数理解析研究所講究録
第2044巻 2017年 112-119

セミフィボナッチ計画法

— 不等式アプローチ —

岩本誠一* (九州大学·名誉教授), 木村寛 † (秋田県立大学)

概 要

本報告では、セミフィボナッチ制約下で2次計画の最小化問題と最大化問題の対を2つ考え、それぞれの対が互いに双対であることを示す。さらに、一方の対ではFibonacci identical dualityが成り立ち、他ではreversed-Golden identical dualityが成り立つことを示す。特に一方の対では、主問題と双対問題の最適点がともにダ・ヴィンチ・コードを成している。双対性および最適解は相加相乗平均不等式を用いて導く。本報告では8変数を対象に述べるが、一般の$2n$変数問題についても成り立つ。

1 セミフィボナッチ計画

一般に、**フィボナッチ数列**(Fibonacci sequence)は2階線形差分方程式(3項間漸化式)

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1,\ x_0 = 0 \tag{1}$$

の解として定義される(表1)。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

表1 フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

まず、8変数の条件付き最小化問題

$$(\mathrm{P}_1) \quad \begin{array}{lll} \text{minimize} & y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2+y_6^2+y_7^2+y_8^2 & \\ \text{subject to} & \text{(i)} & y_1+y_2 = y_3 \\ & \text{(ii)} & y_3+y_4 = y_5 \\ & \text{(iii)} & y_5+y_6 = y_7 \\ & \text{(iv)} & y_7+y_8 = c \\ & \text{(v)} & y \in R^8 \end{array}$$

*† 本研究は、科学研究費補助金「平成26年度基盤研究(C)」課題番号26400207の助成を受けた。

を考える。ただし $c \in R^1$. ここで (P_1) は 4 線形制約下の 8 平方和最小化問題であり、制約はフィボナッチ数列の定義式の跳び跳びになっている。この制約を**セミフィボナッチ**(semi-Fibonacci) という。セミフィボナッチ制約下の数理計画を**セミフィボナッチ計画**(semi-Fibonacci programming) という。ここでは 2 次関数を目的式にしているので、このセミフィボナッチ計画は 2 次計画である。(P_1) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8)$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{F_8}{F_9}c^2 = \dfrac{21}{34}c^2$ をもつ。

他方、8 変数の条件付き最大化問題

$$(\mathrm{D}_1)\qquad \begin{array}{lrl} \text{Maximize} & \multicolumn{2}{l}{-(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_4^2+\mu_5^2+\mu_6^2+\mu_7^2+\mu_8^2)+2c\mu_8} \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})' & \mu_1 = \mu_2 \\ & (\mathrm{ii})' & \mu_2+\mu_3 = \mu_4 \\ & (\mathrm{iii})' & \mu_4+\mu_5 = \mu_6 \\ & (\mathrm{iv})' & \mu_6+\mu_7 = \mu_8 \\ & (\mathrm{v})' & \mu \in R^8 \end{array}$$

を考える。これもセミフィボナッチ計画であり、

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = \frac{c}{F_9}\big(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8\big)$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

(P_1) と (D_1) の間には以下の **Fibonacci identical duality** (FID) が成り立つ：

1. (duality)　(P_1) と (D_1) は互いに双対である。
2. (identical)　(P_1) と (D_1) のそれぞれの最適点と最適値は共に一致する。
3. (Fibonacci)　(P_1) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8) \tag{2}$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。(D_1) も

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8) \tag{3}$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

ここに $F_1, F_2, \ldots, F_9$ はフィボナッチ数列の第 1 項から第 9 項である（表 1）。両問題の最適解（点と値）は共にフィボナッチ数列で表されている。特に、$c = F_9$ のときは、最小

点と最大点は共にダ・ヴィンチ・コード [7] になり、最小値と最大値は $m = M = F_8F_9$ になる。

次に、8 変数の条件付き最小化問題

$$
(\mathrm{P}_2)\quad
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \multicolumn{2}{l}{\phi y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_8^2} \\
\text{subject to} & \text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 \\
 & \text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 \\
 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\
 & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c \\
 & \text{(v)} & y \in R^8
\end{array}
$$

