数理解析研究所講究録
第2044巻 2017年 152-158

集合値写像の連続性を用いた閉ファジィ集合と頑健的ファジィ集合の特徴付け

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概 要

本稿では、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の閉ファジィ集合と頑健的ファジィ集合を考える。ただし、ファジィ集合のレベル集合の有界性は仮定しない。そして、閉ファジィ集合のクラスと単調減少左連続集合値写像のクラスの間に 1 対 1 の対応があること、および頑健的ファジィ集合のクラスと単調減少連続集合値写像のクラスの間に 1 対 1 の対応があることを示す。

1 はじめに

ファジィ集合のそのレベル集合族を用いた表現が表現定理または分解定理としてよく知られている（例えば、[1, 4] 参照)。表現定理によって、すべてのファジィ集合のクラスとある性質をもつ集合族のクラスの間には 1 対 1 の対応があることが知られている（例えば、[1, 4] 参照)。また、集合族は集合値写像とみなすことができるので、すべてのファジィ集合のクラスとある性質をもつ集合族のクラスの間に 1 対 1 の対応があることは、すべてのファジィ集合のクラスとある性質をもつ集合値写像のクラスの間に 1 対 1 の対応があると言い換えることができる。

本稿では、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の閉ファジィ集合と頑健的ファジィ集合を考える。ただし、ファジィ集合のレベル集合の有界性は仮定しない。そして、閉ファジィ集合のクラスと単調減少左連続集合値写像のクラスの間に 1 対 1 の対応があること、および頑健的ファジィ集合のクラスと単調減少連続集合値写像のクラスの間に 1 対 1 の対応があることを示す。

2 集合列の極限と集合値写像の極限

本節では、ファジィ集合の特徴付けを行うときに必要になる集合列の極限および集合値写像の極限（連続性）について準備する。

$a,b \in \mathbb{R}$ に対して、$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\}, [a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a\le x< b\},]a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a< x\le b\},]a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a< x< b\}$ とする。$\mathbb{N}$ をすべての自然数の集合とし

$$\mathcal{N}_\infty=\{N\subset\mathbb{N}:\mathbb{N}\setminus N \text{ finite}\}=\{\text{ subsequences of } \mathbb{N} \text{ containing all } k \text{ beyond some } k_0\ \}$$
$$\mathcal{N}_\infty^\sharp=\{N\subset\mathbb{N}: N \text{ infinite}\}=\{\text{ all subsequences of } \mathbb{N}\}$$

とする。列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列はある $N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp$ に対して $\{x_k\}_{k\in N}$ の形で表される。$\mathbb{N}$ における $k \to \infty$ のとき $\lim_k, \lim_{k\to\infty}$ または $\lim_{k\in\mathbb{N}}$ と書くが、添字集合 $N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp$ または $N \in \mathcal{N}_\infty$ に対しての場合は $\lim_{k\in N}$ または $\lim_{k \underset{N}{\to} \infty}$ と書く。集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathrm{cl}(C)$ を C の閉包とし、C^c を C の補集合とする。

2.1 集合列の極限

まず、集合列の極限を定義する。

定義 1（[6] の Definition 4.1）$\mathbb{R}^n$ の部分集合の列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対して、その下極限を集合

$$\liminf_{k\to\infty} C_k \;=\; \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathcal{N}_\infty, \exists \boldsymbol{x}_k \in C_k (k \in N) \text{ with } \boldsymbol{x}_k \underset{N}{\to} \boldsymbol{x}\right\}$$

と定義し、その上極限を集合

$$\limsup_{k\to\infty} C_k \;=\; \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathcal{N}_\infty^\sharp, \exists \boldsymbol{x}_k \in C_k (k \in N) \text{ with } \boldsymbol{x}_k \underset{N}{\to} \boldsymbol{x}\right\}$$

