数理解析研究所講究録
第2045巻 2017年 38-60

INTERIOR TRANSMISSION EIGENVALUE PROBLEMS ON MANIFOLDS

森岡 悠 (同志社大学理工学部エネルギー機械工学科)
Hisashi Morioka
(Faculty of Science and Engineering, Doshisha University)

庄司 直高 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)
Naotaka Shoji
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

1. 序

本稿では，非コンパクト多様体上における非均質媒質型音響波動の非散乱現象を扱う上で登場する内部透過固有値問題について考察する．非散乱現象とは，簡単に述べると，ある入射波に対して散乱振幅が消える現象である．このような入射波の周波数を非散乱エネルギーと呼ぶ．我々は非散乱エネルギーに関するスペクトル特性に興味があるが，扱いが困難である．しかし，非散乱エネルギーが満たすべき偏微分方程式系の境界値問題のある種の制限として導入された内部透過固有値問題とその固有値である内部透過固有値のスペクトル特性については幾つかの結果が知られている．Euclid 空間内の有界領域上で与えられた内部透過固有値問題に対して得られている先行研究については，Cakoni-Haddar[9] によるサーベイ論文や Colton-Kress[11] による教科書を参照されたい．また，非散乱現象の数学的定式化については，量子力学的あるいは等方的な非媒質型音響波動散乱の場合には [26]，[27] を，非等方的な媒質型音響波動散乱の場合には [5]，[9] を参照されたい．本稿では，Euclid 空間内の有界領域上で与えられた内部透過固有値に関する幾つかの先行結果の多様体上への拡張について報告する．

この節では，Euclid 空間上の有界な非均質媒質に対する散乱問題から非散乱エネルギー及び内部透過固有値問題を定式化する．また，よく使われる内部透過固有値の解析手法や先行研究の概要について簡単に述べる．$\mathbf{R}^d (d \geq 2)$ 上の非均質媒質型散乱問題を定義する．D はなめらかな境界 ∂D を持つ $\mathbf{R}^d$ 上の有界領域であり，$L^\infty(\mathbf{R}^d)$ は $\mathbf{R}^d$ 上で定義された本質的有界関数全体とする．$\mathbf{R}^d$ 上の非均質媒質を表す関数を A 及び n と書く．ここで，$A = A(x)$ は各成分が $L^\infty(\mathbf{R}^d)$ に属す $d \times d$ 対称行列値関数であり，$n = n(x)$ は $L^\infty(\mathbf{R}^d)$ に属すとする．$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{C}^d}$ 及び $|\cdot|_{\mathbf{C}^d}$ は $\mathbf{C}^d$ に備えられた内積及びノルムであり，I_d は $d \times d$ 単位行列とする．また，A 及び n は，ある $\delta_1, \delta_2 > 0$ に対して，

$$(A(x)\xi, \xi)_{\mathbf{C}^d} \geq \delta_1 > 0, \quad n(x) \geq \delta_2 > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d,\ 0 \neq \forall \xi \in \mathbf{R}^d,$$

を満たし，D 上に台を持つと仮定する，すなわち，

$$A(x) = I_d, \quad n(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d \setminus D,$$

が成り立つ．このとき，定常音響波 u は方程式

$$(-\nabla \cdot A\nabla - \lambda n)u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^d, \quad \lambda > 0, \tag{1.1}$$

を満たす．ここで，$\nabla\cdot$ は発散作用素で ∇ は勾配作用素である．また，Δ によって $\mathbf{R}^d$ 上の Laplace 作用素を定義する．方程式 (1.1) の解を $u = u^i + u^s$ の形で見つけたい．ここで，u^i は自由な Helmholtz 方程式

$$(-\Delta - \lambda)u^i = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^d,$$

を満たし，u^s は Sommerfeld の放射条件を満たすものとする．今，u^i として平面波 $e^{i\sqrt{\lambda}x\cdot\omega}$ と選ぶことにする．ここで，$\omega \in S^{d-1}$ は平面波の入射方向，$\lambda > 0$ はその周波数であるとする．u^s が，ある $C(\lambda) > 0$ に対して漸近挙動

$$u^s(x) = C(k)|x|^{-(d-1)/2}e^{i\sqrt{\lambda}|x|}a(\lambda;\omega,\hat{x}) + o(|x|^{-(d-1)/2}) \quad \text{as} \quad |x| \to \infty,$$

を満たすとき，(1.1) は一意解 $u = u^i + u^s$ を持つ．ここで，$\hat{x} = x/|x| \in S^{d-1}$ は u^s の散乱方向である．また，関数 $a(\lambda;\omega,\hat{x})$ を散乱振幅と呼び，これを積分核に持つ積分作用素を $\hat{F}(\lambda)$ で表す．散乱行列 $\hat{S}(\lambda)$ は $\hat{S}(\lambda) = 1 - 2\pi i\hat{A}(\lambda)$ で与えられる．$\hat{S}(\lambda)$ が 1 を固有値に持つとき，λ を A, n 及び D についての非散乱エネルギーと呼び，その全体を $\sigma_N = \sigma_N(A, n.D)$ で表す．$\lambda \in \sigma_N$ に対して，Rellich 型定理より，対応する u^s は D の外部で恒等的に 0 となる．したがって，u^i 及び u^s が適当な正則性を持つとき，以下の系の非自明解が存在する：

$$(-\Delta - \lambda)u^i = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^d, \tag{1.2}$$
$$(-\nabla\cdot A\nabla - \lambda n)u = 0 \quad \text{in} \quad D, \tag{1.3}$$
$$u^i - u = 0 \quad \text{on} \quad \partial D, \tag{1.4}$$
$$(\nabla u^i, \nu)_{\mathbf{C}^d} - (A\nabla u, \nu)_{\mathbf{C}^d} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D. \tag{1.5}$$

ここで，ν は ∂D 上の外向き単位法ベクトルを表す．逆に，系 (1.2)-(1.5) が非自明解を持つとき，$\lambda > 0$ は非散乱エネルギーとなる．実際，系 (1.2)-(1.5) を満たす u を D の外部では u^i として $\mathbf{R}^d$ 全体で定義された関数に拡張すれば，対応する散乱振幅が恒等的に 0 になることが確認できる．系 (1.2)-(1.5) は全空間 $\mathbf{R}^d$ 上の方程式と有界領域 D 上の方程式が混在しているため扱いが困難である．そのため，系 (1.2)-(1.5) を扱う代わりにそのある種の制限である内部透過固有値問題

$$(-\Delta - \lambda)v = 0 \quad \text{in} \quad D, \tag{1.6}$$
$$(-\nabla\cdot A\nabla - \lambda n)w = 0 \quad \text{in} \quad D, \tag{1.7}$$
$$v - w = 0 \quad \text{on} \quad \partial D, \tag{1.8}$$
$$(\nabla w, \nu)_{\mathbf{C}^d} - (A\nabla w, \nu)_{\mathbf{C}^d} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D, \tag{1.9}$$

について考えることにする．系 (1.6)-(1.9) が非自明解を持つとき，$\lambda \in \mathbf{C}$ を A, n 及び D についての内部透過固有値と呼び，その全体を $\sigma_I = \sigma_I(A, n, D)$ で表す．この非自明解 (v, w) を $\lambda \in \sigma_I$ に属する内部透過固有関数と呼ぶ．内部透過固有値問題 (1.6)-(1.9) が等方的であるとは，任意の $x \in D$ に対して $A(x) = I_d$ を満たすことをいい，非等方的であるとは，ある $x \in D$ に対して $A(x) \neq I_d$ を満たすことをいう．非散乱エネルギーと内部透過固有値の定義から，$\sigma_N \subset \sigma_I$ が成り立つ．内部透過固有値は非散乱エネルギーを完全に特徴付けることはできないが，その性質の一部を調べることは可能である．例えば，σ_I が離散集合であれば σ_N も離散集合である．

非散乱エネルギーと内部透過固有値の関係性について知られている先行研究を 2 つ紹介する．まず，球層状媒質の場合を考える．この場合は Colton-Monk[12] によって考えられた．彼らは，単位球 $B_1(0)$ 上で球層状媒質 $n_s = n_s(|x|)$ についての等方

的内部透過固有値問題

$$(1.10)\qquad (-\Delta-\lambda)v=0 \quad \text{in} \quad B_1(0),$$
$$(1.11)\qquad (-\Delta-\lambda n_s(|x|))w=0 \quad \text{in} \quad B_1(0),$$
$$(1.12)\qquad v-w=0 \quad \text{on} \quad S^{d-1},$$
$$(1.13)\qquad (\nabla v,\nu)_{\mathbf{C}^d}-(\nabla w,\nu)_{\mathbf{C}^d}=0 \quad \text{on} \quad S^{d-1},$$

を考えた．このとき，彼らは包含関係 $\sigma_I(I_d,n_s,B_1(0))\subset\sigma_N(I_d,n_s,B_1(0))$ が成り立つことを証明した．特に，先の包含関係と合わせて，$\sigma_I(I_d,n_s,B_1(0))=\sigma_N(I_d,n_s,B_1(0))$ が成り立つ．したがって，この場合では，非散乱エネルギーと内部透過固有値は同値であることを意味する．この事実は特殊関数を用いて (1.10) の解を $\mathbf{R}^d$ 全体の解として拡張することで直ちにわかる．２つ目に，d 次元長方形上の“角媒質”の場合を考える．この場合は Blåsten-Päivärinta-Sylvester [2] によって考えられた．L を d 次元の長方形とする．また，L についての特性関数 χ_L と L の角で値が消えないなめらかな関数 ϕ を用いて表される関数 $n_L=\chi_L\phi+1$ を角媒質と呼ぶ．彼らは，L 上で角媒質 n_L についての等方的内部透過固有値問題を考えた．このとき，彼らは $k\neq 0$ が $\sigma_I(I_d,n_L,L)$ に含まれるならばそれは $\sigma_N(I_d,n_L,L)$ には属さないことを証明した．したがって，この k は，$\sigma_I(I_d,n_L,L)\setminus\sigma_N(I_d,n_L,L)$ の非自明な元の例を与える．

内部透過固有値の解析手法を幾つか紹介する．等方的内部透過固有値問題の解析では，(1.6)-(1.9) を 4 階の偏微分方程式に書き換えることができる．$s\in\mathbf{R}$ とする．$H^s(D)$ を D における s 階の Sobolev 空間とし，$H^s_0(D)$ を $C^\infty_0(D)$ の $H^s(D)$ のノルムによる完備化とする．$A=I_d$ とした (1.6)-(1.9) の解を $H^2(D)\times H^2(D)$ で求めることは，4 階の偏微分方程式

$$(1.14)\qquad (\Delta+\lambda n)\frac{1}{n-1}(\Delta+\lambda)\psi=0 \quad \text{in} \quad D,$$

の解を $H^2_0(D)$ で求めることと同等である．実際，(1.6)-(1.9) の解 (v,w) に対して，$\psi=w-v$ とすれば良い．逆に，(1.14) の解 ψ に対して，

$$v=\frac{-1}{\lambda(n-1)}(\Delta+\lambda)\psi, \quad w=\frac{-1}{\lambda(n-1)}(\Delta+\lambda n)\psi,$$

とすれば，(1.6)-(1.9) を満たす．(1.14) に対応する変分問題は

$$(1.15)\qquad \int_D\frac{1}{n-1}(\Delta+\lambda)\psi(\Delta+\lambda n)\overline{\phi}dx=0, \quad \forall\phi\in H^2_0(D),$$

で与えられる．ここで，$\bar{\cdot}$ は複素共役を表す．(1.15) に Riesz の表現定理を用いると，λ に依存する作用素を構成することができる．この作用素の λ に関する解析的 Fredholm 性などから内部透過固有値の離散性が導かれる．また，Mini-Max 原理の応用から実内部透過固有値の存在性が示される．2008 年に Päivärinta-Sylvester[18] は，球対称でない有界領域上で与えられた内部透過固有値の（有限個の）存在性を証明した．その後，2010 年に Cakoni-Gintides-Haddar[8] が拡張された Mini-Max の原理を用いて実内部透過固有値の無限個の存在性を証明した．

Sylvester[23] は，等方的な内部透過固有値問題が行列型作用素の固有値問題で記述できることに注目した．$\widetilde{u}=w-v,\widetilde{v}=\lambda v,\widetilde{\lambda}=-\lambda$ とおくと，(1.6)-(1.8) は，

$$(\Delta-\widetilde{\lambda})\widetilde{v}=0 \quad \text{in} \quad D,$$
$$(\Delta-\widetilde{\lambda}n)\widetilde{u}+(n-1)\widetilde{v}=0 \quad \text{in} \quad D,$$
$$\widetilde{u}=0, \quad (\nabla\widetilde{u},\nu)_{\mathbf{C}^d}=0 \quad \text{on} \quad \partial D,$$

と書き換えられる．$H(D,\Delta)$ を $C^\infty(D)$ のノルム $\|\cdot\|_2^2=\|\cdot\|_{L^2(D)}^2+\|\Delta\cdot\|_{L^2(D)}^2$ による完備化とし，Δ_{00} を $H_0^2(D)$ を定義域に持つラプラシアン，Δ_{--} を $H(D,\Delta)$ を定義域に持つラプラシアンとする．このとき，

$$B=\begin{bmatrix}\Delta_{00} & n-1\\ 0 & \Delta_{--}\end{bmatrix},\quad I_n=\begin{bmatrix} n & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

とおくと，内部透過固有値は $I_n^{-1}B$ の固有値として理解できる．また，B は定義域に $H_0^2(D)\times H(D,\Delta)$ を持つ $L^2(D)\times L^2(D)$ 上の非自己共役閉作用素である．Sylvester[23] は，B の行列型作用素として与えられるレゾルベントの上三角成分がコンパクト作用素であることを用いて内部透過固有値の離散性を示した．

Lakshtanov-Vainberg[16] は，内部透過固有値を 2 つの Dirichlet-Neumann 作用素の差を用いて特徴付けた．Dirichlet-Neumann 作用素（の差）は境界上の関数に作用する擬微分作用素と見なせ，そのシンボルを詳しく解析することで実内部透過固有値の離散性，無限個の存在性及び Weyl 則を示した．これについては，§4 で多様体に拡張した形で述べる．

