数理解析研究所講究録
第2044巻 2017年 90-100

一般化 Ho–Lee モデルに基づく ゲーム・フォワード・スワップションの価格評価

SMBC日興証券株式会社・リスク管理部　蛯名安希
Aki Ebina
SMBC NIKKOSECURITIES INC

大阪大学大学院経済学研究科　落合夏海
Natsumi Ochiai
Graduate School of Economics, Osaka University

大阪大学大学院経済学研究科　大西匡光
大阪大学　数理・データ科学教育研究センター
Masamitsu Ohnishi
Graduate School of Economics, Osaka University
Center for Mathematical Modeling and Data Science, Osaka University

1 はじめに

ゲーム・スワップションとは，そのペイオフが金利や債券価格によって変化する，エキゾチックな金利デリバティブの一種である．1980年代初め以降，多くの金融機関は，顧客の様々なニーズに応えるために，そうした多様なエキゾチック型のデリバティブを提供してきた．一般に，多くのエキゾチック型のデリバティブの評価問題においては，その構造の複雑性から，解析的な解が存在しないことが知られており，それらデリバティブの評価については，数値計算手法に頼る必要がある．

本稿では，一般化 Ho–Lee モデル [1] に基づき，ツリー・メソッドによる，エキゾチックな金利デリバティブの評価法を提案する．一般化 Ho–Lee モデルとは，無裁定条件を満たす離散時間の金利の期間構造モデルの１つである．最初の無裁定な金利の期間構造モデルである Ho–Lee モデル [2] が示されてから，それを拡張もしくは修正する形で，いくつかの新たな離散時間の金利の期間構造モデルが提案されてきた [3]．とりわけ，Ho と Lee 自身が最近提案した一般化 Ho–Lee モデルでは，金利の期間構造の確率的な変動も，同様に，２項格子構造を使って表現する．一般化 Ho–Lee モデルは，２項格子上の金利ボラティリティが，時刻と状態に依存することから，現実のさまざまな金利の期間構造の変動を表現するのに非常に柔軟性をもった枠組みを与える．さらに，２項格子の全てのノード上において，金利の期間構造（同じ意味で，割引関数，イールド・カーブ，もしくは，フォワー

ド・カーブ）を持つという優れた特長によって，固定クーポン債・変動クーポン債，もしくは，スワップレートのような，基本的な金利インスツルメントを，直接的に評価することが可能となる．

本稿で扱う，ゲーム型の構造を有する金利デリバティブの評価問題に関しては，いくつかの先行研究がある．とりわけ，Ben et al.[4] は，ゲームの特徴をもった仕組債に関する価格付け問題を扱っており，連続時間の金利モデルに動的計画法を適用することによって，その価値を近似的に計算した．一方，Ochiai and Ohnishi [5] は，同様の問題を，離散時間の２項格子構造のもとで考え，一般化 Ho–Lee モデルに基づいて，直接的に動的計画法を適用した．本稿は，Ochiai and Ohnishi [5] に従って，離散時間の無裁定な金利の期間構造モデルのもとで，エキゾチックな金利デリバティブの評価を行う．

ゲーム・スワップションとは，通常のスワップションを，ゲームの構造を持つように拡張した契約である．通常のスワップションでは，２つの当事者（固定金利支払い側と変動金利支払い側）の一方のみに対し，あらかじめ定められた将来時刻で，スワップ契約に入るための権利を与える．これに対し，ゲーム・スワップションでは，２つの当事者の両者に対し，あらかじめ定められた権利行使可能時刻の集合から，スワップ契約に入るための行使時刻を選ぶ権利が与えられる．本稿で扱うゲーム・フォワード・スタート・スワップションは，権利行使がされた場合に，対応するスワップ契約の開始時刻が，その権利行使時刻には依らず，あらかじめ決められたカレンダー時刻で開始される契約である．ゲーム・スワップションを評価するために，本稿では，確率ゲームによる定式化を行う．確率ゲームの理論は，Shapley[6] に由来する．確率ゲームにおけるプレイヤーは，時刻と状態に依存する，一連のステージ・ゲームをプレイする．一般化 Ho–Lee モデルを採用し，ゲーム・スワップションの評価問題に対し，確率ゲームの理論を適用することによって，問題をリスク中立確率測度下における，２項格子上の有限計画期間２人ゼロ和確率ゲームとして定式化する．このとき，ゲーム・スワップションの無裁定価格は，動的計画法にもとづいて，バックワード・インダクション・アルゴリズムを適用することによって，全体ゲームの値として求められる．一般化 Ho–Lee モデルにおける，２項格子の全てのノード上で金利の期間構造を持つ，という優れた特長によって，デリバティブ評価に必要な基礎的な情報がすでに得られていることから，その価格評価のためのアルゴリズムを，非常に効率的に実行することが可能となる．