と定義する。$\liminf_{k\to\infty} C_k = \limsup_{k\to\infty} C_k$ のとき、$\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の極限が存在するといい

$$\lim_{k\to\infty} C_k = \liminf_{k\to\infty} C_k = \limsup_{k\to\infty} C_k$$

と定義する。

2.2 集合値写像の極限

次に、ファジィ集合の特徴付けを行うときに必要になる集合値写像の極限を定義しそのいくつかの性質を述べる。

各 $\alpha \in]0,1]$ に集合 $F(\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ を対応させる写像 F を $]0,1]$ から $\mathbb{R}^n$ への集合値写像といい、$F :]0,1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ と表す。F が単調減少（非増加）であるとは、$\alpha < \beta$ となる任意の $\alpha, \beta \in]0,1]$ に対して $F(\alpha) \supset F(\beta)$ であるときをいう。F が閉値であるとは、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $F(\alpha)$ が閉集合であるときをいう。

定義 2（[6] の p.152）$F :]0,1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ とし、$\overline{\alpha} \in]0,1]$ とする。このとき、$\alpha \to \overline{\alpha}$ のときの F の下極限を

$$\liminf_{\alpha\to\overline{\alpha}} F(\alpha) = \bigcap_{\alpha_k \to \overline{\alpha}} \liminf_{k\to\infty} F(\alpha_k)$$

と定義し、$\alpha \to \overline{\alpha}$ のときの F の上極限を

$$\limsup_{\alpha\to\overline{\alpha}} F(\alpha) = \bigcup_{\alpha_k \to \overline{\alpha}} \limsup_{k\to\infty} F(\alpha_k)$$

と定義する。ここで、$\alpha\to\overline{\alpha}$ は $\alpha\to\overline{\alpha},\alpha\in\,]0,1]$ を意味し、$\cap_{\alpha_k\to\overline{\alpha}},\cup_{\alpha_k\to\overline{\alpha}}$ はそれぞれ $\alpha_k\to\overline{\alpha}$ となる任意の実数列 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\,]0,1]$ に関する共通部分, 和集合を意味する。$\liminf_{\alpha\to\overline{\alpha}}F(\alpha)=\limsup_{\alpha\to\overline{\alpha}}F(\alpha)$ のとき、$\alpha\to\overline{\alpha}$ のときの F の極限が存在するといい

$$\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}}F(\alpha)=\liminf_{\alpha\to\overline{\alpha}}F(\alpha)=\limsup_{\alpha\to\overline{\alpha}}F(\alpha)$$

と定義する。さらに、$\alpha\to\overline{\alpha}-$ によって $\alpha\to\overline{\alpha}$, $\alpha\in\,]0,\overline{\alpha}]$ を表し、$\alpha_k\to\overline{\alpha}-$ によって $\alpha_k\to\overline{\alpha}$, $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\,]0,\overline{\alpha}]$ を表し、$\alpha\to\overline{\alpha}+$ によって $\alpha\to\overline{\alpha}$, $\alpha\in[\overline{\alpha},1]$ を表し、$\alpha_k\to\overline{\alpha}+$ によって $\alpha_k\to\overline{\alpha}$, $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[\overline{\alpha},1]$ を表し、同様に $\alpha\to\overline{\alpha}-$ のときの F の左下極限 $\liminf_{\alpha\to\overline{\alpha}-}F(\alpha)$, 左上極限 $\limsup_{\alpha\to\overline{\alpha}-}F(\alpha)$, 左極限 $\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}-}F(\alpha)$ および $\alpha\to\overline{\alpha}+$ のときの F の右下極限 $\liminf_{\alpha\to\overline{\alpha}+}F(\alpha)$, 右上極限 $\limsup_{\alpha\to\overline{\alpha}-}F(\alpha)$, 右極限 $\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}+}F(\alpha)$ を定義する。

定義３（[6] の Definition 5.4）集合値写像を $F:\,]0,1]\rightsquigarrow\mathbb{R}^n$ とし、$\overline{\alpha}\in\,]0,1]$ とする。F が $\overline{\alpha}$ において下半連続であるとは

$$\liminf_{\alpha\to\overline{\alpha}}F(\alpha)\supset F(\overline{\alpha})$$

となるときをいい、F が $\overline{\alpha}$ において上半連続であるとは

$$\limsup_{\alpha\to\overline{\alpha}}F(\alpha)\subset F(\overline{\alpha})$$

となるときをいう。F が $\overline{\alpha}$ において連続であるとは、F が $\overline{\alpha}$ において下半連続かつ上半連続、すなわち

$$\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}}F(\alpha)=F(\overline{\alpha})$$