非等方的な透過固有値問題の解析は一般に等方的な場合よりも扱いが難しいことが多い．まずは簡単に扱える場合を紹介する．Cakoni-Colton-Haddar[7] は，$n=1$ の場合について考えた．A が正則行列値関数であると仮定し，$N=A^{-1},\mathbf{v}=\nabla v,\mathbf{w}=A\nabla w$ とおく．このとき，(1.6)-(1.9) をベクトル値関数 $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ に対する内部透過固有値問題

$$\begin{aligned}(-\nabla(\nabla\cdot)-\lambda)\,\mathbf{v}&=0\quad\text{in}\quad D,\\ (-\nabla(\nabla\cdot)-\lambda N)\,\mathbf{w}&=0\quad\text{in}\quad D,\\ \nu\cdot\mathbf{v}-\nu\cdot\mathbf{w}&=0\quad\text{on}\quad \partial D,\\ \nabla\cdot\mathbf{v}-\nabla\cdot\mathbf{w}&=0\quad\text{on}\quad \partial D,\end{aligned}$$

に帰着させることができ，等方的な場合と同等の扱いが可能である．

$n\neq 1$ の場合を考える．Bonnet-Ben Dhia-Chesnel-Haddar[4] は，(1.6)-(1.9) がある変分問題と同等であることを利用し，“T-coercivity method” を用いて内部透過固有値の離散性を示し，その非存在領域を与えた．これについては，§3 で多様体に拡張した形で述べる．

非等方的な場合の内部透過固有値の存在性については，Cakoni-Kirsch[10] が 2 つの変分問題を組み合わせることで証明した．(1.6)-(1.9) の解を $H^1(D)\times H^1(D)$ で求めることは，次の系

$$(1.16)\qquad \begin{aligned}(-\nabla\cdot A\nabla-\lambda n)u&=(-\nabla\cdot(A-I)\nabla-\lambda(n-1))\,v\quad\text{in}\quad D,\\ \nu\cdot A\nabla u&=\nu\cdot(A-I)\nabla v\quad\text{on}\quad\partial D,\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}(-\Delta-\lambda)v&=0\quad\text{in}\quad D,\\ u&=0\quad\text{on}\quad\partial D,\end{aligned}$$

の解 (u,v) を $H_0^1(D)\times H^1(D)$ で求めることは同等である．また，与えられた $u\in H_0^1(D)$ に対して，(1.16) を $v\in H^1(D)$ についての方程式と見ると，これは変分問題

$$(1.17)\qquad \int_D\left((A-I)\nabla v\cdot\nabla\overline{\psi}-\lambda(n-1)v\overline{\psi}\right)dx=\int_D\left(A\nabla u\cdot\nabla\overline{\psi}-\lambda nu\overline{\psi}\right)dx,$$

と同値である．ここで，$\psi\in H^1(D)$ は任意である．A 及び n が適当な条件を満たし，ある $\delta>0$ に対して $\mathrm{Re}\,\lambda>-\delta$ とする．このとき，(1.17) は一意解 $v=v_u$ を持つ．

また，作用素 $B(\lambda): H_0^1(D) \ni u \mapsto v_u \in H^1(D)$ は有界で，$\{\lambda \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > -\delta\}$ 上で λ について解析的である．この v_u を用いて，汎関数

$$\psi \to \int_D \left(\nabla v_u \cdot \nabla \overline{\psi} - \lambda v_u \overline{\psi}\right) dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(D),$$

を考える．Riesz の表現定理より，

$$(L(\lambda)u, \psi)_{H^1(D)} = \int_D \left(\nabla v_u \cdot \nabla \overline{\psi} - \lambda v_u \overline{\psi}\right) dx, \quad \forall \psi \in H_0^1(D),$$

を満たす作用素 $L(\lambda): H_0^1(D) \to H_0^1(D)$ が存在する．$L(\lambda)$ も $\{\lambda \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > -\delta\}$ 上で λ について解析的である．以上の考察から，$L(\lambda)$ が非自明な核を持つとき，λ が実内部透過固有値であることがわかる．Cakoni-Kirsch[10] は，$L(\lambda)$ が自己共役作用素になることを用いて内部透過固有値の無限個の存在性を示した．

Lakshatnov-Vainberg[15] は，[16] と同様に Dirichlet-Neumann 作用素の差で内部透過固有値を特徴付けた．ここでは，内部透過固有値問題が境界値問題として楕円型であり，対応する内部透過固有値が離散的になるような条件を A 及び n に仮定した．このとき，実内部透過固有値の無限個の存在性及び Weyl 則を示した．議論は概ね [16] と同様なので省略する．

Petkov と Vodev（[19], [28], [29], [30], [31] を参照されたい）は，内部透過固有値のスペクトル解析に半古典解析的の手法を応用した．ここでも，[15], [16] と同様に内部透過固有値を Dirichlet-Neumann 作用素の差で特徴付ける．このとき，内部透過固有値 λ で $|\mathrm{Re}\,\lambda| \geq |\mathrm{Im}\,\lambda|$ かつ $|\mathrm{Re}\,\lambda| \gg 1$ を満たすものを考える．すると $h = |\mathrm{Re}\,\lambda|^{-1/2}$ を半古典的パラメータと見ることで Dirichlet-Neumann 作用素の差を半古典的擬微分作用素として捉えることができる．同様に，条件を変えれば $h = |\mathrm{Im}\,\lambda|^{-1/2}$ を半古典的パラメータと見ることもできる．Petkov と Vodev は精密なシンボル計算から，放物型の非存在領域の形状や Weyl 則の剰余項の次数を精密に決定した．

2. 多様体上の内部透過固有値問題

幾つかの多様体に関する記号と関数空間を導入する．M を d 次元の連結コンパクト向き付け可能多様体でなめらかな境界 ∂M を持つとする．M 上の Riemann 計量テンソルを g で表す．$x = (x_1, \ldots, x_d)$ を M 上の局所座標とする．局所座標について $g(x)$ はなめらかな正定値対称行列であり，$g(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1}^d$ と書かれる．また，その逆行列を $g(x)^{-1} = (g^{ij}(x))_{i,j=1}^d$ で表す．$g(x)$ の行列式を $G(x)$ で表し，M 上の体積要素を $dV_g := \sqrt{G}dx = \sqrt{G}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ とする．ここで，$dx_1, \ldots, dx_d$ は M の余接束の向き付き基底を構成する微分 1 形式であり，$\wedge$ は wedge 積を表す．dS_g を dV_g から誘導される ∂M 上の面積要素とする．ν は ∂M 上の外向き単位法線ベクトルであるとする．$x \in M$ における M の接空間を $T_x(M)$ とし，その接ベクトル $X^{(j)}, X \in T_x(M)$ $(j = 1, 2)$ を局所座標について，$X^{(j)} = \sum_{i=1}^d X_i^{(j)} (\partial_i)_x, X = \sum_{i=1}^d X_i (\partial_i)_x \in T_x(M)$ と表す．ここで，$X_i^{(j)}$ 及び X_i は M 上のなめらかな関数であり，$(\partial_1)_x, \ldots, (\partial_d)_x$ は $T_x(M)$ の基底である．このとき，$T_x(M)$ 上の内積とノルムを

$$(X^{(1)}, X^{(2)})_g = \sum_{i,j=1}^d g^{ij} X_i^{(1)} \overline{X_j^{(2)}}, \quad |X|_g = \sqrt{(X, X)_g},$$

で定義する．Δ_g 及び ∇_g はそれぞれ M 上の Laplace-Beltrami 作用素及び勾配作用素とし，局所座標について，

$$\Delta_g = G^{-1/2}\sum_{i,j=1}^{d}\partial_i(g^{ij}G^{1/2}\partial_j), \quad \nabla_g u = \sum_{i,j=1}^{d} g^{ij}(\partial_i u)\partial_j,$$

と書ける．ここで，u は M 上の任意の関数である．混乱の恐れのない限り，単に $\nabla = \nabla_g$ と書く．

$L^2(M) := L^2(M, dV_g)$ によって M 上の 2 乗可積分関数全体を表し，$(L^2(M))^d$ によって M 上の 2 乗可積分なベクトル場全体を表す．混乱の恐れがない限り，$L^2(M)$ 及び $(L^2(M))^d$ の内積とノルムに同一の記法 $(\cdot,\cdot)_M$ 及び $\|\cdot\|_M$ を用いる．$s \in \mathbf{R}$ とする．$H^s(M) := H^1(M, dV_g)$ によって通常の 1 階 Sobolev 空間を表し，備わっている内積及びノルムをそれぞれ

$$(u,v)_{H^1(M)} = (\nabla u, \nabla v)_M + (u,v)_M = \int_M (\nabla u, \nabla v)_g dV_g + \int_M u\bar{v} dV_g,$$

及び $\|u\|_{H^1(M)} = (u,u)^{1/2}_{H^1(M)}$ と書く．ここで，$u, v \in H^1(M)$ は任意である．$L^\infty(M)$ によって M 上の本質的有界関数全体を表す．さらに，補助的な Hilbert 空間 $\mathbf{H}^s := H^s(M_1) \times H^s(M_2)$ には，次の内積及びノルムを備える：

$$((u_1,u_2),(v_1,v_2))_{\mathbf{H}^1} = (u_1,u_2)_{H^1(M_1)} + (v_1,v_2)_{H^1(M_2)},$$
$$\|(u_1,u_2)\|_{\mathbf{H}^1} = ((u_1,u_2),(u_1,u_2))^{1/2}_{\mathbf{H}^1}.$$

ここで，$(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in \mathbf{H}^1$ は任意である．

以上の準備の下で，多様体上の内部透過固有値問題を定義する．(M_1, g_1) 及び (M_2, g_2) を d 次元の連結コンパクト向き付け可能多様体でそれぞれなめらかな境界 ∂M_1 及び ∂M_2 を持つとする．本稿を通して，以下を仮定する．

(A)
- M_1と M_2は共有する境界$\Gamma := \partial M_1 = \partial M_2$を持つ．
- Γは有限個の閉連結成分$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$の非交和である．

また，M_1 と M_2 が微分同相であることは仮定しない．

Riemann 多様体 (M_1, g_1) 及び (M_2, g_2) 上の (n_1, n_2) についての内部透過固有値問題を

$$(-\Delta_{g_1} - \lambda n_1)u_1 = 0 \quad \text{in} \quad M_1, \tag{2.1}$$
$$(-\Delta_{g_2} - \lambda n_2)u_2 = 0 \quad \text{in} \quad M_2, \tag{2.2}$$
$$u_1 - u_2 = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{2.3}$$
$$\sqrt{G_1}\partial_{\nu_1}u_1 - \sqrt{G_2}\partial_{\nu_2}u_2 = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{2.4}$$

で定義する．ここで，∂_{ν_l} $(l = 1, 2)$ は (M_l, g_l) に関する Γ 上の外向き単位法微分であり，G_1 及び G_2 はそれぞれ g_1 及び g_2 の行列式である．

内部透過固有値問題 (2.1)-(2.4) が局所等方的であるとは，任意の $x \in \Gamma$ に対して $g_1(x) = g_2(x)$ を満たすときをいう．内部透過固有値問題 (2.1)-(2.4) が局所非等方的であるとは，Γ の近傍 Σ が存在して，$\Sigma \subset \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$ 及びある $x \in \Sigma$ に対して $g_1(x) \neq g_2(x)$ を満たすときをいう．本稿では，§3 で局所非等方的な場合を扱い，§4 で局所等方的な場合を扱う．

3. 局所非等方的内部透過固有値問題

この節では，$n_l \in L^\infty(M_l)\,(l=1,2)$ に関する (M_1, M_2) 上の局所非等方的内部透過固有値問題を考える．本節の議論は，Bonnet-Ben Dhia-Chesnel-Haddar[4] の結果を多様体へ拡張した [20] に基づく．まず，この節で重要な役割を果たす "T-coercivity" を導入する．H をある Hilbert 空間とし，H が備える内積及びノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)_H$ 及び $\|\cdot\|_H$ とする．B が $H\times H$ 上で定義された半双線形形式であるとは，写像 $B[\cdot,\cdot]: H\times H \to \mathbf{C}$ が以下を満たすときをいう：任意の $u,v,w\in H$ 及び $a,b\in\mathbf{C}$ に対して，

$$B[au+bv,w]=aB[u,w]+bB[v,w],\quad B[u,av+bw]=\overline{a}B[u,v]+\overline{b}B[u,w],$$

を満たすときをいう．$H\times H$ 上で定義された半双線形形式 B（あるいは，H 上の作用素 $\widetilde{B}$）が T-(strictly) coercive であるとは，H 上の同相写像 T が存在して，次を満たすときをいう：ある $C>0$ に対して，

$$\operatorname{Re} B[u,Tv]\geq C\|u\|_H^2,\ (\text{あるいは}, \operatorname{Re}(\widetilde{B}u,Tu)_H\geq C\|u\|_H^2),\quad \forall u\in H. \tag{3.1}$$

ここで，$z\in\mathbf{C}$ に対して，$\operatorname{Re} z$ は z の実部を意味する．(3.1) において T を除いた不等式が成り立つ場合，B（あるいは，$\widetilde{B}$）を単に strictly coercive と呼ぶ．strictly coercive である作用素に対して次の Lax-Milgram の定理が成り立つ．

定理 3.1. *H を Hilbert 空間とする．strictly coercive である作用素 $\widetilde{B}: H\to H$ は有界な逆を持つ．*

半双線形形式に対する T-coercivity は，Bonnet-Ben Dhia-Ciarlet-Zwölf[6] によって導入された．また，Bonnet-Ben Dhia-Chesnel-Haddar[4] によって内部透過固有値の離散性の研究に用いられた．