2　一般化 Ho–Lee モデル

一般化 Ho–Lee モデルは，無裁定条件を満たす離散時間の金利の期間構造モデルであり，債券価格の確率的変動を，再結合する２項格子構造を用いて表現する．時刻 n，状態 i に対応する２項格子上のノードを (n,i)（ただし，$0 \le n \le N^*$，$0 \le i \le n$，N^* は有限計画期間）とする．また，ノード (n,i) における残存期間 T $(0 \le T \le N^*)$ の割引債価格を $P(n,i;T)$ と表記し，これは T 期後に１支払われる債券の価格を表す．デフォルトのない割引債の定義から，任意の時刻 n，状態 i について，$P(n,i;0)=1$ が成り立つ．さらに，初期時刻における任意の残存期間 T に対する債券価格 $P(0,0;T)$ は，初期のマーケットで観察することができ，それらは，初期時刻 0 での，割引関数やイールドカーブ，もしくはフォワードカーブを決定する．

モデルにおける金利変動の不確実性の大きさは，$\delta(n,i;T)$ $(0\le i\le n)$ で表され，

$$\delta(n,i;T) := \frac{P(n+1,i+1;T)}{P(n+1,i;T)}, \quad 0\le i\le n,\ 0\le n\le N^*. \tag{1}$$

により定義される．(1) 式は，つぎの時刻での債券価格の比率であり，2 項ボラティリティと呼ばれる．これが大きくなるにつれて，金利の不確実性も大きくなる．さらに，定義より，金利変動に不確実性がない場合，$\delta(n,i;T)=1$ となる．ノード (n,i) での 1 期間 2 項ボラティリティは，

$$\delta(n,i;1) := \exp\left(-2\sigma(n)\min\{R(n,i;1),R\}\Delta t^{3/2}\right), \quad 0\le i\le n,\ 0\le n\le N^*, \tag{2}$$

で与えられる．ここで，$R(n,i;1)$ はノード (n,i) での 1 期間金利，R は閾値金利，Δt は 1 期間の区間を表し，$\sigma(n)$ は，金利ボラティリティの期間構造を表す関数で，

$$\sigma(n) := (\sigma_0-\sigma_\infty+\alpha_0 n)\exp(-\alpha_\infty n)+\alpha_1 n+\sigma_\infty, \quad n=0,1,\ldots, \tag{3}$$

によって与えられる．(3) 式で，σ_0 は短期金利ボラティリティ，$\alpha_1 n+\sigma_\infty$ は，十分大きな時刻 n での短期金利のフォワード・ボラティリティの近似値，$\alpha_0+\alpha_1$ と α_∞ は，それぞれ，短期と長期のボラティリティの期間構造の傾きを表す．

一般化 Ho–Lee モデルは，無裁定な金利の期間構造モデルであることから，各ノード (n,i) において，すべての異なる満期の債券価格が，リスク中立確率 $\mathbb{Q}$ の下で，以下のリスク中立評価公式：

$$\begin{aligned}P(n,i;T) &= P(n,i;1)\left\{(1-q)P(n+1,i;T-1)+qP(n+1,i+1;T-1)\right\} \qquad (4)\\ &= \frac{1}{2}P(n,i;1)\left\{P(n+1,i;T-1)+P(n+1,i+1;T-1)\right\}, \quad 0\le i\le n,\ 0\le n\le N^*\end{aligned}$$

を満たすようにモデル化される必要がある．ここで，(4) 式において，簡単化のため，次の時刻における推移確率 $q, 1-q\in(0,1)$ に対し，等確率 $q=1-q=1/2$ を仮定した．(1) 式と (4) 式を直接適用することによって，一般化 Ho–Lee モデルにおける無裁定条件は，T 期間 2 項ボラティリティとして，

$$\delta(n,i;T) = \delta(n,i;1)\delta(n{+}1,i;T{-}1)\left(\frac{1+\delta(n+1,i+1;T-1)}{1+\delta(n+1,i;T-1)}\right), \quad 0\le i\le n,\ 0\le n\le N^*. \tag{5}$$

によって与えられる．従って，(5) 式によって T 期間 2 項ボラティリティが定義されるときに限り，一般化 Ho–Lee モデルは無裁定となる．このとき，ノード (n,i) での 1 期間割引債価格は，

$$P(n,i;1) = \frac{P(0,0;n+1)}{P(0,0;n)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\delta(k-1,0;n-k)}{1+\delta(k-1,0;n-k+1)}\right)\prod_{j=0}^{i-1}\delta(n-1,j;1). \tag{6}$$