のときをいう。さらに、上記の $\alpha\to\overline{\alpha}$ を $\alpha\to\overline{\alpha}-$ に置き換えることよって F の $\overline{\alpha}$ における左下半連続性, 左上半連続性, 左連続性を定義し、上記の $\alpha\to\overline{\alpha}$ を $\alpha\to\overline{\alpha}+$ に置き換えることよって F の $\overline{\alpha}$ における右下半連続性, 右上半連続性, 右連続性を定義する。また、F が任意の $\alpha\in\,]0,1]$ において連続, 左連続, 右連続のときは、単に F は連続, 左連続, 右連続であるという。

命題１　$F:\,]0,1]\rightsquigarrow\mathbb{R}^n$, $\overline{\alpha}\in\,]0,1]$ とし、F は単調減少であるとする。このとき、$\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}}F(\alpha)=F(\overline{\alpha})$ であるための必要十分条件は、$\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}-}F(\alpha)=\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}+}F(\alpha)=F(\overline{\alpha})$ となることである。

命題２　$F:\,]0,1]\rightsquigarrow\mathbb{R}^n$, $\overline{\alpha}\in\,]0,1]$ とし、F は単調減少であるとする。このとき、次の (i)–(vi) は同値になる。

(i) $\displaystyle\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}-}F(\alpha)=F(\overline{\alpha})$

(ii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}F(\alpha_k)=F(\overline{\alpha})$ for $\alpha_k\to\overline{\alpha}-$

(iii) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}F(\alpha_k)=F(\overline{\alpha})$ for $\alpha_k\nearrow\overline{\alpha}$

(iv) $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in]0,\overline{\alpha}[}\mathrm{cl}(F(\alpha))=F(\overline{\alpha})$

(v) $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{cl}(F(\alpha_k))=F(\overline{\alpha})$ for $\alpha_k\to\overline{\alpha}-$

(vi) $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{cl}(F(\alpha_k))=F(\overline{\alpha})$ for $\alpha_k\nearrow\overline{\alpha}$

ここで、$\alpha_k \nearrow \overline{\alpha}$ は $\alpha_k \to \overline{\alpha}-$ かつ $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が単調増加（非減少）であることを意味する。

命題３ $F :]0,1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$, $\overline{\alpha} \in]0,1[$ とし、F は単調減少であるとする。このとき、次の (i)–(vi) は同値になる。

(i) $\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}+} F(\alpha) = F(\overline{\alpha})$

(ii) $\lim_{k\to\infty} F(\alpha_k) = F(\overline{\alpha})$ for $\alpha_k \to \overline{\alpha}+$

(iii) $\lim_{k\to\infty} F(\alpha_k) = F(\overline{\alpha})$ for $\alpha_k \searrow \overline{\alpha}$

(iv) $\mathrm{cl}\left(\bigcup_{\alpha\in]\overline{\alpha},1]} F(\alpha)\right) = F(\overline{\alpha})$

(v) $\mathrm{cl}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F(\alpha_k)\right) = F(\overline{\alpha})$ for $\alpha_k \to \overline{\alpha}+$

(vi) $\mathrm{cl}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F(\alpha_k)\right) = F(\overline{\alpha})$ for $\alpha_k \searrow \overline{\alpha}$

ここで、$\alpha_k \searrow \overline{\alpha}$ は $\alpha_k \to \overline{\alpha}+$ かつ $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が単調減少（非増加）であることを意味する。

3　ファジィ集合の特徴付け

本節では、ファジィ集合に関する準備を行い、前節の結果を用いて閉ファジィ集合および頑健的ファジィ集合の特徴付けを行う。

3.1　ファジィ集合に関する準備

$\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合 $\widetilde{s}$ とそのメンバーシップ関数を同一視し、その同一視されたメンバーシップ関数も $\widetilde{s} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ と表す。$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべてのファジィ集合の集合とする。$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ と $\alpha \in]0,1]$ に対して $\widetilde{s}$ の α-レベル集合は

$$[\widetilde{s}]_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \widetilde{s}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$$

と定義される。クリスプ集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に対して、S の指示関数は各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$c_S(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in S \\ 0 & \text{if } \boldsymbol{x} \notin S \end{cases}$$

である $c_S : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ と定義される。$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\widetilde{s} = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{[\widetilde{s}]_\alpha}$$

