみなして、 $\log E[Z^n]$  の計算を行う。
2. 1の結果に対して  $n$  を実数とみなして、 $n$  に関して微分や極限操作を行う。

手順 2 に関して補足すると、手順 1 で得られる結果は一般に、 $n$  が自然数でなくとも定義可能な関数となるため、微分や極限操作が計算上可能となる。このとき、レプリカ解析の問題点の 1 つに、上記解析手順で  $n$  に関する仮定が 1 と 2 で異なることが挙げられる。さらに、扱う問題によっては今挙げた問題以外にもレプリカ対称性の破れや  $N$  と  $n$  の極限操作の交換に伴う相転移の問題 [14] が挙げられるが、本研究には直接関係しないので割愛する。一方で、レプリカ解析から得られた結果の妥当性は数値的に検証されており、経験的に正しい結果を与えることが期待されている。事実、我々が本研究で扱う問題もレプリカ解析と数値実験の結果が一致している。しかし、数学的厳密性を

要するのであれば、レプリカ解析ではそれに欠けるため別のアプローチからその結果を再現する必要がある。そのために、本研究では数学的に厳密であるとされているランダム行列理論を用いて最小投資リスクの評価を行う。

#### 4 予算制約・集中投資度制約がある場合の最小投資リスクの評価

本研究では、予算制約および次式で与えられる集中投資度制約の下、銘柄数  $N$  が十分に大きいときの 1 銘柄あたりの最小投資リスク  $\varepsilon$  ( $= \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N$ ) の評価を行う。

$$q_\omega = \tau. \quad (14)$$

そのために、Lagrange 未定乗数法の枠組みの中でランダム行列の性質を用いてリスク関数  $\mathcal{H}(\bar{\omega})$  の最小化を行う非線形計画問題を考える。そこで、主問題 (P) を以下で与える。

$$(P) : \begin{cases} \min & \mathcal{H}(\bar{\omega}) \\ \text{s.t.} & \bar{e}^T \bar{\omega} = N, \bar{\omega}^T \bar{\omega} = N\tau. \end{cases} \quad (15)$$

主問題 (P) に対して、Lagrange 乗数  $k, \theta \in \mathbb{R}$  を用いて Lagrange 関数  $\mathcal{L}_N(\bar{\omega}, k, \theta)$  を次式で定義する。

$$\mathcal{L}_N(\bar{\omega}, k, \theta) = \mathcal{H}(\bar{\omega}) + k(N - \bar{e}^T \bar{\omega}) + \frac{\theta}{2}(N\tau - \bar{\omega}^T \bar{\omega}). \quad (16)$$

以降、Lagrange 未定乗数法に則り、 $\mathcal{L}_N(\bar{\omega}, k, \theta)$  を  $\bar{\omega}$ ,  $k$ ,  $\theta$  についてそれぞれ偏微分して得られる関係式を用いてパラメータを 1 つずつ消去し、 $N$  が大きい極限で極値を与える  $\theta$  を特定する (必要条件)。そして、 $\mathcal{L}_N(\bar{\omega}, k, \theta)$  の Hesse 行列  $H$  が正定値行列になること (十分条件) を用いて最小値を与える  $\theta$  を求めて  $\varepsilon$  を導出する。

初めに、 $\frac{\partial \mathcal{L}_N(\bar{\omega}, k, \theta)}{\partial \bar{\omega}} = 0$  から次式を得る。ただし、 $I_N$  は  $N$  次単位行列を表し、 $J - \theta I_N$  は正則行列であるとする。

$$\bar{\omega}^* = k(J - \theta I_N)^{-1} \bar{e}. \quad (17)$$

次に、式 (17) の  $\bar{\omega}^*$  を  $\mathcal{L}_N(\bar{\omega}, k, \theta)$  に代入し、 $\frac{\partial \mathcal{L}_N(\bar{\omega}^*, k, \theta)}{\partial k} = 0$  から次式を得る。