として与えられ，また，ノード (n,i) での T 期間割引債価格は，

$$P(n,i;T) = \frac{P(0,0;n+T)}{P(0,0;n)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\delta(k-1,0;n-k)}{1+\delta(k-1,0;n-k+T)}\right)\prod_{j=0}^{i-1}\delta(n-1,j;T). \tag{7}$$

として与えられる．ここで，(6)，(7) 式の右辺において，第 1 項は，初期時刻のイールド・カーブから求められる所与の部分，第 2 項は，時刻に関する 2 項ボラティリティの積，第 3 項は，状態に関する 2 項ボラティリティの積を表す．

次に，一般化 Ho–Lee モデルにおける 1 期間割引債価格を導出するためのアルゴリズムを示す．一般化 Ho–Lee モデルの構築は，次の 5 つのステップからなる．

Step 1. ノード $(n,0)$ での 1 期間割引債価格の導出：

$$P(n,0;1)=\frac{P(0,0;n+1)}{P(0,0;n)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\delta(k-1,0;n-k)}{1+\delta(k-1,0;n-k+1)}\right); \tag{8}$$

Step 2. ノード (n,i) での 1 期間割引債価格の導出：

$$P(n,i;1)=P(n,0;1)\prod_{j=0}^{i-1}\delta(n-1,j;1), \quad i=1,\dots,n; \tag{9}$$

Step 3. 1 期間割引債価格から 1 期間利回りの導出：

$$R(n,i;1)=-\frac{\ln P(n,i;1)}{\Delta t}, \quad i=0,\dots,n; \tag{10}$$

Step 4. 1 期間 2 項ボラティリティの導出：

$$\delta(n,i;1)=\exp\left(-2\sigma(n)\min\{R(n,i;1),R\}\Delta t^{3/2})\right), \quad i=0,\dots,n; \tag{11}$$

Step 5. T 期間 2 項ボラティリティの導出：

$$\delta(n,i;T)=\delta(n,i;1)\delta(n+1,i;T-1)\left(\frac{1+\delta(n+1,i+1;T-1)}{1+\delta(n+1,i;T-1)}\right), \quad i=0,\dots,n. \tag{12}$$

上の (8) 式から (12) 式を再帰的に，初期時刻から前向きに解くことによって，2 項格子の全てのノード上での金利の期間構造を導出することができる．

3　ゲーム・フォワード・スタート・スワップションの価格評価

本稿で扱う「ゲーム・フォワード・スタート・スワップション」とは，権利行使時刻とは無関係に，あらかじめ定められた将来の時刻で，金利スワップに入る権利を与える契約である，フォワード・スタート・スワップションを，ゲーム版に拡張したものである．はじめに，金利スワップとは，2 つの当事者間で，あらかじめ定められた期間にわたって，共通の想定元本に対し，固定金利と変動金利を定期的に交換する取引である [7], [8]. 金利スワップにおける変動金利には，一般に，LIBOR レートが採用される．スワップションとは，金利スワップを原資産とするオプションである．ここで，固定払いのスワップション（payer swaption）とは，その保有者に対し，固定金利支払い側として，金利スワップに入る権利を与える契約である．一方，固定受けのスワップション（receiver swaption）とは，その保有者に対し，固定金利を受け取る側として，金利スワップに入る権利を与える契約

である．ヨーロピアン・タイプのスワップションの場合，その保有者は，満期時刻のみにおいて，スワップ契約に入るための権利を行使することが認められる．反対に，アメリカン・タイプのスワップションの場合，行使可能な期間の任意の時刻において，権利を行使することが可能である．さらに，これらの中間の性質を有するものとして，バミューダン・タイプのスワップションがあり，これは，行使可能な期間の間の，あらかじめ定められた複数の権利行使時刻の中から，最適なただ 1 つの権利行使時刻を選ぶ契約である．本稿では，バミューダン・タイプのスワップションを拡張したゲーム・スワップションを考える．

ゲーム・スワップションは，固定金利支払い側と変動金利支払い側の両者に対し，あらかじめ定められた複数の権利行使可能時刻の中から，最適な権利行使時刻を選んで，原資産である金利スワップに入る権利を与える契約である．ゲーム・フォワード・スタート・スワップションの時刻列を，

$$0 \leq N < M_0 < M_1 < \ldots < M_L \leq N^*, \tag{13}$$

で与える．ここで，N はスワップ契約の同意時刻，$M_0, M_1, \ldots, M_L$ は，固定金利と変動金利の交換時刻かつ変動金利の設定時刻，N^* は有限の計画期間とする．フォワード・スタート・スワップションであることから，