と表現でき、表現定理または分解定理として知られている（例えば、[1, 4] 参照）。$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が閉であるとは、$\widetilde{s}$ が上半連続であるときをいう。$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が閉であるための必要十分条件は、任意の $\alpha \in]0,1]$ に対して $[\widetilde{s}]_\alpha$ が閉集合になることである。$\mathcal{CF}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべての閉ファジィ集合の集合とする。$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が頑健的であるとは、$\mathrm{cl}(\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \widetilde{s}(\boldsymbol{x}) > \alpha\}) = [\widetilde{s}]_\alpha$, $\alpha \in]0,1[$ となるときをいう（例えば、[2, 3] 参照）。$\mathcal{RF}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべての頑健的ファジィ集合の集合とする。

3.2 閉ファジィ集合と頑健的ファジィ集合の特徴付け

以下では、前節で得られた結果を基に、集合値写像の連続性を用いて閉ファジィ集合と頑健的ファジィ集合の特徴付けを与える。

ファジィ集合を集合値写像によって特徴付けるために、$\mathcal{DS}(\mathbb{R}^n)$ を $]0,1]$ から $\mathbb{R}^n$ への単調減少集合値写像すべての集合とし、$\mathcal{CDS}(\mathbb{R}^n)$ を $]0,1]$ から $\mathbb{R}^n$ への閉値単調減少集合値写像すべての集合とし、さらに

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &= \left\{F \in \mathcal{DS}(\mathbb{R}^n) : \cap_{\beta\in]0,\alpha[}F(\beta) = F(\alpha) \text{ for any } \alpha \in]0,1]\right\} \\
\mathcal{CS}(\mathbb{R}^n) &= \left\{F \in \mathcal{CDS}(\mathbb{R}^n) : \cap_{\beta\in]0,\alpha[}F(\beta) = F(\alpha) \text{ for any } \alpha \in]0,1]\right\} \\
\mathcal{LS}(\mathbb{R}^n) &= \{F \in \mathcal{DS}(\mathbb{R}^n) : F \text{ is left-continuous }\} \\
\mathcal{RS}(\mathbb{R}^n) &= \{F \in \mathcal{DS}(\mathbb{R}^n) : F \text{ is right-continuous }\} \\
\mathcal{LRS}(\mathbb{R}^n) &= \{F \in \mathcal{DS}(\mathbb{R}^n) : F \text{ is continuous }\}
\end{aligned}$$

とする。次に、$G : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{DS}(\mathbb{R}^n)$ を各 $\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$G(\widetilde{s})(\alpha) = [\widetilde{s}]_\alpha, \quad \alpha \in]0,1]$$

で定義される $G(\widetilde{s}) \in \mathcal{DS}(\mathbb{R}^n)$ が対応する写像とし、$H : \mathcal{DS}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を各 $F \in \mathcal{DS}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$H(F) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{F(\alpha)} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$$

が対応する写像とする。また、任意の空でない集合 S に $I_S : S \to S$ を恒等写像とする。$G(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ であり、各 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $[H(F)]_\alpha = F(\alpha)$, $\alpha \in]0,1]$ であり、$G_1 : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $H_1 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ をそれぞれ各 $\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して $G_1(\widetilde{s}) = G(\widetilde{s})$ とし、各 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $H_1(F) = H(F)$ とすると、$H_1 \circ G_1 = I_{\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)}$, $G_1 \circ H_1 = I_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ となることが知られている（例えば、[1, 4] 参照）。ここで、$G(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n))$ は $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ の G による像を表し、$\circ$ は合成写像を表す。すなわち、G_1, H_1 は全単射になり、$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ の要素と $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の要素の間には 1 対 1 の対応があることがわかる。

命題4 $G_2 : \mathcal{CF}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{LS}(\mathbb{R}^n)$, $H_2 : \mathcal{LS}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{CF}(\mathbb{R}^n)$ をそれぞれ各 $\widetilde{s} \in \mathcal{CF}(\mathbb{R}^n)$ に対して $G_2(\widetilde{s}) = G(\widetilde{s})$ とし、各 $F \in \mathcal{LS}(\mathbb{R}^n)$ に対して $H_2(F) = H(F)$ とすると、$H_2 \circ G_2 = I_{\mathcal{CF}(\mathbb{R}^n)}$, $G_2 \circ H_2 = I_{\mathcal{LS}(\mathbb{R}^n)}$ となる。