$$k^* = \frac{1}{S_N(\theta)}. \quad (18)$$

ただし、 $S_N(\theta)$  を次式で置く。

$$S_N(\theta) = \frac{\bar{e}^T (J - \theta I_N)^{-1} \bar{e}}{N}. \quad (19)$$

最後に、式 (18) の  $k^*$  を  $\mathcal{L}_N(\bar{\omega}^*, k, \theta)$  に代入し、 $\frac{\partial \mathcal{L}_N(\bar{\omega}^*, k^*, \theta)}{\partial \theta} = 0$  から次式を得る。

$$\frac{S'_N(\theta^*)}{S_N^2(\theta^*)} = \tau. \quad (20)$$

ここで、 $N$  が大きい極限で極値を与える  $\theta^*$  を具体的に求めるために  $S_N(\theta)$  の振る舞いについて考える。そこで、収益率行列  $X = \{x_{\mu\nu}/\sqrt{N}\} \in \mathbb{R}^{N \times p}$  を  $N$  次直交行列  $U$  と  $p$  次直交行列  $V$ 、および対角成分に特異値を持つ対角行列  $D \in \mathbb{R}^{N \times p}$  を用いて  $X = UDV^T$  として特異値分解を行う。つまり  $J = UDD^T U^T$  となり、これを用いて

$S_N(\theta)$  は,

$$\begin{aligned}
S_N(\theta) &= \frac{\vec{e}^T (J - \theta I_N)^{-1} \vec{e}}{N} \\
&= \frac{\vec{e}^T U (DD^T - \theta I_N)^{-1} U^T \vec{e}}{N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k^2 \frac{1}{\lambda_k - \theta} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \theta} \delta(\lambda - \lambda_k) d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \theta} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k^2 \delta(\lambda - \lambda_k) d\lambda,
\end{aligned} \tag{21}$$

となる。ただし、3行目は新たに  $\vec{u}$  を、 $\vec{u} = U^T \vec{e} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N$  で定義し、4行目はデルタ関数  $\delta(x)$  の性質： $f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx$  を用いた。また  $\vec{u}^T \vec{u} = \vec{e}^T \vec{e} = N$  より、 $N$  が大きい極限で  $u_k$  は平均 0、分散 1 の正規分布に従うことが知られている [15]。さらに、自己平均性の性質を用いて  $S_N(\theta)$  は、次式で与えられる  $S(\theta)$  に収束する。

$$\begin{aligned}
S(\theta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} E[S_N(\theta)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \theta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E[u_k^2] \delta(\lambda - \lambda_k) d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \theta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(\lambda - \lambda_k) d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda - \theta} d\lambda.
\end{aligned} \tag{22}$$

ただし、 $\rho(\lambda) (= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(\lambda - \lambda_k))$  は分散共散行列  $J$  の漸近固有値分布を表す。また、特に  $\theta \in D := \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$  に対して定義される式 (22) を一般に Stieltjes 変換と呼び [16][17]、本研究を通して最適解の振る舞いを評価する上で重要な役割を果たす。ここで仮定より、収益率行列  $X$  の要素  $x_{i,j}/\sqrt{N}$  は独立に平均 0、分散  $1/N$  の分布に従う。このとき、 $\rho(\lambda)$  は Marčenko-Pastur 則により次式で与えられることが知られている [18]。

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{[\lambda_+ - \lambda]^+ [\lambda - \lambda_-]^+}}{2\pi\lambda} & \alpha \geq 1 \\ (1 - \alpha)\delta(\lambda) + \frac{\sqrt{[\lambda_+ - \lambda]^+ [\lambda - \lambda_-]^+}}{2\pi\lambda} & 0 < \alpha < 1 \end{cases} \tag{23}$$

ただし、 $[x]^+ = \max(x, 0)$  であり、シナリオ比  $\alpha (= p/N)$  に対して  $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{\alpha})^2$  である。これより、 $S(\theta)$  は式 (23) で与えられる  $\rho(\lambda)$  を用いて式 (22) の積分を実行すれば良いことが分かる。そこで、 $\alpha$  の範囲に注意して留数定理を用いて  $S(\theta)$  を計算すると、

$$S(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha - 1 - \theta - \sqrt{(1 + \alpha - \theta)^2 - 4\alpha}}{2\theta} & \lambda_+ < \theta \\ \infty & \lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+ \\ \frac{\alpha - 1 - \theta + \sqrt{(1 + \alpha - \theta)^2 - 4\alpha}}{2\theta} & \lambda_- > \theta \end{cases} \tag{24}$$