局所非等方的内部透過固有値問題の議論に戻る．この節のみ，(2.1)-(2.4) に登場する λ を k^2 と置き換える．(2.1)-(2.4) が非自明解 $(u_1,u_2)\in\mathbf{H}^1$ を持つとき，k を局所非等方的内部透過固有値といい，その全体を $\sigma_{a,I}=\sigma_{a,I}((g_1,g_2),(n_1,n_2),(M_1,M_2))$ とする．この非自明解 (u_1,u_2) を $k\in\sigma_{a,I}$ に属する局所非等方的内部透過固有関数と呼ぶ．$k\in\sigma_{a,I}$ に属する局所非等方的内部透過固有関数によって張られる $\mathbf{H}^1$ の部分空間を $E_{a,I}(k)$ で表し，$k\in\sigma_{a,I}$ に対応する局所非等方的内部透過固有空間という．また，$k\in\sigma_{a,I}$ の多重度を $E_{a,I}(k)$ の次元によって定義する．以下，この節では局所非等方的を省略し，単に内部透過固有値などと書く．

$\mathbf{H}^1$ の部分空間 $\mathbf{H}_0^1$ を

$$\mathbf{H}_0^1 := \{(u_1,u_2)\in\mathbf{H}^1 : u_1-u_2=0\quad\text{on}\quad\Gamma\},$$

によって定める．(2.1)-(2.4) が非自明解 $(u_1,u_2)\in\mathbf{H}^1$ を持つための必要十分条件は，変分問題

$$\begin{aligned}&A_k[(u_1,u_2),(v_1,v_2)]\\&:=(\nabla u_1,\nabla v_1)_{M_1}-(\nabla u_2,\nabla v_2)_{M_2}+k^2\left((n_1u_1,v_1)_{M_1}-(n_2u_2,v_2)_{M_2}\right)\\&=0,\quad\forall(v_1,v_2)\in\mathbf{H}_0^1,\end{aligned}\tag{3.2}$$

が非自明解 $(u_1,u_2)\in\mathbf{H}_0^1$ を持つことである．(3.2) の形から一般に半双線形形式 A_k は strictly coercive では無い．しかし，適当な同相写像 T を用いると A_k は T-coercive になる．実際にそのような同相写像 T を構成しよう．$\chi\in C^\infty(M_2)$ を Σ にコンパクト台を持ち，Γ の小近傍で 1 に値を取り，任意の $x\in M_2$ に対して $0\leq\chi(x)\leq1$ を満たすものとし，$I_{\mathbf{H}^1}$ を $\mathbf{H}^1$ 上の恒等作用素とする．$(u_1,u_2)\in\mathbf{H}_0^1$ に対し，$\mathbf{H}_0^1$ 上の作用素 T を $T(u_1,u_2)=(u_1-2\chi u_2,-u_2)$ で定義する．定義から $T(u_1,u_2)\in\mathbf{H}_0^1$ 及

び $T^2 = I_{\mathbf{H}^1}$ が成り立つ．したがって，$T: \mathbf{H}_0^1 \to \mathbf{H}_0^1$ は同相写像である．半双線形形式 A_k がこの T に関して T-coercive であることは補題 3.3 で確認する．

半双線形形式 A_k^T を $A_k^T[(u_1,u_2),(v_1,v_2)] := A_k[(u_1,u_2),T(v_1,v_2)]$ によって定める．このとき，A_k^T は明らかに有界であるから，Riesz の表現定理より，任意の $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in \mathbf{H}_0^1$ に対して，

$$A_k^T[(u_1,u_2),(v_2,v_2)] = (\mathscr{A}^T(k)(u_1,u_2),(v_1,v_2))_{\mathbf{H}^1},$$

を満たす有界作用素 $\mathscr{A}^T(k): \mathbf{H}_0^1 \to \mathbf{H}_0^1$ が存在する．今までの議論から，次の命題を得る．

命題 3.2. $k \in \sigma_{a,I}$ であるための必要十分条件は，作用素 $\mathscr{A}^T(k): \mathbf{H}_0^1 \to \mathbf{H}_0^1$ が非自明な核を持つことである．この核の元が $k \in \sigma_{a,I}$ に属する内部透過固有関数であり，核の次元は $k \in \sigma_{a,I}$ の多重度に一致する．

次の補題は，半双線形形式 A_k^T がある $k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ について T-coercive であることを示す．

補題 3.3. (n_1,n_2) 及び (g_1,g_2) が，ある $0<c<1$ に対して，

$$n_1^\dagger := \sup_\Sigma(\sqrt{G_1}n_1) < \inf_\Sigma(\sqrt{G_2}n_2) =: n_{2\dagger}, \quad g_2/\sqrt{G_2} \le cg_1/\sqrt{G_1} \quad on \quad \Sigma, \tag{3.3}$$

を満たすとする．このとき，作用素 $\mathscr{A}^T(i\kappa): \mathbf{H}_0^1 \to \mathbf{H}_0^1$ が同相写像となるような $\kappa \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ が存在する．

証明．Lax-Milgram の定理を適用すれば良い．すなわち，$\mathscr{A}^T(i\kappa)$ が strictly coercive であることを示せば良い．任意の $(u_1,u_2) \in \mathbf{H}_0^1$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(\mathscr{A}^T(i\kappa)(u_1,u_2),(u_1,u_2))_{\mathbf{H}^1} \\
&= \|\nabla u_1\|^2_{M_1\setminus\Sigma} + \|\nabla u_2\|^2_{M_2\setminus\Sigma} + \kappa^2\left((n_1u_1,u_1)_{M_1\setminus\Sigma} + (n_2u_2,u_2)_{M_2\setminus\Sigma}\right) \\
&+ \int_\Sigma |\nabla u_1|^2_{g_1} dV_{g_1} + \int_\Sigma |\nabla u_2|^2_{g_2} dV_{g_2} + \kappa^2\left(\int_\Sigma n_1|u_1|^2 dV_{g_1} + \int_\Sigma n_2|u_2|^2 dV_{g_2}\right) \\
&- 2\mathrm{Re}\,(\nabla u_1, \nabla(\chi u_2))_{M_1} - 2\kappa^2 \mathrm{Re}\,(n_1u_1,\chi u_2)_{M_1},
\end{aligned}\tag{3.4}$$

が成り立つ．Young の不等式より，$\alpha,\beta,\gamma>0$ に対して，

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\,(\nabla u_1,\nabla(\chi u_2))_{M_1} &\le (\alpha+\beta)\int_\Sigma |\nabla u_1|^2_{g_1} dV_{g_1} \\
&+ \alpha^{-1}\int_\Sigma |\nabla u_2|^2_{g_1} dV_{g_1} + \beta^{-1}\sup_\Sigma|\nabla\chi|^2_{g_1}\int_\Sigma |u_2|^2 dV_{g_1},
\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$2\mathrm{Re}\,(n_1u_1,\chi u_2)_{M_1} \le \gamma\int_\Sigma n_1|u_1|^2 dV_{g_1} + \gamma^{-1}\int_\Sigma n_1|u_2|^2 dV_{g_1}, \tag{3.6}$$

が成り立つ．不等式 (3.4)，(3.5)，(3.6) を組み合わせ，仮定 (3.3) を用いると，ある $C'>0$ が存在して，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(\mathscr{A}^T(i\kappa)(u_1,u_2),(u_1,u_2))_{\mathbf{H}^1} \\
&\ge \|\nabla u_1\|^2_{M_1\setminus\Sigma} + \|\nabla u_2\|^2_{M_2\setminus\Sigma} + \kappa^2\left((n_1u_1,u_1)_{M_1\setminus\Sigma} + (n_2u_2,u_2)_{M_2\setminus\Sigma}\right) \\
&+ (1-\alpha-\beta)\int_\Sigma |\nabla u_1|^2_{g_1} dV_{g_1} + (1-c\alpha^{-1})\int_\Sigma |\nabla u_2|^2_{g_2} dV_{g_2} \\
&+ \kappa^2(1-\gamma)\int_\Sigma n_1|u_1|^2 dV_{g_1} + C'\left(\kappa^2\left(\underline{n_2} - \overline{n_1}\gamma^{-1}\right) - \beta^{-1}\right)\int_\Sigma |u_2|^2 dV_{g_2},
\end{aligned}\tag{3.7}$$

が成り立つ．適切な$0<\alpha,\beta,\gamma<1$を選び，$|\kappa|>0$を十分大に取ると，ある$C>0$が存在して，

$$\mathrm{Re}\,(\mathscr{A}^T(i\kappa)(u_1,u_2),(u_1,u_2))_{\mathbf{H}^1} \geq C\|(u_1,u_2)\|^2_{\mathbf{H}^1}, \quad \forall(u_1,u_2)\in\mathbf{H}^1_0,$$

が成り立つ．したがって，$\mathscr{A}^T(i\kappa)$はstrictly coerciveである． □

Rellich-Kondrashovの定理から，次の補題が従う．

補題 3.4. 埋め込み$\iota:\mathbf{H}^1_0\hookrightarrow L^2(M_1)\times L^2(M_2)$はコンパクトである．

次の補題は，$\mathscr{A}^T(k)$が同相写像とコンパクト作用素によって分解できることを意味する．

補題 3.5. (g_1,g_2)が，ある$0<c<1$に対して$g_2/\sqrt{G_2}\leq cg_1/\sqrt{G_1}$を満たすとする．このとき，任意の$k\in\mathbf{C}$に対して，$\mathscr{A}^T(k)$は$k$に依存しない同相写像と$k$に依存するコンパクト作用素の差で表される．したがって，$\mathscr{A}^T(k)$は任意の$k\in\mathbf{C}$に対して*Fredholm*作用素である．

証明．$\kappa\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$とし，$\epsilon,\delta>0$を$\sup_\Sigma(\sqrt{G_1})\epsilon<\inf_\Sigma(\sqrt{G_2})\delta$となるように選ぶ．任意の$(u_1,u_2),(v_1,v_2)\in\mathbf{H}^1_0$に対して，半双線形形式$A_{i\kappa,\epsilon,\delta}$を

$$\begin{aligned}&A_{i\kappa,\epsilon,\delta}[(u_1,u_2),(v_1,v_2)]\\&=(\nabla u_1,\nabla v_1)_{M_1}-(\nabla u_2,\nabla v_2)_{M_2}+\kappa^2\left((\epsilon u_1,v_1)_{M_1}-(\delta u_2,v_2)_{M_2}\right),\end{aligned}$$

で定義する．このとき，作用素$\mathscr{I}_{\kappa,\epsilon,\delta}:\mathbf{H}^1_0\to\mathbf{H}^1_0$を，

$$(\mathscr{I}_{\kappa,\epsilon,\delta}(u_1,u_2),(v_1,v_2))_{\mathbf{H}^1}=A_{i\kappa,\epsilon,\delta}[(u_1,u_2),T(u_1,u_2)],\quad\forall(u_1,u_2),(v_1,v_2)\in\mathbf{H}^1_0,$$

によって定義する．このとき，$|\kappa|>0$が十分大ならば，補題3.3から，$\mathscr{I}_{\kappa,\epsilon,\delta}$は$\mathbf{H}^1_0$上の同相写像である．また，補題3.4から，簡単な計算で作用素$\mathscr{I}_{\kappa,\epsilon,\delta}-\mathscr{A}^T(k):\mathbf{H}^1_0\to\mathbf{H}^1_0$がコンパクト作用素であることがわかる． □

作用素$\mathscr{F},\mathscr{G}_{\kappa,\epsilon,\delta}:\mathbf{H}^1_0\to\mathbf{H}^1_0$を，

$$\begin{aligned}&(\mathscr{F}(u_1,u_2),(v_1,v_2))_{\mathbf{H}^1}\\&=(n_1u_1,v_1)_{M_1}+(n_2u_2,v_2)_{M_2}-2(n_1u_1,\chi u_2)_{M_1},\\&(\mathscr{G}_{\kappa,\epsilon,\delta}(u_1,u_2),(v_1,v_2))_{\mathbf{H}^1}\\&=\kappa^2\left((\epsilon u_1,v_1)_{M_1}+(\delta u_2,v_2)_{M_2}-2(\epsilon u_1,\chi u_2)_{M_1}\right),\end{aligned}$$

によって定める．ここで，$(u_1,u_2),(v_1,v_2)\in\mathbf{H}^1_0$は任意である．補題3.5の議論と同様に，$\mathscr{F},\mathscr{G}_{\kappa,\epsilon,\delta}$はコンパクト作用素である．また，$\mathscr{A}^T(k)=\mathscr{I}_{\kappa,\epsilon,\delta}-k^2\mathscr{F}-\mathscr{G}_{\kappa,\epsilon,\delta}$が成り立つ．$\epsilon,\delta>0$を十分小に選ぶと，$\mathscr{I}^{-1}_{\kappa,\epsilon,\delta}\mathscr{G}_{\kappa,\epsilon,\delta}$の作用素ノルムを1未満にすることができる．したがって，$I_{\mathbf{H}^1}-\mathscr{I}^{-1}_{\kappa,\epsilon,\delta}\mathscr{G}_{\kappa,\epsilon,\delta}$は全単射で$\mathbf{H}^1_0$上で有界な逆作用素を持つ．このとき，$k\in\sigma_{a,I}$に属する内部透過固有関数$(u_1,u_2)\in\mathbf{H}^1_0$は，

$$0=\mathscr{I}^{-1}_{\kappa,\epsilon,\delta}\mathscr{A}^T(k)(u_1,u_2)=(I_{\mathbf{H}^1}-\mathscr{I}^{-1}_{\kappa,\epsilon,\delta}\mathscr{G}_{\kappa,\epsilon,\delta})(u_1,u_2)-k^2\mathscr{I}^{-1}_{\kappa,\epsilon,\delta}\mathscr{F}(u_1,u_2),$$

を満たすので，

$$\mathscr{B}=\mathscr{B}_{\kappa,\epsilon,\delta}=(I_{\mathbf{H}^1}-\mathscr{I}^{-1}_{\kappa,\epsilon,\delta}\mathscr{G}_{\kappa,\epsilon,\delta})^{-1}\mathscr{I}^{-1}_{\kappa,\epsilon,\delta},$$