命題４より、G_2, H_2 は全単射になり、$\mathcal{CF}(\mathbb{R}^n)$ の要素と $\mathcal{LS}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{CS}(\mathbb{R}^n)$ の要素の間には 1 対 1 の対応があることがわかる。

命題5 $G_3 : \mathcal{RF}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{LRS}(\mathbb{R}^n)$, $H_3 : \mathcal{LRS}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{RF}(\mathbb{R}^n)$ をそれぞれ各 $\widetilde{s} \in \mathcal{RF}(\mathbb{R}^n)$ に対して $G_3(\widetilde{s}) = G(\widetilde{s})$ とし、各 $F \in \mathcal{LRS}(\mathbb{R}^n)$ に対して $H_3(F) = H(F)$ とすると、$H_3 \circ G_3 = I_{\mathcal{RF}(\mathbb{R}^n)}$, $G_3 \circ H_3 = I_{\mathcal{LRS}(\mathbb{R}^n)}$ となる。

命題５より、G_3, H_3 は全単射になり、$\mathcal{RF}(\mathbb{R}^n)$ の要素と $\mathcal{LRS}(\mathbb{R}^n)$ の要素の間には 1 対 1 の対応があることがわかる。

最後に、得られたファジィ集合と集合値写像の関係をまとめたものを図１に示す。

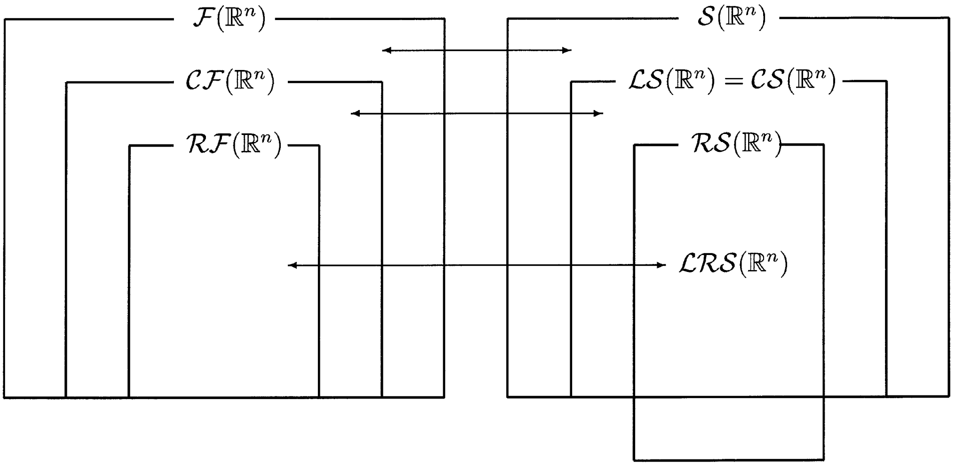

図 1 ファジィ集合と集合値写像の関係

4 結論

本稿では、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の閉ファジィ集合と頑健的ファジィ集合を考えた。ただし、ファジィ集合のレベル集合の有界性は仮定しなかった。そして、閉ファジィ集合のクラスと単調減少左連続集合値写像のクラスの間に 1 対 1 の対応があること、および頑健的ファジィ集合のクラスと単調減少連続集合値写像のクラスの間に 1 対 1 の対応があることを示した。

参考文献

[1] D. Dubois, W. Ostasiewicz and H. Prade, Fuzzy sets: History and basic notions, in *Fundamentals of Fuzzy Sets* (D. Dubois and H. Prade Eds.) (Kluwer, 2000), pp.21-124.

[2] R. Horst and N. V. Thoai, DC programming : overview, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 103, 1999, pp.1-43.

[3] T. Maeda, On characterization of fuzzy vectors and its applications to fuzzy mathematical programming problems, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 159, 2008, pp.3333-3346.

[4] C. V. Negoita and D. A. Ralescu, Representation theorems for fuzzy concepts, Kybernetes, Vol.4, 1975, pp.169-174.

[5] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970).

[6] R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets, *Variational analysis*, (Springer-Verlag, New York, 1998).