となる。これより、 $\lambda_- > \theta$ ,  $\lambda_+ < \theta$  の範囲で式 (20) の  $S_N(\theta)$  を式 (24) の  $S(\theta)$  に置き換えて  $\theta^*$  を求めると、

$$\theta^* = 1 + \alpha + c(2\tau - 1) \sqrt{\frac{\alpha}{\tau(\tau - 1)}}, \tag{25}$$

となる。ただし、 $c$  を次式で与える。

$$c = \begin{cases} +1 & \lambda_+ < \theta \\ -1 & \lambda_- > \theta \end{cases} \quad (26)$$

次に、最小値を与える  $c$  について考える。ここでは、 $c$  の値を特定するために  $\mathcal{L}_N(\bar{\omega}, k, \theta)$  の Hesse 行列  $H$  が  $N$  の大きい極限で正定値行列 (固有値  $\lambda^H$  に対して  $\forall i, \lambda_i^H > 0$ ) になる条件を用いる。ここで、 $H$  の要素  $H_{ij}$  は、

$$H_{ij} = J_{ij} - \theta \delta_{ij}, \quad (27)$$

で与えられる。ただし、 $\delta_{ij}$  は、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

である。式 (27) より、 $\lambda^H$  は分散共分散行列  $J$  の固有値  $\lambda^J$  を用いて  $\lambda^H = \lambda^J - \theta$  となるので、 $H$  が正定値行列になるためには  $J$  の最小固有値  $\lambda_{\min}^J$  を用いて、

$$\lambda_{\min}^J - \theta > 0, \quad (28)$$

を満たせば良いことが分かる。また、 $\lambda_{\min}^J$  は  $N$  の大きい極限で Marčenko-Pastur 則より、

$$\lambda_{\min}^J = \begin{cases} \lambda_- & \alpha \geq 1 \\ 0 & 0 < \alpha < 1 \end{cases} \quad (29)$$

であることが知られている [18]。以降、(i)  $\alpha \geq 1$  と (ii)  $0 < \alpha < 1$  の場合に分けて式 (28) の条件を議論する。

### (i) $\alpha \geq 1$ の場合

初めに、 $\alpha \geq 1$  の場合について考える。式 (26) と式 (28) の条件より、

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}^J - \theta &= \lambda_- - \theta > 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_- &> \theta, \end{aligned} \quad (30)$$

であることから最小値を与える  $\theta^*$  の  $c$  は、 $c = -1$  となる。従って、 $\alpha \geq 1$  で最小値を与える Lagrange 乗数  $\theta_a^*$  は、次式となる。

$$\theta_a^* = 1 + \alpha - (2\tau - 1) \sqrt{\frac{\alpha}{\tau(\tau - 1)}}. \quad (31)$$

### (ii) $0 < \alpha < 1$ の場合

次に、 $0 < \alpha < 1$  の場合について考える。式 (26) と式 (28) の条件より、

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}^J - \theta &= 0 - \theta > 0 \\ \Leftrightarrow 0 &> \theta, \end{aligned} \quad (32)$$

であることから最小値を与える  $\theta^*$  の  $c$  は、 $c = -1$  となる。特に、

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}^J - \theta^* &= 0 - \theta^* \\ &= - \left( 1 + \alpha - (2\tau - 1) \sqrt{\frac{\alpha}{\tau(\tau - 1)}} \right) \\ &= - \left( \sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{\tau}{\tau - 1}} \right) \left( \sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{\tau - 1}{\tau}} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

であることから、式 (33) の  $\lambda_{\min}^J - \theta^*$  が式 (28) の条件を満たす  $\alpha$  の範囲を求めると、

$$1 - \frac{1}{\tau} < \alpha < 1 \quad (34)$$

となる。従って、式 (34) を満たす範囲で最小値を与える Lagrange 乗数は  $\theta_a^*$  となる。逆に  $\alpha$  が、

$$0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{\tau}, \quad (35)$$

を満たす範囲では  $0 - \theta_a^* \leq 0$  となり式 (28) の条件を満たさないので、双対理論を用いて最小値を与える  $\theta$  を考える。