$$M_0 - N = \nu \Delta t, \quad \nu \geq 0. \tag{14}$$

であり，時刻 N でスワップションの権利が行使された後，一定時間後の将来時刻 M_0 において，初回の変動金利が設定され，以降 M_1 から M_L にわたって，L 回の金利の交換が行われる．金利交換の時間間隔は，

$$M_{k+1} - M_k = \kappa \Delta t, \quad k = 0, \ldots, L-1. \tag{15}$$

とし，以降の議論のため，$\kappa = 1$ を仮定する．

スワップ契約の同意時刻 N における，フォワード・スタート・スワップレートを $S_f(N, i)$ で表す．フォワード・スタート・スワップレートは，時刻 N において，スワップ契約の価値を 0 とするような固定金利の値を表し，それは，

$$S_f(N, i) := \frac{P(N, i; \nu) - P(N, i; \nu + L)}{\Delta t \displaystyle\sum_{\ell=1}^{L} P(N, i; \nu + \ell)}. \tag{16}$$

で与えられる．ここで，権利行使が遅延されるのに伴って，スワップションの残存期間も減少するため，N が大きくなるにつれて ν は減少する．

次に，ゲーム・フォワード・スタート・スワップションにおいて，固定金利支払い側が支払う固定金利の値（行使レート）を定義する．権利行使可能な時刻において，固定金利支払い側が権利を行使した場合，将来のスワップ契約期間にわたって，固定金利支払い側は固定金利 K_F を，変動金利支払い側に支払う．反対に，変動金利支払い側が権利を行使した場合，固定金利支払い側は固定金利 K_V を支払う．さらに，権利行使が認められた同じ時刻で，固定金利支払い側と変動金利支払い側がともに権利を行使した場合，固定金利支払い側は固定金利 K_B を支払う．ただし，この固定金利に対して，一般性を損なうことなく，

$$K_V \leq K_B \leq K_F. \tag{17}$$

を仮定する．

権利行使可能時刻の集合として，固定金利支払い側に対する複数の権利行使可能時刻の集合（N_F）と，変動金利支払い側に対する複数の権利行使可能時刻の集合（N_V），さらに，それぞれに対し，あらかじめ定められた行使可能な時間区間を，

$$N_F := \{N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_F}\} \subset \{N_b, N_{b+1}, \ldots, N_d\}; \tag{18}$$

$$N_V := \{N_{j_1}, N_{j_2}, \ldots, N_{j_V}\} \subset \{N_c, N_{c+1}, \ldots, N_e\}, \tag{19}$$

のように定義する．ここで，最終の権利行使可能時刻を $N_m := \max(N_F \cup N_V)$ とする．ゲーム・フォワード・スタート・スワップションが権利行使可能なノード (n,i) 上で権利行使されるとき，そのノード (n,i) でのフォワード・スタート・スワップのペイオフ価値を

$$W_f(n,i;k) := \Delta t[S_f(n,i) - k]\sum_{\ell=1}^{L} P(n,i;\nu+\ell). \tag{20}$$

で定義する．ここで，k は固定レート $k \in \{K_F, K_V, K_B\}$ を表す．

本稿では，上記のゲーム・フォワード・スタート・スワップションの価格評価問題を，2人ゼロ和停止ゲームと捉える．ゲームのプレイヤーは，固定金利支払い側と変動金利支払い側である．簡単化のため，それぞれを，固定金利プレイヤー，変動金利プレイヤーとよぶ．両プレイヤーは，ともに権利行使が認められたノード (n,i) $(n \in \{N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_F}\} \cap \{N_{j_1}, N_{j_2}, \ldots, N_{j_V}\})$ 上において，固定金利プレイヤーは純粋戦略 x を，変動金利プレイヤーは純粋戦略 y を，純粋戦略の集合 $S := \{\text{Exercise }(E), \text{Not exercise }(N)\}$ から選択する．ノード (n,i) 上で，純粋戦略の組（プロファイル）(x,y) が選ばれた時の，ゲーム・フォワード・スタート・スワップションのペイオフ価値は，以下によって定義される．

定義 3.1. 権利行使可能なノード (n,i) において，ゲーム・フォワード・スタート・スワップションが権利行使されるならば，そのペイオフ価値は以下となる．

$$A_f(x,y;n,i) = \begin{cases} W_f(n,i;K_F) & \text{固定金利プレイヤーが行使した場合;} \\ W_f(n,i;K_V) & \text{変動金利プレイヤーが行使した場合;} \\ W_f(n,i;K_B) & \text{両プレイヤーがともに行使した場合;} \\ [\text{継続価値}] & \text{両プレイヤーがともに行使しなかった場合.} \end{cases} \tag{21}$$