と、8 変数の条件付き最大化問題

$$
(\mathrm{D}_2)\quad
\begin{array}{lll}
\text{Maximize} & \multicolumn{2}{l}{-(\phi\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2c\mu_8} \\
\text{subject to} & \text{(i)}' & \phi\mu_1 = \mu_2 \\
 & \text{(ii)}' & \mu_2 + \mu_3 = \mu_4 \\
 & \text{(iii)}' & \mu_4 + \mu_5 = \mu_6 \\
 & \text{(iv)}' & \mu_6 + \mu_7 = \mu_8 \\
 & \text{(v)}' & \mu \in R^8
\end{array}
$$

を考える。(P_2) と (D_2) も共にセミフィボナッチ計画であり、(P_2) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = c\,(\phi^{-8},\ \phi^{-7},\ \ldots,\ \phi^{-1})$$

のとき、最小値 $m = \phi^{-1}c^2$ をもつ。(D_2) は

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = c\,(\phi^{-8},\ \phi^{-7},\ \ldots,\ \phi^{-1})$$

のとき、最大値 $M = \phi^{-1}c^2$ をもつ。ここに ϕ は黄金数 (Golden number)

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$

である。

(P_2) と (D_2) はそれぞれ最小値 $m = \phi^{-1}c^2$ と最大値 $M = \phi^{-1}c^2$ をもつ。すなわち最適値は一致している。また両問題は黄金数 ϕ で特徴づけられる同一最適点 (*identical optimal point*) をもつ。よって、次の **reversed-Golden identical duality** (r-GID) が成り立つ :

1. (duality)　(P_2) と (D_2) は互いに双対である。
2. (identical)　(P_2) と (D_2) の最適点と最適値は共に一致する。
3. (reversed Golden)　(P_2) は

   $$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = c\,(\phi^{-8},\ \phi^{-7},\ \ldots,\ \phi^{-1}) \tag{4}$$

   のとき、最小値 $m = \phi^{-1}c^2$ をもつ。(D_2) も

   $$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = c\,(\phi^{-8},\ \phi^{-7},\ \ldots,\ \phi^{-1}) \tag{5}$$

   のとき、最大値 $M = \phi^{-1}c^2$ をもつ。両問題の最適点は共に黄金数で表されている。

尚、最適点が共に $c\,(\phi^{-1},\ \phi^{-2},\ \ldots,\ \phi^{-8})$ のとき、Golden identical duality (GID) といい、これを**黄金経路**(Golden path) という [7]。

2 不等式アプローチ

定理 1 任意の $x, y \in R^1$ に対して

$$2xy \ \leq\ x^2 + y^2 \tag{6}$$

が成り立つ。等号は $x\ =\ y$ のときに限り成り立つ。

不等式 (6) は**相加・相乗平均不等式**（arithmetic-geometric mean inequality, AG）とも呼ばれる。

補題 1 (Equality) $(y_1, y_2, \ldots, y_8)$ と $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ が条件 (i)〜(iv) と (i)′〜(iv)′

$$\begin{array}{rrcl rrcl}
\text{(i)} & y_1 + y_2 &=& y_3 & \text{(i)}' & \mu_1 &=& \mu_2 \\
\text{(ii)} & y_3 + y_4 &=& y_5 & \text{(ii)}' & \mu_2 + \mu_3 &=& \mu_4 \\
\text{(iii)} & y_5 + y_6 &=& y_7 & \text{(iii)}' & \mu_4 + \mu_5 &=& \mu_6 \\
\text{(iv)} & y_7 + y_8 &=& c & \text{(iv)}' & \mu_6 + \mu_7 &=& \mu_8
\end{array}$$

を満たすとき、次の関係式が成り立つ：

$$\sum_{k=1}^{8} y_k \mu_k \ =\ c\mu_8. \tag{7}$$

Proof. 条件 (i)〜(iv) と (i)′〜(iv)′ をそれぞれ満たす任意の $(y_1, y_2, \ldots, y_8)$ と $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{8} y_k \mu_k \ &=\ y_1\mu_2 + (y_3 - y_1)\mu_2 + y_3(\mu_4 - \mu_2) + (y_5 - y_3)\mu_4 \\
&\qquad + y_5(\mu_6 - \mu_4) + (y_7 - y_5)\mu_6 + y_7(\mu_8 - \mu_6) + (c - y_7)\mu_8 \\
&=\ c\mu_8.
\end{aligned}$$