そこで、Lagrange 双対関数  $U(\theta)$  を以下で与える。

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} U_N(\theta) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{S(\theta)} + \tau\theta \right). \end{aligned} \quad (36)$$

ただし、 $U_N(\theta) = \mathcal{L}_N(\bar{\omega}^*, k^*, \theta)$  である。ここで、 $U(\theta)$  の 2 階偏導関数が、

$$\frac{\partial^2 U(\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{\alpha}{\left( (\theta - 1 - \alpha)^2 - 4\alpha \right)^{3/2}} < 0, \quad (37)$$

であることから  $U(\theta)$  は単調減少関数となる。このとき、 $U(\theta)$  の 1 階偏導関数が 0 となる  $\theta$  は  $\theta_a^*$  で与えられるが、式 (35) を満たす範囲で  $\theta_a^* \geq 0$  であるため、式 (28) の条件を満たす範囲で  $U(\theta)$  を最大にする  $\theta_b^*$  は、

$$\theta_b^* \simeq 0, \quad (38)$$

となる。以上、(i)(ii) の議論を踏まえてリスク関数  $\mathcal{H}(\bar{\omega})$  を最小化する Lagrange 乗数  $\theta$  は、

$$\theta = \begin{cases} 1 + \alpha - (2\tau - 1) \sqrt{\frac{\alpha}{\tau(\tau - 1)}} & 1 - \frac{1}{\tau} < \alpha \\ 0 & 0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{\tau}, \end{cases} \quad (39)$$

となる。また、式 (39) に対応する  $\frac{1}{S(\theta)}$  は次式となる。

$$\frac{1}{S(\theta)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha\tau}{\tau - 1}} - 1 & 1 - \frac{1}{\tau} < \alpha \\ 0 & 0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{\tau}, \end{cases} \quad (40)$$

最後に最小投資リスク  $\varepsilon$  を導出する。初めに、リスク  $\varepsilon (= \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N)$  を  $\theta$  を用いて表すと、

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathcal{H}(\bar{\omega}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{S_N(\theta)} \right)^2 \left( S_N(\theta) + \frac{\bar{e}^T (J - \theta I_N)^{-2} \bar{e}}{N} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{S(\theta)} + \frac{S'(\theta)}{S^2(\theta)} \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{S(\theta)} + \tau\theta \right), \end{aligned} \quad (41)$$

となる。ただし、4 行目は式 (20) の関係式を用いた。ここで、式 (41) に式 (39) の  $\theta$  を代入して整理すると  $\varepsilon$  はそれぞれ、

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{-1 + \tau + \alpha\tau - 2\sqrt{\alpha\tau(\tau - 1)}}{2} & 1 - \frac{1}{\tau} < \alpha \\ 0 & 0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{\tau} \end{cases} \quad (42)$$

となる。以上より、予算制約と集中投資度制約がある場合の最小投資リスクが求まり、この結果は先行研究のレプリカ解析の結果とも一致していることが分かる [11]。



## 5 数値実験

本章では、前章で導出した結果が理論的に正しいことを確認するために数値実験を用いて検証を行う。そのために、リスク  $\varepsilon$  に関して数値実験を行い、式 (42) で与えられる理論値と比較する。また、理論値を導出する過程で銘柄数  $N$  が十分に大きいとき、個別の収益率セットに対するリスクと収益率で平均化したリスクが一致する (自己平均性) ことを用いて解析を行った。この性質が成り立つことを確認するために、 $N = 500$  に対して数値実験の試行回数  $M$  を (i)  $M = 100$  と (ii)  $M = 1$  にして行う。

数値実験は修正された収益率  $x_{k\mu}$  を正規分布 ( $E[x_{k\mu}] = 0$ ,  $V[x_{k\mu}] = 1$ ) で与え、制約条件として集中投資度  $\tau = 2$  に設定する。また、シナリオ比  $\alpha$  は  $0.1 \leq \alpha \leq 5$  となるように  $p$  を与える。ここで、本設定における理論値を以下に記す。

$$\varepsilon = \begin{cases} \alpha - \sqrt{2\alpha} + 0.5 & 0.5 < \alpha \\ 0 & 0 < \alpha \leq 0.5 \end{cases} \quad (43)$$