とすると，(u_1,u_2)は

$$\mathscr{B}\mathscr{F}(u_1,u_2)=k^{-2}(u_1,u_2),$$

を満たすことがわかる．したがって，次の命題が成り立つ．

命題 3.6. $(u_1,u_2)\in \mathbf{H}_0^1$ が $0\neq k\in\sigma_{a,I}$ に属する内部透過固有関数であるための必要十分条件は，$\mathbf{H}_0^1$ 上のコンパクト作用素 $\mathscr{B}\mathscr{T}$ が k^{-2} を固有値に持ち，$(u_1,u_2)\in\mathbf{H}_0^1$ が k^{-2} に属する固有関数になることである．

以上により，コンパクト作用素に対するスペクトル理論から，次の定理が導かれる．

定理 3.7. (n_1,n_2) 及び (g_1,g_2) が (3.3) を満たすとならば，$\sigma_{a,I}$ は高々離散集合である．

ある定数 $r,\theta>0$ に対して，$\mathbf{C}$ の部分集合 $N(r,\theta)$ を，

$$N(r,\theta)=\{k\in\mathbf{C}:|k|>r \text{ and } |\mathrm{Im}\,k|>(\tan\theta)|\mathrm{Re}\,k|\},$$

で定義する．次の定理は，内部透過固有値の非存在領域を与える．

定理 3.8. (n_1,n_2) 及び (g_1,g_2) が (3.3) を満たすとする．このとき，$N(r,\theta)$ に内部透過固有値が存在しないような定数 $r,\theta>0$ が存在する．

証明．$\kappa\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ とする．補題3.3から，十分大な $r>0$ で $|\kappa|>r$ ならば $\mathscr{A}^T(i\kappa)$ が (3.7) を満たすようなものが存在する．したがって，ある $C_1,C_2>0$ に対して，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,(\mathscr{A}^T(i\kappa)(u_1,u_2),(u_1,u_2))_{\mathbf{H}^1}\\ &\geq C_1(\|\nabla u_1\|_{M_1}^2+\|\nabla u_2\|_{M_2}^2)+C_2\kappa^2(\|u_1\|_{M_1}^2+\|u_2\|_{M_2}^2),\end{aligned}\tag{3.8}$$

が成り立つ．一方，$k=i\kappa e^{i\varphi}(0\leq\varphi<\pi/2)$ とおく．このとき，ある $C_3>0$ が存在して，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,((\mathscr{A}^T(i\kappa)-\mathscr{A}^T(k))(u_1,u_2),(u_1,u_2))_{\mathbf{H}^1}\\ &\leq C_3\kappa^2|e^{2i\varphi}-1|(\|u_1\|_{M_1}^2+\|u_2\|_{M_2}^2),\end{aligned}\tag{3.9}$$

が成り立つ．(3.8)，(3.9) から，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,(\mathscr{A}^T(k)(u_1,u_2),(u_1,u_2))_{\mathbf{H}^1}\\ &\geq C_1(\|\nabla u_1\|_{M_1}^2+\|\nabla u_2\|_{M_2}^2)+(C_2-C_3|e^{2i\varphi}-1|)\kappa^2(\|u_1\|_{M_1}^2+\|u_2\|_{M_2}^2),\end{aligned}$$

を得るが，$\varphi>0$ を十分小に選ぶと，ある $C>0$ が存在して，

$$\mathrm{Re}\,(\mathscr{A}^T(k)(u_1,u_2),(u_1,u_2))_{\mathbf{H}^1}\geq C\|(u_1,u_2)\|_{\mathbf{H}^1}^2,\quad \forall(u_1,u_2)\in\mathbf{H}_0^1,$$

が成り立つ．$\theta=\pi/2-\varphi$ とおくと，$k\in N(r,\theta)$ に対して $\mathscr{A}^T(k)$ は非自明な核を持つ．□

4. 局所等方的内部透過固有値問題

この節では，$n_l\in C^\infty(M_l)\,(l=1,2)$ に関する (M_1,M_2) 上の局所等方的内部透過固有値問題を考える．本節の議論は，Lakshtanov-Vainberg[16] の結果を多様体へ拡張した [17] に基づく．(2.1)-(2.4) が非自明解 $(u_1,u_2)\in\mathbf{H}^2$ を持つとき，λ を局所等方的内部透過固有値といい，その全体を $\sigma_{i,I}=\sigma_{i,I}((g_1,g_2),(n_1,n_2),(M_1,M_2))$ とする．この非自明解 (u_1,u_2) を $\lambda\in\sigma_{i,I}$ に属する局所等方的内部透過固有関数と呼ぶ．$\lambda\in\sigma_{i,I}$ に属する局所等方的内部透過固有関数によって張られる $\mathbf{H}^2$ の部分空間を $E_{i,I}(\lambda)$ と表し，$\lambda\in\sigma_{i,I}$ に対応する局所等方的内部透過固有空間という．また，$\lambda\in\sigma_{i,I}$ の多重度を $E_{i,I}(\lambda)$ の次元によって定義する．以下，この節では局所等方的を省略し，単に内部透過固有値などと書く．

Dirichlet-Neumann 作用素を定義するために次の Dirichlet 問題を考える：$n\in C^\infty(M)$ に対して，

$$(-\Delta_g-\lambda n)u=0 \quad \text{in} \quad M,\quad u=f \quad \text{on} \quad \partial M.\tag{4.1}$$

このとき，Dirichlet-Neumann 写像 $\Lambda(\lambda)$ を

$$\Lambda(\lambda)f = \partial_{\nu_g} u \quad \text{on} \quad \partial M,$$

によって定義する．ここで，u は (4.1) の解であり，∂_{ν_g} は (M,g) に関する ∂M 上の外向き単位法微分である．$\{\lambda_j\} = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $L^2(M, ndV_g)$ 上で定義された作用素 $L = -n^{-1}\Delta_g$ の Dirichlet 固有値全体の集合とする．L は自己共役楕円型作用素なので，各固有値は正の実数に値を持つ．したがって，一般性を失うことなく $\{\lambda_j\}$ は増加列 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ であるとして仮定して良い．また，λ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ に属する固有関数 $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ はそれが $L^2(M, ndV_g)$ 上の直交基底を成すように選ぶことができる．$\lambda \notin \{\lambda_j\}$ に対して，Dirichlet-Neumann 作用素 $\Lambda(\lambda)$ は well-defined であり，$H^{3/2}(\partial M)$ から $H^{1/2}(\partial M)$ への連続作用素として拡張することができる．

$\mathcal{E}_j \subset \mathbf{Z}_+$ は，$\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_j = \mathbf{Z}_+$ を満たし，i_1, i_2 が $\mathcal{E}_j$ に属するための必要十分条件が $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2}$ となることである．$\lambda_{(j)}$ を $\mathcal{E}_j$ に対応する固有値であるとし，$\mathcal{L}(\lambda_i)$ は $\lambda_{(j)} = \lambda_i$ を満たす $\mathcal{E}_j$ とする．

命題 4.1. $\Lambda(\lambda)$ は $\lambda \in \mathbf{C}$ に関して有理型であり，各 $\lambda_0 \in \{\lambda_j\}$ に 1 位の極を持つ．また，$\Lambda(\lambda)$ は以下の表示を持つ：
(1) 任意の $x \in \partial M$ と $f \in H^{3/2}(\partial M)$ に対して，

$$\Lambda(\lambda)f(x) = -\int_{\partial M} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial_{\nu_g(x)}\phi_j(x)\,\partial_{\nu_g(y)}\phi_j(y)}{\lambda_j - \lambda} f(y)dS_g(y),$$

が成り立つ．
(2) λ_0 の近傍において，

$$\Lambda(\lambda) = \frac{Q_{\mathcal{L}(\lambda_0)}}{\lambda_0 - \lambda} + H(\lambda), \tag{4.2}$$

が成り立つ．ここで，$Q_{\mathcal{L}(\lambda_0)}$ は $\Lambda(\lambda)$ の λ_0 における留数を表し，以下の積分表示を持つ：

$$Q_{\mathcal{L}(\lambda_0)}f = -\sum_{i\in\mathcal{L}(\lambda_0)} \int_{\partial M} \partial_{\nu_g(y)}\phi_i(y)\, f(y)dS_g(y)\,\partial_{\nu_g}\phi_i. \tag{4.3}$$

また，$H(\lambda) : H^{3/2}(\partial M) \to H^{1/2}(\partial M)$ は λ_0 の近傍において解析的である．

証明は省略する（[17] を参照されたい）．

注意 4.2. (4.3) から，$Q_{\mathcal{L}(\lambda_0)}$ の値域は $\{\partial_{\nu_g}\phi_i\}_{i\in\mathcal{L}(\lambda_0)}$ によって張られる有限次元空間であることがわかる．$\{\phi_i\}_{i\in\mathcal{L}(\lambda_0)}$ は直交基底であるから，$\{\partial_{\nu_g}\phi_i\}_{i\in\mathcal{L}(\lambda_0)}$ は線形独立である．したがって，$\dim \operatorname{Ran} Q_{\mathcal{L}(\lambda_0)}$ は λ_0 の *Dirichlet* 固有値としての多重度に一致している．

補題 4.3. $\lambda \in \{\lambda_j\}$ とする．方程式 (4.1) が非自明解を持つための必要十分条件は，各 $j \in \mathcal{L}(\lambda)$ に対して，f が $\partial_{\nu_g}\phi_j$ に $L^2(\partial M)$ 上で直交することである．

証明は省略する（[17] を参照されたい）．

$\lambda_0 \in \{\lambda_j\}$ に対して，$E(\lambda_0) \subset H^2(M)$ を λ_0 についての固有空間とし，$B(\lambda_0)$ を $\{\partial_{\nu_g}\phi_j\}_{j\in\mathcal{L}(\lambda_0)}$ によって張られる $H^{3/2}(\partial M)$ 上の部分空間とする．また，$E(\lambda_0)^c$ を $E(\lambda_0)$ の $L^2(M)$ 上の直交補空間，$B(\lambda_0)^c$ を $B(\lambda_0)$ の $L^2(\partial M)$ 上の直交補空間とする．

ここまで，Riemann 多様体 (M,g) と $n \in C^{\infty}(M)$ に対する Dirichlet-Neumann 作用素について考えてきた．$(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ 及び n_1, n_2 に対しても同様の記法を用

い，右下に1及び2の添え字を付け区別するものとする．命題4.1より，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ は $\lambda\in\mathbf{C}$ に関して有理型であり，$\{\lambda_{1,j}\}\cup\{\lambda_{2,j}\}$ 上に1位の極を持つ．$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の極 λ_0 の近傍において，

$$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)=\frac{Q_{\lambda_0}}{\lambda_0-\lambda}+H_{\lambda_0}(\lambda),$$

と表示する．ここで，Q_{λ_0} 及び $H_{\lambda_0}(\lambda)$ はそれぞれ (4.2) に現れる $Q_{\mathcal{L}(\lambda_0)}$ 及び $H(\lambda)$ と同様の性質を持つ．また，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の核を以下で定義する：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ker}(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))\\&=\begin{cases}\{f\in H^{3/2}(\Gamma)\,:\,(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))f=0\},\ \lambda \text{ が極でない},\\ \{f\in H^{3/2}(\Gamma)\,:\,Q_{\lambda_0}f=H_{\lambda_0}(\lambda_0)f=0\},\ \lambda=\lambda_0 \text{ が極である}.\end{cases}\end{aligned}$$

次の補題は，内部透過固有値と Dirichlet-Neumann 作用素の関係を与える．

補題 4.4. (1) $\lambda\notin\{\lambda_{1,j}\}\cap\{\lambda_{2,j}\}$ とする．$\lambda\in\sigma_{i,I}$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))\neq\{0\}$ が成り立つことである．λ の多重度は $\dim(\mathrm{Ker}(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)))$ で与えられる．
(2) $\lambda\in\{\lambda_{1,j}\}\cap\{\lambda_{2,j}\}$ とする．$\lambda\in\sigma_{i,I}$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))\neq\{0\}$ が成り立つか，$Q_{1,\mathcal{L}(\lambda)}$ 及び $Q_{2,\mathcal{L}(\lambda)}$ の値域が非自明な共通部分を持つことである．λ の多重度は $\dim(\mathrm{Ker}(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)))$ と上記の共通部分の次元の和で与えられる．

証明．(1) を証明する．$\lambda\notin\{\lambda_{1,j}\}\cup\{\lambda_{2,j}\}$ ならば，この補題は内部透過固有値の定義から明らか．$\lambda\in\{\lambda_{1,j}\}\setminus\{\lambda_{2,j}\}$ についてのみ証明すれば十分である．$0\neq f\in\mathrm{Ker}(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))$ に対して，$Q_{1,\mathcal{L}(\lambda)}f=(H_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))f=0$ が成り立つ．$Q_{1,\mathcal{L}(\lambda)}f=0$ 及び (4.3) から，$f\in B_1(\lambda)^c$ が従う．補題4.3から，次の方程式の非自明解が存在する：

$$(4.4)\qquad(-\Delta_{g_1}-\lambda n_1)u_1=0\quad\text{in}\quad M_1,\quad u_1=f\quad\text{on}\quad\Gamma.$$

一方，$\Lambda_2(\lambda)f=H_1(\lambda)f$ から，

$$(4.5)\qquad(-\Delta_{g_2}-\lambda n_2)u_2=0\quad\text{in}\quad M_2,\quad u_2=f,\ \partial_{\nu_2}u_2=H_1(\lambda)f\quad\text{on}\quad\Gamma,$$