□

(P_1) と (D_1)、また (P_2) と (D_2) がそれぞれ互いに双対であることを、AG 不等式 (6) に基づく手法により示す。

まず $y\ =\ (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) \in R^8$ を (P_1) の実行可能解、$\mu\ =\ (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) \in R^8$ を (D_1) の実行可能解とする。すなわち、y と μ は次を満たしている。

$$\begin{array}{rrcl rrcl}
\text{(i)} & y_1 + y_2 &=& y_3 & \text{(i)}' & \mu_1 &=& \mu_2 \\
\text{(ii)} & y_3 + y_4 &=& y_5 & \text{(ii)}' & \mu_2 + \mu_3 &=& \mu_4 \\
\text{(iii)} & y_5 + y_6 &=& y_7 & \text{(iii)}' & \mu_4 + \mu_5 &=& \mu_6 \\
\text{(iv)} & y_7 + y_8 &=& c & \text{(iv)}' & \mu_6 + \mu_7 &=& \mu_8
\end{array}$$

ここで、AG 不等式 (6) を y_k, μ_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ として用いて、辺々加えると

$$2\sum_{k=1}^{8} y_k\mu_k \le \sum_{k=1}^{8} y_k^2 + \sum_{k=1}^{8} \mu_k^2 \; ; \quad y_k = \mu_k \quad 1 \le k \le 8 \tag{8}$$

が得られる。補題 1 より不等式 (8) は

$$2c\mu_8 \le \sum_{k=1}^{8} y_k^2 + \sum_{k=1}^{8} \mu_k^2$$

であり、等号は

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \quad 1 \le k \le 8$$

のときのみ成立する。すなわち、(i)〜(iv) を満たす y と (i)′〜(iv)′ を満たす μ に対して、不等式

$$-\sum_{k=1}^{8} \mu_k^2 + 2c\mu_8 \le \sum_{k=1}^{8} y_k^2 \tag{9}$$

が成り立つ。等号は条件 (i)〜(iv), (e), (i)′〜(iv)′ が成り立つときに限り成立する：

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 & \text{(i)}' & \mu_1 = \mu_2 \\
\text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 & \text{(ii)}' & \mu_2 + \mu_3 = \mu_4 \\
\text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 & \text{(iii)}' & \mu_4 + \mu_5 = \mu_6 \\
\text{(iv)} & y_7 + y_8 = c & \text{(iv)}' & \mu_6 + \mu_7 = \mu_8 \\
\end{array}$$
$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \qquad 1 \le k \le 8.$$

ここに、(9) の左辺は $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ のみの関数であり、すなわち、(P_1) における *dual function* を表す。したがって、(D_1) は (P_1) の双対問題である。

補題 2 (Fibonacci solution) 8 元 8 連立線形方程式

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)}'' & y_1 = y_2 & \text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 \\
\text{(ii)}'' & y_2 + y_3 = y_4 & \text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 \\
\text{(iii)}'' & y_4 + y_5 = y_6 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\
\text{(iv)}'' & y_6 + y_7 = y_8 & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c
\end{array}$$

は、唯一の解をもつ：

$$y_1 = \frac{F_1}{F_9}c,\ y_2 = \frac{F_2}{F_9}c,\ y_3 = \frac{F_3}{F_9}c,\ y_4 = \frac{F_4}{F_9}c,$$
$$y_5 = \frac{F_5}{F_9}c,\ y_6 = \frac{F_6}{F_9}c,\ y_7 = \frac{F_7}{F_9}c,\ y_8 = \frac{F_8}{F_9}c.$$

Proof. この8元8連立1次方程式系は

$$Ay = b$$

で表される。ただし、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

ここで、行列 A は以下の逆行列を持つ：

$$A^{-1} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -13 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & -8 & 16 & 10 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ -5 & 5 & -10 & 15 & 9 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & -9 & 15 & 10 & 5 & 5 \\ -2 & 2 & -4 & 6 & -10 & 16 & 8 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 5 & -8 & 13 & 13 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -5 & 8 & -13 & 21 \end{pmatrix}.$$