### (i) 試行回数 $M = 100$ の場合

初めに、試行回数  $M = 100$  の場合の実験結果を図 1 に示す。縦軸は 1 銘柄当たりの最小投資リスク、横軸はシナリオ比  $\alpha$  であり、丸が数値実験の値、バツ印が理論値を表している。図 1 より、最小投資リスク  $\varepsilon$  は数値実験の値と理論値が完全に一致していることからランダム行列理論、レプリカ解析とも理論値が正しいことが分かる。

### (ii) 試行回数 $M = 1$ の場合

次に、試行回数  $M = 1$  の場合の実験結果を図 2 に示す。図 2 より、数値実験と理論値に多少の誤差が生じているが  $N$  がさらに大きくなれば理論値と完全に一致することが予想される。また一般に、投資家が対象とする銘柄数  $N$  は  $N = 10^3 \sim 10^5$  程度であることから、 $N$  が大きければこの結果は十分有効であると言える。

## 6 まとめと今後の課題

本研究ではポートフォリオ最適化問題を定式化するために平均分散モデルを適用し、予算制約と集中投資度制約の下で 1 銘柄あたりの最小投資リスクを求める問題考えた。本研究の位置づけは、同問題に対して先行研究で議論されたレプリカ解析から得られる最小投資リスクを厳密に検証することであり、そのためにランダム行列理論の漸近固有値分布や固有値分布の Stieltjes 変換を活用して再評価することを試みた。そして、ランダム行列理論を用いて導出された最小投資リスクがレプリカ解析と一致することを確認し、数値実験からも正しいことが示された。今後の課題として本研究では、Stieltjes 変換を用いて 1 銘柄あたりの最小投資リスクが解析的に求まることを示したが、これより収益率の分散が銘柄ごとに異なる場合の最小投資リスクや集中投資度も Stieltjes 変換に相当するパラメータを評価することができれば、分散共分散行列の固有値分布が具体的に分らなくても求まることが予想される。また、本研究では予算制約と集中投資度制約を拘束条件として用いたが、より現実的な期待収益制約や空売り規制、その他の線形不等式制約が課されている場合にもランダム行列のアプローチを拡張する必要がある。また、本研究で扱った平均分散モデル以外にも絶対偏差モデルや期待ショートフォールモデル等、別のモデルに対してもランダム行列を用いた解析手法を理論展開する必要があり、この研究に先駆けてレプリカ解析や確率伝搬法を用いてすでに部分的に解析が行われているため、それらの結果の検証を行うことも今後の課題として挙げられる。