が成り立つ．(4.4)，(4.5) 及び $\partial_{\nu_1}u_1=H_1(\lambda)f$ をまとめると，(u_1,u_2) が (2.1)-(2.4) の非自明解となっていることがわかる．したがって，$\lambda\in\sigma_{i,I}$ となる．逆に，$\lambda\in\sigma_{i,I}$ を仮定する．また，(u_1,u_2) を λ に属する内部透過固有関数であるとする．このとき，$u_1\big|_\Gamma=f\neq0$ を Dirichlet 境界条件に持つ (4.4) は非自明解を持つ．したがって，補題4.3と (4.3) から，$Q_{1,\mathcal{L}(\lambda)}f=0$ が従う．これと (4.2) より，$\partial_{\nu_1}u_1=\Lambda_1(\lambda)f=H_1(\lambda)f$ が従う．一方，$\partial_{\nu_1}u_1=\partial_{\nu_2}u_2$ から $(H_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))f=0$ が従う．したがって，$0\neq f\in\mathrm{Ker}(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))$ が成り立つ．

次に (2) を証明する．$\mathrm{Ker}(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))=\{0\}$ の場合のみを示せばよい．Γ 上で $u_1=u_2=0$ であるような (2.1)-(2.4) が非自明解を持つとする．このとき，注意 (4.3) から，$Q_{1,\mathcal{L}(\lambda)}$ 及び $Q_{2,\mathcal{L}(\lambda)}$ の値域は非自明な共通部分を持つ．逆に，$Q_{1,\mathcal{L}(\lambda)}$ 及び $Q_{2,\mathcal{L}(\lambda)}$ の値域が非自明な共通部分を持つと仮定する．このとき，$\{\partial_{\nu_l}\phi_{l,j}\}_{j\in\mathcal{L}(\lambda)}$ $(l=1,2)$ は線形独立なので，(2.1)-(2.4) の非自明解が存在する．したがって，$\lambda\in\sigma_{i,I}$．□

注意 4.5. [16] では，補題4.4の (2) の２つ目の条件を満たす内部透過固有値を *"singular spectral point"* と呼んでいる．本稿でもそのように呼ぶことにする．

補題 4.4 から，内部透過固有値のスペクトル特性を調べるためには，Dirichlet-Neumann 作用素（の差）を解析すれば良いことがわかる．Dirichlet-Neumann 作用

素を調べるために，そのシンボルを計算する．ここでは，(4.1) のある種の近似解作用素である "local regularizer" を構成する方法を取る．構成法については [25] の §2 の議論に従う．以下では，Dirichlet 問題 (4.1) が $L^2(M)$ の適当な部分空間で一意的に可解であることを仮定する．$x^{(0)} \in \partial M$ を任意に選び固定する．$V \subset \partial M$ を ∂M 上における $x^{(0)}$ の十分小な近傍であるとする．このとき，開集合 $U \subset M$ で $\overline{U} \cap \partial M = V$ かつ U がある開集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ に微分同相であるようなものが存在する．$x^{(0)} \in V$ を中心とする Ω 上の局所座標系 $y = (y_1, \cdots, y_{d-1}, y_d)$ で以下の性質を満たすものを導入する：(1) $x^{(0)} = 0$, (2) 十分小な $\epsilon_0 > 0$ に対して，$\Omega = \{y \in \mathbf{R}^d : y_d > 0$ かつ $|y| < \epsilon_0\}$, (3) $\partial\Omega^0 := \{y \in \overline{\Omega} : y_d = 0\}$ は V と微分同相である，(4) y_d は点 $y = (y_1, \cdots, y_{d-1}, y_d) \in \Omega$ と $\partial\Omega^0$ との距離である．このとき，$y' = (y_1, \cdots, y_{d-1})$ とおくと，

$$(g^{ij}(y))_{i,j} = \begin{bmatrix} \widetilde{g}(y') & \widetilde{p}(y) \\ {}^t\widetilde{p}(y) & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U,$$

を満たすようななめらかな正定値対称 $(d-1) \times (d-1)$ 行列値関数 $\widetilde{g}(y') = (\widetilde{g}^{ij}(y'))_{i,j}$ 及び $(d-1)$ 次元ベクトル値関数 $\widetilde{p}(y) = {}^t(p_1(y), \cdots, \widetilde{p}_{d-1}(y))$ が存在する．上記で定義した Ω 上の座標近傍系 $y = (y', y_d)$ を用いて，作用素 $A = -\Delta_g - \lambda n$ は次のように書き換えられる：

$$A =: -\partial_d^2 - \sum_{i,j=1}^{d-1} \widetilde{g}^{ij}(y')\partial_i\partial_j - 2\sum_{i=1}^{d} \widetilde{p}_i(y)\partial_i\partial_d - \sum_{i=1}^{d} \widetilde{h}_i(y)\partial_i - \lambda n(y) \quad \text{in} \quad U.$$

ここで，$\widetilde{h}_i(y) = G^{-1/2} \sum_{j=1}^{d} \partial_j (G^{1/2} g^{ij})$ である．

注意 4.6. (M_1, g_1) 及び (M_2, g_2) についても同様の記法を用いる．このとき，$y = (y', y_d) = (y_1, \cdots, y_{d-1}, y_d)$ は U_1 及び U_2 の共有する局所座標系とする．*Riemann* 計量 (g_1, g_2) に対して局所等方性を仮定しているので，$\widetilde{g}_1^{ij}(y') = \widetilde{g}_2^{ij}(y')$ 及び $\widetilde{p}_{1,i}(y)|_{y_d=0} = \widetilde{p}_{2,i}(y)|_{y_d=0} = 0\ (i, j = 1, \ldots, d)$ が成り立つ．

A のシンボルは以下で与えられる：

$$A(\lambda; y', y_d, \xi', \xi_d) = \xi_d^2 + \sum_{i,j=1}^{d-1} \widetilde{g}^{ij}(y')\xi_i\xi_j + 2\sum_{i=1}^{d} \widetilde{p}_i(y)\xi_i\xi_d - i\sum_{i=1}^{d-1} \widetilde{h}_i(y)\xi_i - \lambda n(y).$$

$N > 0$ を十分大な整数とし，$z = (z', 0) \in \partial\Omega^0$ を任意に選び固定する．$\widetilde{g}^{ij}(y')$, $\widetilde{p}_i(y)$, $\widetilde{h}_i(y)$ 及び $n(y)$ に対する $(z', 0) \in \partial\Omega^0$ 周りでの $y = (y', y_d)$ についての Taylor の定理から，シンボル $A(\lambda; y', y_d, \xi', \xi_d)$ を剰余項と以下の和として展開できる：

$$\xi_d^2 + \sum_{i,j=1}^{d-1} \widetilde{g}^{ij}(z')\xi_i\xi_j, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{d-1} \nabla_{y'}\widetilde{g}^{ij}(z') \cdot (y' - z')\xi_i\xi_j + i\sum_{i=1}^{d} \widetilde{h}_i(z', 0)\xi_i \\ &+ 2\sum_{i=1}^{d-1} (\nabla_{y'}\widetilde{p}_i(z', 0) \cdot (y' - z') + \partial_d\widetilde{p}_i(z', 0)y_d)\,\xi_i\xi_d, \end{aligned} \tag{4.7}$$

及び，$2 \leq m \leq N$ に対して，

(4.8)

$$\sum_{i,j=1}^{d-1}\sum_{|\alpha'|=m}\frac{\partial_{y'}^{\alpha'}\widetilde{g}^{ij}(z')}{\alpha'!}(y'-z')^{\alpha'}\xi_i\xi_j+2\sum_{i=1}^{d}\sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial_y^{\alpha}\widetilde{p}_i(z',0)}{\alpha!}(y'-z')^{\alpha'}y_d^{\alpha_d}\xi_i\xi_d$$

$$+i\sum_{i=1}^{d}\sum_{|\alpha|=m-1}\frac{\partial_y^{\alpha}\widetilde{h}_i(z',0)}{\alpha!}(y'-z')^{\alpha'}y_d^{\alpha_d}\xi_i-\lambda\sum_{|\alpha|=m-2}\frac{\partial_y^{\alpha}n(z',0)}{\alpha!}(y'-z')^{\alpha'}y_d^{\alpha_d}.$$

すなわち，

$$A(\lambda;y',y_d,\xi',\xi_d)=A_0(z';\xi',\xi_d)+A_1(z';y'-z',y_d,\xi',\xi_d)$$
$$+\sum_{m=2}^{N}A_m(\lambda,z';y'-z',y_d,\xi',\xi_d)+A'_{N+1}(\lambda,z';y'-z',y_d,\xi',\xi_d).$$

また，剰余項 A'_{N+1} の $(z',0)$ における零点の多重度は $N-1$ である．

関数 $F(y',y_d,\xi',\xi_d)$ が $(y',y_d),(\xi',\xi_d)\in\mathbf{R}^d$ に関して一般化 s 次斉次であるとは，任意の $t>0$ に対して，F が

$$F(t^{-1}y',t^{-1}y_d,t\xi',t\xi_d)=t^sF(y',y_d,\xi',\xi_d),$$

を満たすときをいう．関数 $F(y_d,\xi')$ に対しても同様に一般化斉次性を定義する．このとき，各 A_m は $(y'-z',y_d),(\xi',\xi_d)$ に関して一般化 $2-m$ 次斉次である．特に，A_0 は A の主シンボルである．$|\xi'|_{\partial M}^2:=\sum_{i,j=1}^{d-1}\widetilde{g}^{ij}(y')\xi_i\xi_j$ とおく．このとき，以下の微分作用素を定義する：

$$\widetilde{A}_0=A_0(z';\xi',i\partial_d)=-\partial_d^2+|\xi'|_{\partial M}^2,$$
$$\widetilde{A}_1=A_1(z';-i\partial_{\xi'},y_d,\xi',i\partial_d),\quad \widetilde{A}_m=A_m(\lambda,z';-i\partial_{\xi'},y_d,\xi',i\partial_d),\quad m\geq 2.$$

命題 4.7. $F(y_d,\xi')$ はなめらかな関数で，y_d,ξ' に関して一般化 s 次斉次であるとする．このとき，$\widetilde{A}_mF$ は y_d,ξ' に関して一般化 $2-m+s$ 次斉次である．

証明は省略する（[17] を参照されたい）．

補題 4.8. $|\xi'|_{\partial M}\neq 0$ とする．系

$$\sum_{n=0}^{m}\widetilde{A}_nE_{m-n}(z';y_d,\xi')=0,\quad m=0,1,\ldots,$$

は，各 E_m が $y_d\to\infty$ のときに 0 に収束し，$E_0\big|_{y_d=0}=1$ 及び $m\geq 1$ に対して $E_m\big|_{y_d=0}=0$ を満たす一意解 $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ を持つ．特に，$E_0(z';y_d,\xi')=e^{-|\xi'|_{\partial M}y_d}$ が成り立つ．各解 E_m はなめらかで，y_d,ξ' に関して一般化 $-m$ 次斉次である．

証明． $\widetilde{A}_0=-\partial_d^2+|\xi'|_{\partial M}^2$ から，$E_0(z';y_d,\xi')=e^{-|\xi'|_{\partial M}y_d}$ である．明らかに，E_0 は y_d,ξ' に関して一般化 0 次斉次である．$v(y_d,\xi')$ 及び $p(y_d,\xi')$ に関する次の方程式を考える：

$$(-\partial_d^2+|\xi'|_{\partial M}^2)v=p\ \text{ on }\ (0,\infty),\quad v(0,\xi')=0,\ v(y_d,\xi')\to 0\ \text{ as }\ y_d\to\infty.$$

ここで，$p(y_d,\xi')$ は $y_d\to\infty$ に対して指数減衰しており，一般化 s 次斉次であるとする．v 及び p を $(-\infty,0)$ では 0 として拡張すると，v に関して次の積分表示を得る：

$$v(y_d,\xi')=\frac{1}{2|\xi'|_{\partial M}}\left(\int_0^{y_d}e^{-|\xi'|_{\partial M}(y_d-\eta)}p(\eta,\xi')d\eta+\int_{y_d}^{\infty}e^{-|\xi'|_{\partial M}(\eta-y_d)}p(\eta,\xi')d\eta\right).$$

このとき，$\tau = t\eta$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
&v(t^{-1}y_d, t\xi') \\
&= \frac{t^{s-2}}{2|\xi'|_{\partial M}} \left(\int_0^{y_d} e^{-|\xi'|_{\partial M}(y_d-\tau)} p(\tau,\xi')d\tau + \int_{y_d}^{\infty} e^{-|\xi'|_{\partial M}(\tau-y_d)} p(\tau,\xi')d\tau \right) \\
&= t^{s-2} v(y_d, \xi'),
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これは，v が y_d, ξ' に関して一般化 $s-2$ 次斉次であることを意味する．命題 4.7 より，$\widetilde{A}_1 E_0$ は y_d, ξ' に関して一般化 1 次斉次である．したがって，E_1 は y_d, ξ' に関して一般化 -1 次斉次である．この議論を帰納的に繰り返すことで，各 E_m が y_d, ξ' に関して一般化 $-m$ 次斉次であることがわかる． □

$\beta(\xi') \in C^\infty(\mathbf{R}^{d-1})$ は $\xi' = 0$ の近傍で 0 であり，$\xi' = 0$ の十分大な近傍の外では 1 となるものとする．$y' \in \partial\Omega^0$ 及び $\psi \in H_0^{3/2}(\partial\Omega^0)$ に対して，作用素 Q_m を

$$
(Q_m\psi)(z'; y', y_d) = (2\pi)^{-(d-1)} \int e^{iy'\cdot\xi'} \beta(\xi') E_m(z'; y_d, \xi') \int e^{-iw'\cdot\xi'} \psi(w') dw' d\xi',
$$

によって定義する．また，$R_N = \sum_{m=0}^N Q_m$ とおく．関数 $q_m(z', y', y_d)$ を，

$$
q_m(z'; y', y_d) = (2\pi)^{-(d-1)} \int e^{iy'\cdot\xi'} \beta(\xi') E_m(z'; y_d, \xi') d\xi', \tag{4.9}
$$