権利行使が認められたノード (n,i) 上において，両方のプレイヤーがともに権利を行使しないならば，その確率ゲームは，次の時刻において，以下のノード：

$$(n+1, I_{n+1}) = \begin{cases} (n+1, i+1) & \text{w.p. } q = 1/2; \\ (n+1, i) & \text{w.p. } 1-q = 1/2 \end{cases} \tag{22}$$

へ推移する．ここで，I_{n+1} は時刻 $n+1$ でのランダムな金利の状態を表す．

以上から，ゲーム・スワップションの当事者である固定金利プレイヤーと変動金利プレイヤーは，権利行使可能な各ノード (n,i) $(n \in \{N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_F}\} \cap \{N_{j_1}, N_{j_2}, \ldots, N_{j_V}\})$ において，その利得と状態推移の構造が，金利市場の状態と2人のプレイヤーの戦略（行動）に依存する，2人ゼロ和のステージ・ゲームに直面すると考えられる．このとき，固定金利プレイヤーは利得を最大化，変動金利プレイヤーは利得を最小化するように行動を選択する．

一般に，利得行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ で定義される 2 人ゼロ和ゲーム（行列ゲーム）が与えられるとき，ゲームの値を，

$$\mathrm{val}[A] := \min_{\boldsymbol{q}\in\Delta^n}\max_{\boldsymbol{p}\in\Delta^m} \boldsymbol{p}^T A\boldsymbol{q} = \max_{\boldsymbol{p}\in\Delta^m}\min_{\boldsymbol{q}\in\Delta^n} \boldsymbol{p}^T A\boldsymbol{q} \tag{23}$$

によって定義する．ここで，$\boldsymbol{p}$ は行プレイヤーの混合戦略を表す m 次元ベクトル，$\boldsymbol{q}$ は列プレイヤーの混合戦略を表す n 次元ベクトル，Δ^m，Δ^n は，それぞれのプレイヤーの全ての混合戦略の集合とし，上式の 2 番目の等号は，von Neumann のミニ・マックス定理による．

このとき，ノード (n,i) におけるゲーム・フォワード・スタート・スワップションの値を $V_f(n,i)$ とすると，この確率ゲームの解は，動的計画法の最適性の原理に基づいて，以下の最適性方程式を，時間に関してバックワードに解くことにより求めることができる．

Step 0. （終端条件） $n=N_m$ に対して，

$$V_f(n,i) = \mathrm{val}\begin{bmatrix} W_f(n,i;K_B) & W_f(n,i;K_F) \\ W_f(n,i;K_V) & 0 \end{bmatrix}, \quad i=0,\dots,n; \tag{24}$$

Step 1. (Recursion) $n=N_m-1$ から初期時刻 $n=0$ まで

Case 1-1. (両プレイヤーが権利行使可能) $n\in(N_F\cap N_V)\backslash\{N_m\}$ に対して，

$$V_f(n,i) = \mathrm{val}\begin{bmatrix} W_f(n,i;K_B) & W_f(n,i;K_F) \\ W_f(n,i;K_V) & U_f(n,i) \end{bmatrix}, \quad i=0,\dots,n; \tag{25}$$

Case 1-2. (固定金利プレイヤーが権利行使可能) $n\in(N_F\backslash N_V)\backslash\{N_m\}$ に対して，

$$V_f(n,i) = \max\{W_f(n,i;K_F), U_f(n,i)\}, \quad i=0,\dots,n; \tag{26}$$

Case 1-3. (変動金利プレイヤーが権利行使可能) $n\in(N_V\backslash N_F)\backslash\{N_m\}$ に対して，

$$V_f(n,i) = \min\{W_f(n,i;K_V), U_f(n,i)\}, \quad i=0,\dots,n; \tag{27}$$

Case 1-4. (両プレイヤーがともに権利行使不可能) $n\notin(N_F\cup N_V)\backslash\{N_m\}$ に対して，

$$V_f(n,i) = U_f(n,i), \quad i=0,\dots,n. \tag{28}$$

上式において，ノード (n,i) での継続価値を，

$$U_f(n,i) := P(n,i;1)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_f(n+1,I_{n+1})|(n,i)], \tag{29}$$

と定義しており，ここで，$P(n,i;1)$ はノード (n,i) での 1 期間割引因子で，これは一般化 Ho–Lee モデルに基づく 1 期間割引債価格である．また，$\mathbb{Q}$ はモデルにおけるリスク中立確率測度，$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot|(n,i)]$ は，$\mathbb{Q}$ の下でノード (n,i) を条件とする期待値演算子，I_{n+1} は，つぎの時刻 $n+1$ でのランダムな金利の状態を表す．終端条件 $n=N_m$ における継続価値は，ゲーム・スワップションの満期から，$P(n,i;1)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_s(n+1,I_{n+1})|(n,i)]=0$ となる．