## 参考文献

- [1] M. Markowitz, "Portfolio Selection," J. Finance Vol. 7, No. 1, pp. 77-91, 1952.
- [2] 今野浩：「理財工学 I」, 日科技連, 1959.
- [3] H. Konno and H. Yamazaki, "Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market," Man. Sci, Vol.37, pp. 519-531, 1991.
- [4] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, "Optimization of Conditional Value-at-Risk," J. of Risk, Vol. 2, pp. 21-41, 2000.
- [5] S. Ciliberti and M. Mezard, "Risk Minimization through Portfolio Replication," Eur. Phys. B Vo. 57, pp. 175-180, 2007.
- [6] S. Pafka and I. Kondor, "Noisy Covariance Matrices and Portfolio Optimization II, Physica A," The Institute of Electronics Information and Communication Engineers, Vol. 319, pp. 487-494, 2003.
- [7] T. Shinzato and M. Yasuda, "Statistical Mechanical Informatics for Portfolio Optimization Problems," The Institute of Electronics Information and Communication Engineers, Vol. 110, No. 265, pp. 257-263, 2010.
- [8] T. Shinzato and M. Yasuda, "Statistical Mechanical Informatics for Portfolio Optimization Problems with Short Selling," The Institute of Electronics Information and Communication Engineers, Vol.110, No. 461, pp. 23-28, 2011.
- [9] T. Shinzato, R. Wakai and Y. Shimazaki, "Statistical Mechanical Informatics for Portfolio Optimization Problems Including Distinct Variance," The Institute of Electronics Information and Communication Engineers, Vol, 111, No. 96, pp.125-130, 2011.
- [10] 若井亮介, 新里隆, 嶋崎善章：ランダム行列を用いたポートフォリオ最適化解析, 日本経営工学会論文誌, Vol. 65, No. 1, pp. 17-28, 2014.
- [11] T. Shinzato, "Minimal Investment Risk of Portfolio Optimization Problem with Budget and Investment Concentration Constraints," arXiv : 1605.06845, 2016.
- [12] 西森秀稔：「スピニングラス理論と情報統計力学」, 岩波書店, 1999.
- [13] I. Varga, F. Caccioli and I. Kondor, "Replica approach to mean-variance portfolio optimization," Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Vol. 2016, 2016
- [14] 田中利幸：レプリカ解析における解析接続について, 数理解析研究所講究録, Vol. 1532, pp. 118-129, 2007.
- [15] 永尾太郎：「ランダム行列の基礎」, 東京大学出版会, 2005.
- [16] Z. Bai, "Convergence Rate of Expected Spectral Distributions of Large Random Matrices. Part I. Wigner Matrices," The Annals of Probability, Vol. 21, No. 2, pp. 625-648, 1993.
- [17] Z. Bai, "Convergence Rate of Expected Spectral Distributions of Large Random Matrices. Part II. Sample Covariance Matrices," The Annals of Probability, Vol. 21, No. 2, pp. 649-672, 1993.
- [18] V. A. Marčenko and L. A. Pastur, "Distributions of eigenvalues for some sets of random matrices," Mathematics USSR-Sbornik, Vol. 1, pp. 457-483, 1967.

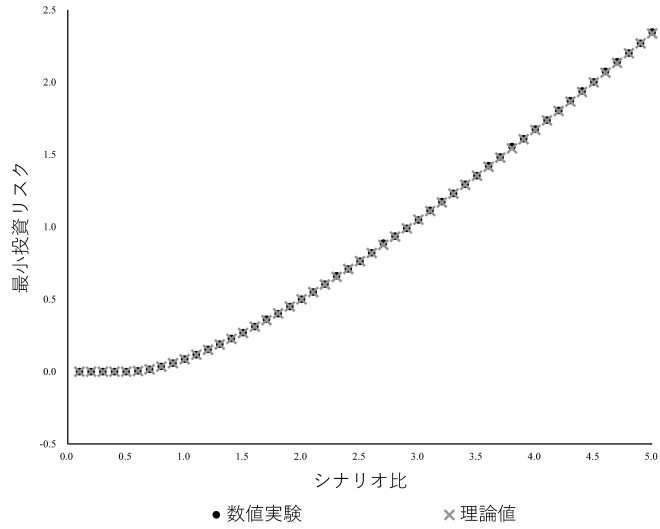


図1 最小投資リスク ( $M = 100$ )

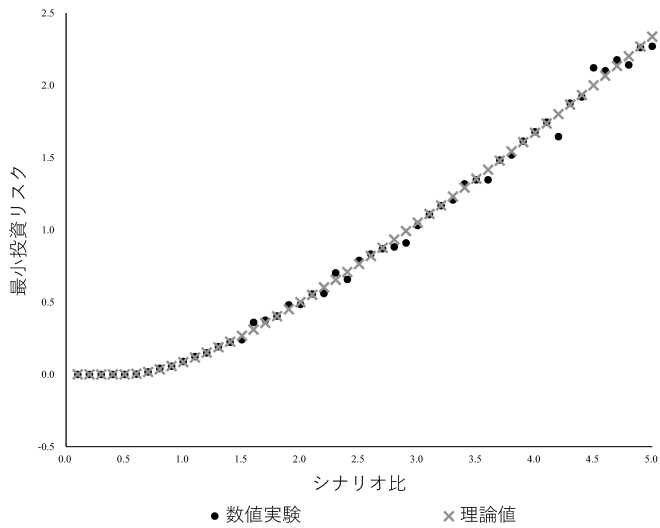


図2 最小投資リスク ( $M = 1$ )