とすると，$q_m \in \mathcal{S}'$ であり，

$$
\begin{aligned}
(Q_m\psi)(z'; y', y_d) &= \int q_m(z'; y'-w', y_d)\psi(w')dw', \\
(R_N\psi)(z'; y', y_d) &= \int r_N(z'; y'-w', y_d)\psi(w')dw',
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，$r_N(z'; y'-w', y_d) = \sum_{m=0}^N q_m(z'; y'-w', y_d)$ である．A を，

$$
\begin{aligned}
A =& A_0(z'; i\partial_{y'}, i\partial_d) + A_1(z'; y'-z', y_d, i\partial_{y'}, i\partial_d) \\
&+ \sum_{m=2}^N A_m(\lambda, z'; y'-z', y_d, i\partial_{y'}, i\partial_d) + A'_{N+1}(\lambda, z'; y'-z', y_d, i\partial_{y'}, i\partial_d),
\end{aligned}
$$

と表示する．Ar_N の和による表示について考える：

$$
Ar_N = \sum_{J=0}^N \sum_{m'+m=J} A_{m'} q_m + \sum_{J=N+1}^{2N} \sum_{m',m\le N, m'+m=J} A_{m'} q_m + A'_{N+1} r_N. \tag{4.10}
$$

補題 4.9. m', m 及び N は十分大であるとする．このとき，$A_{m'}q_m \in H^\gamma(\Omega)$ 及び $A'_{N+1}r_N \in H^{\gamma'}(\Omega)$ が成り立つ．ここで，$\gamma = O(m'+m)$ 及び $\gamma' = O(N)$ である．

証明は省略する（[17] を参照されたい）．

以上の準備の下で，(4.1) に対する local regularizer が以下で与えられる．

定理 4.10. $N > 1$ を十分大とする．このとき，$s = O(N)$ に対して，

$$
A_l R_N\psi \in H^s(\Omega),\ R_N\psi\big|_{y_d=0} - \psi \in C^\infty(\partial\Omega^0), \quad \forall\psi \in H_0^{3/2}(\partial\Omega^0),
$$

が成り立つ．この R_N を (4.1) に対する *local regularizer* と呼ぶ．

証明．(4.9) 及び (4.6)-(4.8) から，

$$
\begin{aligned}
& A_{m'}(\lambda, z; y'-z', y_d, i\partial_{y'}, i\partial_d) q_m(z'; y'-w', y_d) \\
(4.11) \quad & = (2\pi)^{-(d-1)} \int e^{i(y'-w')\cdot\xi'} \widetilde{A}_{m'}\big(\beta(\xi') E_m(z'; y_d, \xi')\big) d\xi',
\end{aligned}
$$

が成り立つことに注意する．補題 4.8 から，

$$
\sum_{J=0}^{N} \sum_{m'+m=J} \widetilde{A}_{m'} E_m(z'; y_d, \xi') = 0, \tag{4.12}
$$

が成り立つ．したがって，(4.10)，(4.11)，(4.12) 及び補題 4.9 から，$s = O(N)$ に対して，$AR_N\psi \in H^s(\Omega)$ が成り立つ．また，$y_d \to 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
& R_N\psi(y', y_d) - \psi(y') \\
& = (2\pi)^{-(d-1)} \iint e^{i(y'-w')\cdot\xi'} \left(\sum_{m=0}^{N} \beta(\xi') E_m(z'; y_d, \xi') - 1 \right) \psi(w') d\xi' dw' \\
& \to (2\pi)^{-(d-1)} \iint e^{i(y'-w')\cdot\xi'} \left(\beta(\xi') - 1\right) \psi(w') d\xi' dw'.
\end{aligned}
$$

したがって，$\beta(\xi') - 1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{d-1})$ より，$R_N\psi\big|_{y_d=0} - \psi(y') \in C^\infty(\partial\Omega^0)$ が従う． □

d 次元コンパクト多様体 M 上の線形作用素 P が r 次の “singular integro-differential operator” であるとは，ξ に関する $r-j$ 次斉次関数 $p_j(x,\xi) \in C^\infty(M \times (\mathbf{R}^d \setminus \{0\}))$ で，P の局所座標近傍 $U \subset M$ 上に台を持つ関数 u への作用を，

$$
Pu(x) = (2\pi)^{-d} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \beta(\xi) \sum_{j=0}^{N} p_j(x,\xi) u(y) dy d\xi + T_{N+1}u, \quad x \in U,
$$

と書けるものが存在するときをいう（[24] を参照されたい）．ここで，$\beta \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ は，$|\xi| \le 1$ のときは $\beta(\xi) = 0$ で，$|\xi| \ge 2$ のときは $\beta(\xi) = 1$ を満たす任意の関数であり，T_{N+1} は $O(N)$ 次の平滑化作用素である．すなわち，任意の $s \in \mathbf{R}$ に対して，$T_N : H^s(M) \to H^{s+O(N)}(M)$ を満たす．P の主シンボルは $p_0(x,\xi)$ であり，完全シンボルは形式和 $\sum_j p_j(x,\xi)$ で与えられる．P が楕円型であるとは，$\xi \ne 0$ に対して，$p_0(x,\xi) \ne 0$ が成り立つときをいう．これは P に対するパラメトリクスの構成ができることを意味する（[14] を参照されたい）．したがって，P が楕円型 singular integro-differential operator ならば，P は Fredholm である．形式和 $R = \sum_{m=0}^{\infty} R_m$ は，定理 4.10 から，singular integro-differential operator である

Ω 上の局所座標系 $y = (y', y_d)$ について $\partial_\nu = -\partial_d$ が成り立つから，定理 4.10 の直接の帰結として次の系を得る．[25] の補題 11 及び定理 14 も参照されたい．

系 4.11. (1) λ が $\Lambda(\lambda)$ の極でない場合，$\Lambda(\lambda)$ は $H^{3/2}(\partial M)$ 上の *singular integro-differential operator* で，完全シンボルは次の漸近級数で与えられる．

$$
\Lambda(\lambda; y', \xi') = -\sum_{m=0}^{\infty} \partial_d E_m(y'; y_d, \xi')\Big|_{y_d=0}, \quad y' \in \partial\Omega^0. \tag{4.13}
$$

(2) λ_0 が $\Lambda(\lambda)$ の極である場合，λ_0 における $\Lambda(\lambda)$ の正則部分 $H(\lambda)$ は $B(\lambda_0)^c$ 上の *singular integro-differential operator* で，完全シンボルは (4.13) で与えられる．

これより，内部透過固有値を特徴付ける Dirichlet-Neumann 作用素の差 $\Lambda_1(\lambda) - \Lambda_2(\lambda)$ の主シンボルについて調べていく．Γ 上の $(M_l, g_l)\ (l = 1, 2)$ に関する高次の法微分を，

$$
\partial_{\nu_l}^m := \partial_{\nu_l} \circ \partial_{\nu_l}^{m-1}, \ m \ge 2, \quad \partial_{\nu_l}^1 = \partial_{\nu_l},
$$

と定義する．Ω 上の局所座標系 $y=(y',y_d)$ について，$\partial_{\nu_l}=(-1)^m\partial_d^m$ と表示することができる．仮定 (A) に加えて新たな仮定 (B) を与える．

(B) (g_1,g_2) 及び (n_1,n_2) は次の 2 つの場合のいずれかを満たす：任意の $x\in\Gamma$ 及び各 $i,j=1,\cdots,d$ に対して，

(B-1) $m\le 2$ に対して $\partial_{\nu_1}^m g_1^{ij}(x)=\partial_{\nu_2}^m g_2^{ij}(x)$ であり，$n_1(x)\ne n_2(x)$ が成り立つ，

または，

(B-2) $m\le 3$ に対して $\partial_{\nu_1}^m g_1^{ij}(x)=\partial_{\nu_2}^m g_2^{ij}(x)$ であり，$n_1(x)=n_2(x)$ 及び $\partial_{\nu_1}n_1(x)\ne\partial_{\nu_2}n_2(x)$ が成り立つ．

仮定 (A) 及び (B-1) または (B-2) の下で，それぞれ $m\le 1$ または $m\le 2$ に対し，$\widetilde{A}_{1,m}=\widetilde{A}_{2,m}$ が成り立つことに注意する．$\widetilde{B}_l(\lambda_0)$ を，$\lambda_0\in\{\lambda_{l,j}\}$ $(l=1,2)$ のときは $\widetilde{B}_l(\lambda_0)=B_l(\lambda_0)$ とし，それ以外の場合には $\widetilde{B}_l(\lambda_0)=\emptyset$ を満たす $L^2(\Gamma)$ の部分空間であるとする．λ_0 が $\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ が極であるとき，部分空間 $B(\lambda_0)\subset H^{3/2}(\Gamma)$ を $B(\lambda_0)=\widetilde{B}_1(\lambda_0)\cup\widetilde{B}_2(\lambda_0)$ によって定義する．$B(\lambda_0)^c$ によって $B(\lambda_0)$ の $L^2(\Gamma)$ 上における直交補空間を表す．λ_0 が $\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の極であるとき，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ が Fredholm であるとは，その正則部分 $H_{\lambda_0}(\lambda)$ が Fredholm であることをいう．

補題 4.12. $\lambda\ne 0$ とする．
(1) λ は $\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の極でないとする．(B-1) の場合，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda):H^{3/2}(\Gamma)\to H^{5/2}(\Gamma)$ は -1 次の楕円型 *singular integro-differential operator* であり，その主シンボルは以下で与えられる：

$$-\frac{\lambda(n_1(x)-n_2(x))}{2|\xi'|_\Gamma},\quad x\in\Gamma,\quad \xi'\in\mathbf{R}^{d-1}. \tag{4.14}$$

(2) λ は $\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の極でないとする．(B-2) の場合，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda):H^{3/2}(\Gamma)\to H^{7/2}(\Gamma)$ は -2 次の楕円型 *singular integro-differential operator* であり，その主シンボルは以下で与えられる：

$$\frac{\lambda(\partial_{\nu_1}n_1(x)-\partial_{\nu_2}n_2(x))}{4|\xi'|_\Gamma^2},\quad x\in\Gamma,\quad \xi'\in\mathbf{R}^{d-1}. \tag{4.15}$$

(3) λ_0 が $\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の極であるとする．λ_0 まわりの $\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の正則部分は，(B-1) に対しては -1 次の，(B-2) に対しては -2 次の $B(\lambda_0)^c$ 上の楕円型 *singular integro-differential operator* であり，その主シンボルはそれぞれ (4.14) または (4.15) で与えられる．
(4) (B-1) 及び (B-2) のいずれの場合に対しても，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ は各 $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ について *Fredholm* である．

証明. (g_1,g_2) 及び (n_1,n_2) は (B-1) を満たすとする．Ω 上の局所座標系 $y=(y',y_d)$ について，$\widetilde{A}_{1,0}=\widetilde{A}_{2,0}$, $\widetilde{A}_{1,1}=\widetilde{A}_{2,1}$ 及び $\widetilde{A}_{1,2}-\widetilde{A}_{2,2}=-\lambda(n_1(y',0)-n_2(y',0))$ が成り立つ．このとき，$E_{1,0}=E_{2,0}=e^{-|\xi'|_\Gamma y_d}$, $E_{1,1}=E_{2,1}$ 及び，

$$(-\partial_d^2+|\xi'|_\Gamma^2)(E_{1,2}-E_{2,2})=\lambda(n_1(y',0)-n_2(y',0))e^{-|\xi'|_\Gamma y_d},$$

が成り立つ．この方程式の特殊解で $y_d=0$ 及び $y_d\to\infty$ のとき 0 に収束するようなものは，

$$\frac{\lambda(n_1(y',0)-n_2(y',0))}{2|\xi'|_\Gamma}y_d e^{-|\xi'|_\Gamma y_d},$$

で与えられる．したがって，系 4.11 の (1) より，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の主シンボルは $-\partial_d(E_{1,2}-E_{2,2})|_{y_d=0}$ で与えられるので，(1) が示された．
(2),(3) も同様である．(4) は (1)-(3) から直ちに従う．　□

内部透過固有値の離散性を証明する．そのためにBlekher[3]によって拡張された解析的Fredholm理論を導入する．[22]の補遺Aも参照されたい．H_1 及び H_2 をHilbert空間とし，$D \subset \mathbf{C}$ を連結領域とする．$z \in D \subset \mathbf{C}$ に依存する作用素 $A(z): H_1 \to H_2$ を与える．作用素値関数 $z \mapsto A(z)$ が D 上で有限階有理型であるとは，$A(z)$ が z について有理型であり，その極におけるLaurent級数の主部が有限階作用素であるときをいう．特に，命題4.1から，$\Lambda_l(\lambda)\,(l=1,2)$ は $\lambda \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ について有限階有理型である．次の定理が拡張された解析的Fredholm定理である．

定理 4.13. D 上の作用素数値関数 $z \mapsto A(z)$ は有限階有理型で各 $z \in D$ について $A(z): H_1 \to H_2$ が *Fredholm* であると仮定する．ある点 $z_0 \in D$ に対して，$A(z_0)^{-1}$ が存在するならば，$z \mapsto A(z)^{-1}$ もまた D 上の有限階有理型作用素値関数で各 $z \in D$ について $A(z)^{-1}$ は *Fredholm* である．

定理4.13から，ある $\lambda_0 \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ に対して $(\Lambda_1(\lambda_0)-\Lambda_2(\lambda_0))^{-1}$ が存在するならば，$(\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda))^{-1}$ は $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ からある離散集合を除いて逆を持つ．したがって，$\sigma_{i,I}$ が離散集合で有ることを示すためには，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 上のある点における可逆性を調べれば良い．

この可逆性を調べるために再び作用素 A のシンボルの展開を考える．しかし，今度は λ を変数として展開することを考える．まず，一般化斉次性をパラメータを込めた意味で拡張する．関数 $F(\kappa; y', y_d, \xi', \xi_d)$ が $(y', y_d), (\xi, \xi_d) \in \mathbf{R}^d$ に関して，κ パラメーター一般化 s 次斉次であるとは，

$$F(t\kappa; t^{-1}y', t^{-1}y_d, t\xi', t\xi_d) = t^s F(\kappa; y', y_d, \xi', \xi_d), \quad t>0,\ \kappa \in \mathbf{C}\setminus\{0\},$$