両プレイヤーが権利行使可能なノード (n,i) では，２人のプレイヤーの行動選択の問題は，(25) 式内に現れる２人ゼロ和ゲーム（行列ゲーム）:

$$A_f(n,i) := \begin{bmatrix} W_f(n,i;K_B) & W_f(n,i;K_F) \\ W_f(n,i;K_V) & U_f(n,i) \end{bmatrix}, \tag{30}$$

を解く問題に帰着される．ここで，固定金利支払い側は利得最大化を行うので行プレイヤー，変動金利支払い側は利得最小化を行うので列プレイヤーとする．一般に，２人ゼロ和ゲームの鞍点均衡は，純粋戦略を含む混合戦略の中に存在することが知られている．しかし，以下の定理は，この確率ゲームでは，常に純粋戦略のなかに，その鞍点均衡があることを保証する．

定理 1. $K_V < K_F$，つまり，$K_V \le K_B < K_F$，もしくは，$K_V < K_B \le K_F$ を仮定する．そのとき，両プレイヤーが権利行使可能なノード $(n,i)(n \in N_F \cap N_V = \{N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_F}\} \cap \{N_{j_1}, N_{j_2}, \ldots, N_{j_V}\})$ において，このノードでプレイされる行列ステージ・ゲームは，純粋戦略の中に鞍点を持つ，すなわち，

$$\max_{x\in S}\min_{y\in S} A_f(x,y;n,i) = \min_{y\in S}\max_{x\in S} A_f(x,y;n,i). \tag{31}$$

ただし，純粋戦略 x，y は，それぞれ，固定金利プレイヤーと変動金利プレイヤーの純粋戦略である．さらに，E と N を，それぞれ，権利行使する（Exercise），権利行使しない（Not Exercise）という純粋戦略とする．そのとき，この行列ステージ・ゲームにおける均衡戦略プロファイル (x,y) は以下で与えられる：

$$\begin{cases} (E,N) & U_f(n,i) \le W_f(n,i;K_F) < W_f(n,i;K_V) \text{ の場合；} \\ (N,N) & W_f(n,i;K_F) < U_f(n,i) < W_f(n,i;K_V) \text{ の場合;} \\ (N,E) & W_f(n,i;K_F) < W_f(n,i;K_V) \le U_f(n,i) \text{ の場合.} \end{cases} \tag{32}$$

証明: 固定レートに関して，前者のケース $K_V \le K_B < K_F$ を仮定する．後者のケース $K_V < K_B \le K_F$ についても，同様の方法で証明される．仮定から，

$$W_f(n,i;K_F) \le W_f(n,i;K_B) < W_f(n,i;K_V). \tag{33}$$

が言える．

(i) もし，$U_f(n,i) \le W_f(n,i;K_F) \le W_f(n,i;K_B) < W_f(n,i;K_V)$ ならば，そのとき，純粋戦略 N が，変動金利プレイヤーにとっての弱支配戦略となる．それに対する固定金利プレイヤーの最適反応戦略は，純粋戦略 E であり，従って，$(x,y) = (E,N)$.

(ii) もし，$W_f(n,i;K_F) < U_f(n,i) < W_f(n,i;K_V)$ ならば, そのとき，両プレイヤーにとって純粋戦略 N が弱支配戦略となる．従って，$(x,y) = (N,N)$.

(iii) もし $W_f(n,i;K_F) \le W_f(n,i;K_B) < W_f(n,i;K_V) \le U_f(n,i)$ ならば，そのとき，純粋戦略 N が，固定金利プレイヤーにとっての弱支配戦略となる．それに対する変動金利プレイヤーの最適反応戦略は，純粋戦略 E であり，従って，$(x,y) = (N,E)$. □

以上の結果から，解くべき確率ゲームでは，純粋戦略のみを考えておけば十分であり，これによって，上記の最適性方程式を効率的に解くことが可能となる．

4 数値計算

本節では，上記の議論に基づき，ゲーム・フォワード・スタート・スワップションの価格評価を行い，その数値計算例を示す．一般化 Ho–Lee モデルの設定は，時間間隔 $\Delta t = 0.25$ (四半期)，閾値金利 $R = 0.3$ とし，5% のフラットなイールド・カーブを仮定する．ゲーム・フォワード・スタート・スワップションの満期は 5 年とし，固定金利プレイヤーと変動金利プレイヤーは，1 年目以降の任意の時刻で，スワップ契約に入る権利を行使することが可能である．もし権利が行使されれば，権利行使時刻には依らず，5 年目から，5 年間のスワップ契約が始まる．ここでは四半期の時間間隔を仮定しているため，両プレイヤーの権利行使可能時刻は，時刻 4 から時刻 20 までであり，権利が行使された場合，時刻 21 から対応するスワップ契約が開始される．さらに，スワップションの固定レートを， $K_F = 0.053$, $K_B = 0.050$, $K_V = 0.047$ とする．