したがって、この方程式系は唯一の解を持ち y は

$$\begin{aligned} y &= A^{-1}b \\ &= \frac{c}{34}\left(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21 \right) \\ &= \frac{c}{F_9}\left(F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4,\ F_5,\ F_6,\ F_7,\ F_8 \right) \end{aligned}$$

となる。 □

補題2より次の定理が得られる。

定理 2 最小化問題 (P_1) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8) \tag{10}$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。最大化問題 (D_1) も

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8) \tag{11}$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。 □

同様に、最小化問題 (P_2) と最大化問題 (D_2) に対しても、以下の補題 3, 補題 4 が成り立つ。

補題 3 (Equality) $(y_1, y_2, \ldots, y_8)$ と $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ が条件 (i)〜(iv) と (i)′〜(iv)′

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 & \text{(i)}' & \phi\mu_1 = \mu_2 \\
\text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 & \text{(ii)}' & \mu_2 + \mu_3 = \mu_4 \\
\text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 & \text{(iii)}' & \mu_4 + \mu_5 = \mu_6 \\
\text{(iv)} & y_7 + y_8 = c & \text{(iv)}' & \mu_6 + \mu_7 = \mu_8
\end{array}$$

を満たすとき、次の関係式が成り立つ：

$$\phi y_1\mu_1 + \sum_{k=2}^{8} y_k\mu_k = c\mu_8. \tag{12}$$

補題 4 (Golden solution) 8 元 8 連立線形方程式

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)}'' & \phi y_1 = y_2 & \text{(i)} & y_1 + y_2 = y_3 \\
\text{(ii)}'' & y_2 + y_3 = y_4 & \text{(ii)} & y_3 + y_4 = y_5 \\
\text{(iii)}'' & y_4 + y_5 = y_6 & \text{(iii)} & y_5 + y_6 = y_7 \\
\text{(iv)}'' & y_6 + y_7 = y_8 & \text{(iv)} & y_7 + y_8 = c
\end{array}$$

は、唯一の解をもつ：

$$y_1 = \phi^{-8}c,\ y_2 = \phi^{-7}c,\ y_3 = \phi^{-6}c,\ y_4 = \phi^{-5}c,$$
$$y_5 = \phi^{-4}c,\ y_6 = \phi^{-3}c,\ y_7 = \phi^{-2}c,\ y_8 = \phi^{-1}c.$$

補題 4 より次の定理が得られる。

定理 3 最小化問題 (P_2) は

$$y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_8) = c\,(\phi^{-8},\ \phi^{-7},\ \ldots,\ \phi^{-1}) \tag{13}$$

のとき、最小値 $m = \phi^{-1}c^2$ をもつ。最大化問題 (D_2) も

$$\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8) = c\,(\phi^{-8},\ \phi^{-7},\ \ldots,\ \phi^{-1}) \tag{14}$$

のとき、最大値 $M = \phi^{-1}c^2$ をもつ。

参考文献

[1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[2] D. Brown, ダ・ヴィンチ・コード (上・下) (越前敏弥訳）, 角川書店, 2004; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.

[3] 岩本誠一、動的計画論、九大出版会、1987.

[4] 岩本 誠一、 最適化「ダ・ヴィンチ・コード」 — 経済数学へのプレリュード（ VI） — , 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会). 平成 19(2007) 年 4 月, pp.45–52.

[5] 岩本 誠一、 ダ・ヴィンチ・コードは最適か？、数理経済学研究センター会報、第 37 号、平成 21(2009) 年 9 月、pp.1–9.

[6] 岩本誠一、 最適経路 — フィボナッチから黄金へ — 、「不確実性下における意思決定問題」、京大数理研講究録 1734、２０１１年３月、ｐｐ．１９６−２０４．

[7] 岩本 誠一、最適化の数理 II — ベルマン方程式 — (Mathematics for Optimization II – Bellman Equation –)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」, 知泉書館, 2013 年 10 月, pp.449.

[8] 岩本 誠一、吉良 知文、植野 貴之、ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 (2009 年 10 月) 23 号, pp.1–22.