を満たすときをいう．$\sqrt{\lambda}$ について適切な分枝を選び，$\kappa=\sqrt{\lambda}$ とおく．作用素 A のシンボルを κ について $\mathcal{A}(\kappa, z'; y', y_d, \xi', \xi_d) := A(\lambda, z'; y', y_d, \xi', \xi_d)$ とおく．Ω 上の座標近傍系 $y=(y', y_d)$ を用いると，

$$\mathcal{A}(\kappa; y', y_d, \xi', \xi_d) = \sum_{m=0}^{N} \mathcal{A}_m(\kappa, z'; y'-z', y_d, \xi', \xi_d) + \mathcal{A}'_{N+1}(\kappa, z'; y'-z', y_d, \xi', \xi_d),$$

と書ける．ここで，$\mathcal{A}_m(\kappa, z'; y'-z', y_d, \xi', \xi_d)$ は $(y', y_d), (\xi, \xi_d) \in \mathbf{R}^d$ に関して，κ パラメーター一般化 $2-m$ 次斉次であり，$\mathcal{A}'_{N+1}$ は剰余項である．

補題4.12と同様の結果がパラメータを込めた意味で成り立つ．これに対応する補題を述べる前に，パラメータ付き作用素に対するパラメータ楕円性を定義する．$P(\lambda)$ をパラメータ $\lambda \in \mathbf{C}$ に依存するsingular integro-differential operatorとする．$P(\lambda)$ の完全シンボルが κ パラメーター一般化斉次関数の形式級数で与えられているとする．$|\lambda| + |\xi'|_\Gamma^2 \neq 0$ に対して，$P(\lambda)$ の主シンボルが消えないとき $P(\lambda)$ をパラメータ楕円型と呼ぶ．

補題 4.14. $\lambda \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_{\geq 0}$ とする．
(1) (B-1) の場合，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ はパラメータ楕円型で，その主シンボルは，

$$\frac{-\lambda(n_1(x)-n_2(x))}{\sqrt{|\xi'|_\Gamma^2-\lambda n_1(x)}+\sqrt{|\xi'|_\Gamma^2-\lambda n_2(x)}}, \quad x \in \Gamma, \quad \xi' \in \mathbf{R}^{d-1}.$$

(2) (B-2) の場合，$\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ はパラメータ楕円型で，その主シンボルは，

$$\frac{\lambda(\partial_{\nu_1} n_1(x)-\partial_{\nu_2} n_2(x))}{4(|\xi'|_\Gamma^2-\lambda n(x))}, \quad x \in \Gamma, \quad \xi' \in \mathbf{R}^{d-1}.$$

ここで，$n(x) := n_1(x) = n_2(x)$ 及び $\widetilde{g}^{ij}(x) := \widetilde{g}_1^{ij}(x) = \widetilde{g}_2^{ij}(x)$ と置いた．

証明は省略する（[17] を参照されたい）．

$t > 0$ とする．パラメータ付き Hilbert 空間 $H^{m,t}(\Gamma)$ をノルム $\|f\|^2_{H^{m,t}(\Gamma)} = \|f\|^2_{H^m(\Gamma)} + t^{2m}\|f\|^2_{L^2(\Gamma)}$ による $C^\infty(\Gamma)$ の完備化とする．$\mathbf{S}_0$ を原点中心の閉扇型で，$\mathbf{S}_0 \cap \mathbf{R}_{>0} = \emptyset$ を満たすものとする．また，$\mathbf{S}_0^e := \mathbf{S}_0 \cap \{\lambda \in \mathbf{C}\ ;\ |\lambda| \geq 1\}$ とする．補題 4.14 から，$\Lambda_1(\lambda) - \Lambda_2(\lambda)$ の λ についての一様評価を得る．この評価から次の定理を得る．

定理 4.15. $\lambda \in \mathbf{S}_0^e$ で $|\lambda|$ は十分大であるとする．$t = \sqrt{|\lambda|}$ とおく．各 $m \in \mathbf{R}$ に対して，作用素 $\lambda^{-1}(\Lambda_1(\lambda) - \Lambda_2(\lambda)) : H^{m,t}(\Gamma) \to H^{m+s,t}(\Gamma)$ は，(B-1) の場合は $s = 1$，(B-2) の場合は $s = 2$ として逆を持つ．

証明は省略する．[1] の定理 4.4.6 あるいは [13] を参照されたい．

定理 4.13 及び 4.15 の系として次の定理が導かれる．

定理 4.16. (A) 及び (B-1) または (B-2) のいずれかが成り立つと仮定する．$\sigma_{i,I}$ は $\mathbf{C}$ 上の離散集合から成り，集積点は 0 または無限遠のみに持つ．また，$\mathbf{S}_0^e$ 内には高々有限個の固有値しか存在しない．

これより，$\{\lambda_{l,j}\}$ $(l = 1, 2)$ の Weyl 則を用いて内部透過固有値列の Weyl 則を調べる．次の事実は [21] の定理 1.2.1 の直接の帰結である．

定理 4.17. M を d 次元コンパクト多様体とし，$n \in C^\infty(M)$ とする．$x \in M$ に対して，$\mathcal{O}(x) = \{\xi \in \mathbf{R}^d\ :\ \sum_{i,j} g^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq n(x)\}$ とし，$v(\mathcal{O}(x))$ によって $\mathcal{O}(x)$ の *Euclid* 測度による体積を与える．このとき，$N(\lambda) := \#\{j\ ;\ \lambda_j \leq \lambda\}$ は

$$N(\lambda) = V\lambda^{d/2} + O(\lambda^{(d-1)/2}) \quad as \quad \lambda \to \infty, \tag{4.16}$$

を満たす．ここで，$V = (2\pi)^{-d}\int_M v(\mathcal{O}(x))dV$ である．

$(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ 及び n_1, n_2 に対する Dirichlet 固有値についても同様の Weyl 則が成り立つ．(4.16) の係数 V に対応する係数をそれぞれ V_1, V_2 で表す．

仮定 (A) から，$\Gamma = \cup_{l=1}^m \Gamma_l$ 及び $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset\ (j \neq k)$ が成り立つような $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ が存在する．ここで各 Γ_l は Γ の閉連結成分である．任意の点 $x^{(0)} \in \Gamma_l\ (l = 1, 2)$ を取る．$x^{(0)}$ の小近傍 $V \subset \Gamma_l\ (l = 1, 2)$ で，十分小な有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ と $U_1 \cong U_2$ が微分同相かつ $\overline{U_1} \cap \Gamma_l = \overline{U_2} \cap \Gamma_l = V$ を満たすものが存在する．$x \in V$ と $\partial\Omega^0$ 上の点を同一視する．このとき，$x \in V$ の近傍 Ω の元 y に対して，関数

$$\gamma_l(x) := \begin{cases} \mathrm{sgn}(n_2(y) - n_1(y)), & \text{(B-1) の場合,} \\ -\mathrm{sgn}(\partial_{\nu_2}n_2(y) - \partial_{\nu_1}n_1(y)), & \text{(B-2) の場合,} \end{cases}$$

は well-defined な定数関数である．また，関数 $\gamma_l(x)$ は 1 または -1 に値を持つ定数関数として自然に Γ_l 全体に拡張される．Γ 上の関数 $\gamma(x)$ は各 $x \in \Gamma_l$ に対して $\gamma(x) = \gamma_l(x)$ によって定義される．D_Γ は Γ 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ_Γ を用いて $D_\Gamma = -\Delta_\Gamma + 1$ で与えられるものとする．(B-1) に対して $s = 1$，(B-2) に対して $s = 2$ として補助的な作用素 $B(\lambda)$ を，

$$B(\lambda) = \gamma D_\Gamma^{(1+s)/4}(\Lambda_1(\lambda) - \Lambda_2(\lambda))D_\Gamma^{(1+s)/4},$$

によって定義する．このとき，λ が $\Lambda_1(\lambda) - \Lambda_2(\lambda)$ の極でなければ $B(\lambda)$ は 1 次の singular integro-differential operator である．

補題 4.18. (1) $\lambda \notin \{\lambda_{1,j}\} \cap \{\lambda_{2,j}\}$ とする．$\lambda \in \sigma_{i,I}$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\,B(\lambda) \neq \{0\}$ である．また，λ の多重度は $\dim\mathrm{Ker}\,B(\lambda)$ に一致する．
(2) $\lambda \in \{\lambda_{1,j}\} \cap \{\lambda_{2,j}\}$ とする．$\lambda \in \sigma_{i,I}$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{Ker}\,B(\lambda) \neq$

$\{0\}$ が成り立つか，$\gamma D_\Gamma^{(1+s)/4} Q_{1,\mathcal{L}(\lambda)} D_\Gamma^{(1+s)/4}$ 及び $\gamma D_\Gamma^{(1+s)/4} Q_{2,\mathcal{L}(\lambda)} D_\Gamma^{(1+s)/4}$ の値域が非自明な共通部分を持つことである．また，λ の多重度はこの共通部分の次元と $\dim \operatorname{Ker} B(\lambda)$ の和に一致する．

補題 4.19. $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ を $B(\lambda)$ の極でないとする．
(1) $B(\lambda)$ は 1 次の対称楕円型 *singular integro-differential operator* で，その主シンボルは，(B-1) に対しては，

$$-\frac{\lambda\gamma(n_1(x) - n_2(x))}{2}|\xi'|_\Gamma, \quad x \in \Gamma, \quad \xi' \in \mathbf{R}^d - 1,$$

(B-2) に対しては，

$$\frac{\lambda\gamma(\partial_{\nu_1} n_1(x) - \partial_{\nu_2} n_2(x))}{4}|\xi'|_\Gamma, \quad x \in \Gamma, \quad \xi' \in \mathbf{R}^d - 1,$$

で与えられる．ここで，$\widetilde{g}^{ij}(x) := g_1^{ij}(x) = g_2^{ij}(x)$ とした．
(2) $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，$B(\lambda)$ のスペクトルは離散的である．

$B(\lambda)$ の固有値を $\{\mu_j(\lambda)\} := \{\mu_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ とする．$\mu_j(\lambda)$ の極 λ_0 に対して，$\mu_j(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{-1} \mathrm{res}_{\lambda=\lambda_0} \mu_j(\lambda) + \widetilde{\mu}_j(\lambda)$ と書ける．ここで，$\widetilde{\mu}_j(\lambda)$ は λ_0 の近傍で解析的である．$B(\lambda)$ は正値な主シンボルを持ち λ について有理型であるから，次の補題が成り立つ．証明は [15] の Lemma 2.4 及び 2.5 と同様である．

補題 4.20. (1) $I \subset \mathbf{R}_{>0}$ をコンパクト区間で，$B(\lambda)$ の極を含まないと仮定する．このとき，ある定数 $C(I) > 0$ が存在して任意の $\lambda \in I$ に対して，$\mu_j(\lambda) \geq -C(I)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．
(2) $B(\lambda)$ がある点の近傍で解析的ならば，$B(\lambda)$ のすべての固有値 $\mu_j(\lambda)$ もその近傍で解析的である．p は $B(\lambda)$ の極 λ_0 における留数の階数であるとする．このとき，p 個の固有値 $\mu_j(\lambda)$ 及びその固有関数は λ_0 に極を持つ．さらに，$\mathrm{res}_{\lambda=\lambda_0}\mu_j(\lambda)$ は $\mathrm{res}_{\lambda=\lambda_0}B(\lambda)$ の固有値である．

十分小に $\alpha \in (0, \min\{\lambda_{1,1}, \lambda_{2,1}\})$ を選ぶ．このとき，$\{\lambda_j^T\} := \{\lambda_j^T\}_{j=1}^\infty$ によって，$\lambda_j^T \in (\alpha, \infty)$ 及び $\lambda_1^T \leq \lambda_2^T \leq \cdots$ を満たす実内部透過固有値列を表す．また，$\{\lambda_j^T\}$ の多重度を込めた個数関数を $N_T(\lambda) = \#\{j \; ; \; \alpha < \lambda_j^T \leq \lambda\}$ によって定義する．これより，$\{\lambda_j^T\}$ 及び $\{\mu_j(\lambda)\}$ の関係について考察する．簡単に述べると，$N_T(\lambda)$ を singular spectral point の個数と $\mu_j(\lambda) = 0$ を満たす λ の個数によって評価することを考える．$B(\lambda)$ の負固有値の個数を，

$$N_-(\lambda) := \#\{j \; ; \; \mu_j(\lambda) < 0\}, \quad \forall\lambda \notin \{\lambda_j^T\} \cup \{\lambda_{1,j}\} \cup \{\lambda_{2,j}\},$$

によって定義する．$\mu_j(\lambda)$ の λ に関する有理型性から，$N_-(\lambda')$ の値は $\lambda' \in (\alpha, \infty)$ が $\mu_j(\lambda)$ の零点あるいは $B(\lambda)$ の極を通過するとき変化する．λ' が α から λ へ向かって進むときに，$\mu_j(\lambda)$ の零点を通過した場合の $N_-(\lambda) - N_-(\alpha)$ の変化量を $\mathcal{N}_0(\lambda)$ によって，$B(\lambda)$ の極を通過した場合の変化量を $\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda)$ によって定義する．このとき，

$$N_-(\lambda) - N_-(\alpha) = \mathcal{N}_0(\lambda) + \mathcal{N}_{-\infty}(\lambda), \tag{4.17}$$

が成り立つ．$B(\lambda)$ の極 λ_0 に対して，

$$\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) := N_-(\lambda_0 + \epsilon) - N_-(\lambda_0 - \epsilon), \quad \forall\epsilon > 0$$

とする．

補題 4.21. $\lambda_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ を $B(\lambda)$ の極とする．$s_\pm(\lambda_0) := \#\{j : \pm\mathrm{res}_{\lambda=\lambda_0}\mu_j(\lambda) > 0\}$ に対して，$\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) = s_+(\lambda_0) - s_-(\lambda_0)$ が成り立つ．