表 1 は，上記設定のもとでの，ゲーム・フォワード・スタート・スワップションの数値計算結果を示している．表 1 において，横軸は時刻，縦軸は状態を表し，一番左のノードは初期時刻，一番右側のノードはスワップションの満期時刻におけるノードに対応する．表中，次の時刻における上への状態推移は，右斜め上のノードへの移動に対応し，一方，下への状態推移は，右隣りのノードへの移動に対応する．さらに，上側の囲まれた領域は，固定金利プレイヤーの行使領域，下側の囲まれた領域は，変動金利プレイヤーの行使領域を表す．フォワード・スタート・スワップレート $S_f(n, i)$ は，数値計算の結果から，任意の時刻 n において，状態 i の増加関数であることが確認された．従って，固定金利プレイヤーは，ペイオフ価値 $W_f(n, i; K_F)$ の最大化を行うため，状態 i がより大きいとき，権利行使を行う．一方，変動金利プレイヤーは，ペイオフ価値 $W_f(n, i; K_V)$ の最小化を行うため，状態 i がより小さいとき，権利行使を行う．その結果，固定金利プレイヤーの行使領域は上に，変動金利プレイヤーの行使領域は下にあると考えられる．また，表中の値は，固定金利プレイヤーにとってのスワップションの価値を示している．そのため，負の値は，そのノードにおけるスワップションが，変動金利プレイヤーにとって有利な状況であることを表す．さらに，スワップションの満期までの間，両プレイヤーがその権利を一度も行使しなければ，そのスワップションの価値は 0 となる．それに加えて，表 1 における行使領域の形状から，ゲーム・フォワード・スタート・スワップションにおける両プレイヤーの行使領域が閉じている，ということが確認される．つまり，いったん，時刻と状態の組 (n, i) が行使領域に入ったならば，将来何が起ころうとも，その領域から抜け出ることはない，ということを意味する．この性質が一般に成り立つかどうかを解析的に検証することは，今後の研究課題である．

5 まとめ

本稿は，ゲーム・フォワード・スタート・スワップションの価格評価手法を提案した．このゲーム・スワップションは，固定払いのスワップション（payer swaption）や固定受けのスワップション（receiver swaption）の一般化と捉えることができる．プレイン・バニラな金利スワップにおいては，スワップ契約の開始時刻におけるスワップレートを，その固定金利として設定することによって，その契約同意時刻における金利スワップの価値を，ほとんどゼロにすることが可能である．しかしながら，時間の経過とともに変動金利が大きく変化するにつれて，スワップ契約の 2 つの当事者のうち，一方の当事者にとっては，

																				0.1217
																			0.1117	0.1062
																		0.1022	0.0968	0.0911
																	0.0933	0.0879	0.0823	0.0766
																0.0848	0.0795	0.0740	0.0683	0.0624
															0.0768	0.0715	0.0661	0.0605	0.0547	0.0488
														0.0691	0.0639	0.0586	0.0531	0.0474	0.0416	0.0356
													0.0619	0.0567	0.0514	0.0460	0.0404	0.0347	0.0289	0.0229
												0.0549	0.0499	0.0446	0.0392	0.0337	0.0281	0.0224	0.0166	0.0107
											0.0483	0.0433	0.0381	0.0328	0.0274	0.0219	0.0163	0.0108	0.0053	0
										0.0420	0.0370	0.0320	0.0268	0.0216	0.0164	0.0113	0.0066	0.0026	0	0
									0.0360	0.0312	0.0262	0.0213	0.0164	0.0118	0.0075	0.0039	0.0013	0	0	0
								0.0304	0.0257	0.0211	0.0165	0.0121	0.0081	0.0047	0.0020	0.0002	-0.0009	-0.0018	-0.0036	-0.0073
							0.0252	0.0208	0.0165	0.0123	0.0086	0.0052	0.0025	0.0004	-0.0013	-0.0028	-0.0048	-0.0078	-0.0122	-0.0173
						0.0205	0.0164	0.0125	0.0089	0.0056	0.0028	0.0005	-0.0015	-0.0034	-0.0055	-0.0084	-0.0122	-0.0169	-0.0219	-0.0269
					0.0163	0.0126	0.0091	0.0059	0.0031	0.0006	-0.0016	-0.0037	-0.0060	-0.0088	-0.0124	-0.0166	-0.0214	-0.0263	-0.0312	-0.0362
				0.0126	0.0092	0.0061	0.0033	0.0007	-0.0016	-0.0039	-0.0064	-0.0092	-0.0125	-0.0165	-0.0209	-0.0257	-0.0305	-0.0354	-0.0402	-0.0450
			0.0093	0.0062	0.0034	0.0008	-0.0017	-0.0041	-0.0066	-0.0094	-0.0126	-0.0164	-0.0206	-0.0251	-0.0298	-0.0346	-0.0394	-0.0441	-0.0488	-0.0535
		0.0063	0.0035	0.0009	-0.0016	-0.0041	-0.0067	-0.0095	-0.0127	-0.0163	-0.0203	-0.0246	-0.0292	-0.0339	-0.0385	-0.0432	-0.0479	-0.0525	-0.0571	-0.0617
	0.0036	0.0009	-0.0016	-0.0042	-0.0068	-0.0096	-0.0127	-0.0162	-0.0200	-0.0242	-0.0286	-0.0331	-0.0377	-0.0423	-0.0469	-0.0515	-0.0560	-0.0606	-0.0650	-0.0695
0.001	-0.0016	-0.0042	-0.0068	-0.0096	-0.0127	-0.0161	-0.0198	-0.0238	-0.0281	-0.0325	-0.0370	-0.0415	-0.0460	-0.0505	-0.0550	-0.0595	-0.0639	-0.0683	-0.0727	-0.0770
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Time step