証明．補題 4.20 から，λ_0 に極を持つ $B(\lambda)$ の固有値 $\mu_j(\lambda)$ が存在する．$\pm\mathrm{res}_{\lambda=\lambda_0}\mu_j(\lambda) > 0$ が成り立つとする．このとき，$\lambda \to \lambda_0 + 0$ に対しては $\mu_j(\lambda) \to \mp\infty$ が，$\lambda \to \lambda_0 - 0$ に対しては $\mu_j(\lambda) \to \pm\infty$ がそれぞれ成り立つ．したがって，λ が λ_0 を実軸上正の方向に向かって横切るとき，$\mathrm{res}_{\lambda=\lambda_0}\mu_j(\lambda) < 0$ に対しては負固有値の個数が減少し，$\mathrm{res}_{\lambda=\lambda_0}\mu_j(\lambda) > 0$ に対しては増加する．これは補題の主張が成り立つことを意味する． □

$\gamma\big|_{\Gamma_l} = \pm 1$ を満たす連結成分 $\Gamma_l \subset \Gamma$ の連結和を $\Gamma_\pm$ とする．$\lambda_0 \in \{\lambda_{l,j}\}\,(l = 1, 2)$ に対して，

$$\begin{aligned} m_l^{\pm}(\lambda_0) &= \dim(\mathrm{Ran}\, Q_{l,\mathcal{L}(\lambda_0)} \cap L^2(\Gamma_\pm))\,(l = 1, 2), \\ m^{\pm}(\lambda_0) &= \dim(\mathrm{Ran}\, Q_{1,\mathcal{L}(\lambda_0)} \cap \mathrm{Ran}\, Q_{2,\mathcal{L}(\lambda_0)} \cap L^2(\Gamma_\pm)), \\ m_l(\lambda_0) &= \dim \mathrm{Ran}\, Q_{l,\mathcal{L}(\lambda_0)}\,(l = 1, 2), \\ m(\lambda_0) &= \dim(\mathrm{Ran}\, Q_{1,\mathcal{L}(\lambda_0)} \cap \mathrm{Ran}\, Q_{2,\mathcal{L}(\lambda_0)}), \end{aligned}$$

とする．このとき，$B(\lambda)$ の極 $\lambda_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，$m_l(\lambda_0) = m_l^+(\lambda_0) + m_l^-(\lambda_0)\,(l = 1, 2)$ 及び $m(\lambda_0) = m^+(\lambda_0) + m^-(\lambda_0)$ が成り立つ．

補題 4.22. $\lambda_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ は $B(\lambda)$ の極であるとする．
(1) $\lambda_0 \notin \{\lambda_{1,j}\} \cap \{\lambda_{2,j}\}$ に対して，$\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) = (m_2^+(\lambda_0) - m_2^-(\lambda_0)) - (m_1^+(\lambda_0) - m_1^-(\lambda_0))$ が成り立つ．
(2) $\lambda_0 \in \{\lambda_{1,j}\} \cap \{\lambda_{2,j}\}$ に対して，$|\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) - ((m_2^+(\lambda_0) - m_2^-(\lambda_0)) - (m_1^+(\lambda_0) - m_1^-(\lambda_0)))| \le m(\lambda_0)$ が成り立つ．

証明．(1) を証明する．$\lambda_0 \in \{\lambda_{1,j}\}$ に対して証明する．$B(\lambda)$ を λ_0 の近傍上で展開する：

$$B(\lambda) = \frac{\gamma D_\Gamma^{(1+s)/4} Q_{1,\mathcal{L}(\lambda_0)} D_\Gamma^{(1+s)/4}}{\lambda_0 - \lambda} + \widetilde{H}_{\lambda_0}(\lambda).$$

このとき，$Q_{1,\mathcal{L}(\lambda_0)} < 0$ より，$D_\Gamma^{(1+s)/4} Q_{1,\mathcal{L}(\lambda_0)} D_\Gamma^{(1+s)/4} < 0$ が成り立つ．したがって，補題 4.20 (2) より，$D_\Gamma^{(1+s)/4} Q_{1,\mathcal{L}(\lambda_0)} D_\Gamma^{(1+s)/4}$ は $m_1(\lambda_0)$ 個の負固有値を持つ．これは $s_\pm(\lambda_0) = m_1^{\mp}(\lambda_0)$ が成り立つことを意味する．したがって，補題 4.21 から，$\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda_0) = m_1^-(\lambda_0) - m_1^+(\lambda_0)$ 及び $m_2(\lambda_0) = 0$ が成り立つ．$\lambda_0 \in \{\lambda_{2,j}\}$ に対しても同様である．
(2) を証明する．$\lambda_{1,i_1} \in \{\lambda_{1,j}\}$ 及び $\lambda_{2,i_2} \in \{\lambda_{2,j}\}$ に対して，$\lambda_0 = \lambda_{1,i_1} = \lambda_{2,i_2}$ とする．このとき，λ_0 の小近傍で以下の表示が成り立つ：

$$B(\lambda) = \frac{\gamma Q_{\lambda_0}}{\lambda_0 - \lambda} + \widetilde{H}_{\lambda_0}(\lambda).$$

ここで，$Q_{\lambda_0} = D_\Gamma^{(1+s)/4}(Q_{1,\mathcal{L}(\lambda_0)} - Q_{2,\mathcal{L}(\lambda_0)}) D_\Gamma^{(1+s)/4}$ である．このとき，$B_1(\lambda_0) \cap B_2(\lambda_0)^\perp$ 上では $Q_{\lambda_0} < 0$ が，$B_1(\lambda_0)^\perp \cap B_2(\lambda_0)$ 上では $Q_{\lambda_0} > 0$ が成り立つ．したがって，$m_1^-(\lambda_0) + m_2^+(\lambda_0) - m(\lambda_0) \le s_+(\lambda_0) \le m_1^-(\lambda_0) + m_2^+(\lambda_0)$ 及び $m_1^+(\lambda_0) + m_2^-(\lambda_0) - m(\lambda_0) \le s_-(\lambda_0) \le m_1^+(\lambda_0) + m_2^-(\lambda_0)$ が成り立つ．これらの不等式と補題 4.21 から (2) の主張が従う． □

次の定理は $N_T(\lambda)$ の Weyl 型の下からの有界性を示す．

定理 4.23. (A) 及び (B-1) または (B-2) を仮定する．十分大な $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$N_T(\lambda) \ge \sum_{\alpha < \lambda' \le \lambda} \big((m_1^+(\lambda') - m_1^-(\lambda')) - (m_2^+(\lambda') - m_2^-(\lambda'))\big) - N_-(\alpha), \tag{4.18}$$

が成り立つ．ここで，$\sum_{\alpha<\lambda'\leq\lambda}$ は $\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)$ の極 $\lambda'\in(\alpha,\lambda]$ についての和を取るものとする．さらに，$\Gamma_\pm=\emptyset$ 及び $\pm(V_1-V_2)>0$ が成り立つとする．このとき，$N_T(\lambda)$ は漸近的に

$$N_T(\lambda)\geq\mp(V_1-V_2)\lambda^{d/2}+O(\lambda^{(d-1)/2})\quad as\quad \lambda\to\infty, \tag{4.19}$$

を満たす．

証明．$\{\lambda_{1,j}\}\cap\{\lambda_{2,j}\}\neq\emptyset$ の場合に証明する．$\{\lambda_{1,j}\}\cap\{\lambda_{2,j}\}=\emptyset$ に対しては同様かつより簡単に証明することができる．$(\alpha,\lambda]\subset\mathbf{R}_{>0}$ に含まれる singular spectral point の多重度を込めた個数関数を $N_{sng}(\lambda)$ で表す．$\mathcal{N}_0(\lambda)$ の定義と補題 4.18 から $\mathcal{N}_0(\lambda)+N_{sng}(\lambda)\leq N_T(\lambda)$ が成り立つ．$B(\lambda)$ の極 $\lambda'\in(\alpha,\lambda]$ について $|\delta\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda')-((m_2^+(\lambda')-m_2^-(\lambda'))-(m_1^+(\lambda')-m_1^-(\lambda')))|\leq m(\lambda')$ の和を取ると

$$\left|\mathcal{N}_{-\infty}(\lambda)-\sum_{\alpha<\lambda'\leq\lambda}((m_2^+(\lambda')-m_2^-(\lambda'))-(m_1^+(\lambda')-m_1^-(\lambda')))\right|\leq N_{sng}(\lambda),$$

を得る．したがって，(4.17) から，

$$\begin{aligned}&N_-(\lambda)-N_-(\alpha)+\sum_{\alpha<\lambda'\leq\lambda}((m_1^+(\lambda')-m_1^-(\lambda'))-(m_2^+(\lambda')-m_2^-(\lambda')))\\&\leq\mathcal{N}_0(\lambda)+N_{sng}(\lambda)\leq N_T(\lambda),\end{aligned}$$

が成り立つ．$N_-(\lambda)\geq 0$ から，(4.18) を得る．$\lambda'\in\{\lambda_{1,j}\}\cap\{\lambda_{2,j}\}$ とする．$\Gamma_+=\emptyset$ (resp. $\Gamma_-=\emptyset$) に対して，$m_i^+(\lambda')=0$ (resp. $=m_i(\lambda')$), $m_i^-(\lambda')=m_i(\lambda')$ (resp. $=0$) $(i=1,2)$ が成り立つ．したがって，(4.18) から，

$$N_T(\lambda)\geq\mp(N_1(\lambda)-N_2(\lambda))-N_-(\alpha),$$

を得る．(4.19) は定理 4.17 から直ちに成り立つ． □

References

[1] Agranovich, M. S., Elliptic operators on closed manifolds, Partial differential equations IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences. **63** (1994), 1-130.

[2] Blåsten, E. Päivärinta, L. and Sylvester, J., Corners always scatter, Comm. Math. Phys. **331** (2014), 725–753.

[3] Blekher, P. M., Operators that depend meromorphically on a parameter, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mech. **24** (1969), 30-36. (in Russian) ; English transl.: Moscow Univ. Math. Bull. **24** (1969), 21-26.

[4] Bonnet-Ben Dhia, A.-S. Chesnel, L. and Haddar, H., On the use of T-coercivity to study the interior transmission eigenvalue problem, C. R. Math. Acad. Sci. Paris. **349** (2011), 647–651.

[5] Bonnet-Ben Dhia, A.-S. Chesnel, L. and Nazarov, S. A., Non-scattering wavenumbers and far field invisibility for a finite set of incident/scattering directions, Inverse Problems. **31** (2015), 045006, 24.

[6] Bonnet-Ben Dhia, A.-S., Ciarlet, Jr., P. and Zwölf, C. M., Time harmonic wave diffraction problems in materials with sign-shifting coefficients, J. Comput. Appl. Math. **234** (2010), 1912–1919.

[7] Cakoni, F. Colton, D. and Haddar, H., The computation of lower bounds for the norm of the index of refraction in an anisotropic media, J. Integral Equations and Applications. **21** (2009), 203-227.

[8] Cakoni, F. Gintides, D. and Haddar, H., The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues, SIAM J. Math. Anal. **42** (2010), 237–255.

[9] Cakoni, F. and Haddar, H., Transmission eigenvalues in inverse scattering theory, MSRI Publications Vol. 60 "Inverse Problems and Applications : Inside Out II", (2012), 529-580

[10] Cakoni, F. and Kirsch, A., On the interior transmission eigenvalue problem, Int. J. Comput. Sci. Math. **3** (2010), 142–167.

[11] Colton, D and Kress, R., Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer, New York, 3rd edition, 2013.

[12] Colton, D and Monk, P., The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in an inhomogeneous medium, Quart. J. Mech. Appl. Math. **41** (1988), 97–125.

[13] Grubb, G., Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems, Birkhauser, Boston, 1996.

[14] Hörmander, L., Pseudo-differential Operators and Hypoelliptic Equations, Proc. Symposium on Singular Integrals, Amer. Math. Soc. **10** (1967), 138-183.

[15] Lakshtanov, E. and Vainberg, B., Bounds on positive interior transmission eigenvalues, Inverse Problems. **28** (2012), 105005, 13.

[16] Lakshtanov, E. and Vainberg, B., Application of elliptic operator theory to the isotropic interior transmission eigenvalue problem, Inverse Problems. **29** (2013), 104003, 19.

[17] Morioka, H. and Shoji, N., Interior transmission eigenvalue problems on compact manifolds with smooth boundary, preprint. arXiv:1703.02704.

[18] Päivärinta, L. and Sylvester, J., Transmission eigenvalues, SIAM J. Math. Anal. **40** (2008), 738–753.

[19] Petkov, V. and Vodev ,G., Asymptotics of the number of the interior transmission eigenvalues, preprint. arXiv:1403.3949.

[20] Shoji, N., On T-coercive interior transmission eigenvalue problems on compact manifolds with smooth boundary, preprint. arXiv:1703.01743.

[21] Safarov, Yu. and Vassiliev, D. The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators, AMS, 1997.

[22] Skubachevskii, A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications, Birkhauser Basel, 1997.

[23] Sylvester, J., Discreteness of transmission eigenvalues via upper triangular compact operators, SIAM J. Math. Anal. **44** (2012), 341–354.

[24] Vainberg, B. R. and Grusin V. V., Uniformly nonelliptic problems I, Mat. Sb. **1** (1967), 543-568.

[25] Vainberg, B. R. and Grusin, V. V., Uniformly nonelliptic problems II, Mat. Sb. **2** (1967), 111-133.

[26] Vesalainen, E. V., Transmission eigenvalues for a class of non-compactly supported potentials, Inverse Problems. **29** (2013) 104006, 11.

[27] Vesalainen, E. V., Rellich type theorems for unbounded domains, Inverse Probl. Imaging. **8** (2014) 865–883.

[28] Vodev,G., Transmission eigenvalue-free regions, Comm. Math. Phys. **336** (2015) 1141–1166.

[29] Vodev, G., Transmission eigenvalues for strictly concave domains, Math. Ann. **366** (2016) 301–336.

[30] Vodev, G., High-frequency approximation of the interior Dirichlet-to-Neumann map and applications to the transmission eigenvalues, preprint. arXiv:1701.04668.

[31] Vodev, G., Parabolic transmission eigenvalue-free regions in the degenerate isotropic case preprint. arXiv:1702.00675.