表 1: ゲーム・フォワード・スタート・スワップション価格と行使領域

大きな正の価値を，他方の当事者にとっては，大きな負の価値をもたらすかもしれない．また，通常のスワップションの場合，一方の当事者のみに対し，原資産であるスワップ契約に入る権利が与えられるため，実際の変動金利の変化に関わらず，その当事者にとってのスワップションの価値は，ずっと正のままとなる．これによって，そのスワップション価値は，そのスワップションの保有者側にとっては大きな正に，もう一方の側にとっては，大きな負となり得るだろう．これに対して，本稿で新たに提案するゲーム・スワップションの場合，プレイン・バニラな金利スワップと同様に，行使レート K_F, K_B, K_V を適切に設定することによって，契約同意時刻における２つの当事者にとっての契約の価値は，ほとんどゼロにすることが可能である．これに加えて，時間の経過とともに変動金利が大きく変動した場合でも，ゲーム・スワップションにおいては，両方の当事者が，スワップ契約に入る権利を有しているので，その契約価値は，２つの当事者の双方にとって，非常に不利になりすぎることはない，と考えられる．この優れた特徴によって，ゲーム・スワップションは，両当事者にとって，起こり得る契約リスクを削減するよう，適切に設計されたデリバティブであると言える．

本稿においては，金利の期間構造モデルとして一般化 Ho–Lee モデルを用いて，ゲーム・フォワード・スタート・スワップションの無裁定価格と行使領域に対する計算手法の提案を行った．今後の研究としては，両プレイヤーの行使領域の構造に関する数値的な分析が，残された課題である．

参考文献

[1] Ho, T. S. Y. and Lee, S. B., Generalized Ho–Lee Model: A Multi–Factor State–Time Dependent Implied Volatility Function Approach, *The Journal of Fixed Income*, Vol. 17, No. 3 (Winter 2007), pp. 18–37, 2007.

[2] Ho, T. S. Y. and Lee, S. B., Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *The Journal of Finance*, Vol. 41, pp. 1011–1029, 1986.

[3] van der Hoek, J. and Elliott, R. J., *Binomial Models in Finance*, Springer Finance, Springer, 2006.

[4] Ben-Ameur, H., Breton, M., Karoui, L., and L'Ecuyer, P., A Dynamic Programming Approach for Pricing Options Embedded in Bonds, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 31, pp. 2212–2233, 2007.

[5] Ochiai, N. and Ohnishi, M., Valuation of Game Option Bonds under the Generalized Ho–Lee model: A Stochastic Game Approach, *Journal of Mathematical Finance*, Vol. 5, No. 4 (November 2015), 2015.

[6] Shapley, L. S., Stochastic Games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 39, No. 10, pp. 1095–1100, 1953.

[7] Hull, J. C., *Options, Futures, and Other Derivatives*, 9th Edition, Pearson Education, 2014.

[8] Kolb, R. W., *Futures, Options, and Swaps*, 4th Edition, Wiley–Blackwell Publishing, 2003.

[9] Ochiai, N. Study on Valuation of exotic Interest Rate Derivatives under the Generalized Ho–Lee Model, Ph. D Dissertation, Graduate School of Economics, Osaka University, 2016.

[10] Ochiai, N. and Ohnishi, M., Pricing of the Bermudan Swaption under the Generalized Ho–Lee Model, *Kôkyûroku of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Kyoto University, Vol. 1802, pp. 256–262, 2012.