数理解析研究所講究録
第2047巻 2017年 141-151

離散確率分布における Kullback 情報量の直和分解

関東学院大学　経済学部　　布能 英一郎
Eiichiro Funo
School of Econmics, Kanto Gakuin University

1. Introduction

本稿は、離散確率分布のみを扱う。確率分布 $P_\theta(x)$ と 2 つの仮説 $H_1 : \theta_i = p_i$, $H_2 : \theta_i = q_i$ に対して, Kullback 情報量 $I(1,2)$ は

$$I(1,2) = E_{H_1} \log \frac{P(X \mid H_1)}{P(X \mid H_2)} = \sum_i p_i \log \frac{p_i}{q_i}$$

で定義される。

2 標本問題における Total Information, Between Information, Within Information

2 標本問題にて、仮説 H_1 を「2 つの母集団は異なる」, 仮説 H_2 :「2 つの母集団は同じ」に選ぶ。Total Information とは、「仮説 H_1 の下での推定量と、仮説 H_2 の下でのパラメータ $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_k)$ 」間の Kullback 情報量、Between Information とは、「仮説 H_2 の下での推定量と、仮説 H_2 の下でのパラメータ $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_k)$ 」間の Kullback 情報量、Within Information とは、「仮説 H_1 の下での推定量と、仮説 H_2 の下での推定量」間の Kullback 情報量、で定義されるものである。

例：多項分布　2 つの独立な多項分布 $\boldsymbol{X}^{[1]}$, $\boldsymbol{X}^{[2]}$, すなわち　$\boldsymbol{X}^{[i]} = (X_1^{[i]}, \cdots, X_k^{[i]}) \sim M(N^{[i]}, p_1^{[i]}, \cdots, p_k^{[i]})$　$(i = 1, 2.)$　に対して、H_1 : 2 つの母集団は異なる、H_2 : 2 つの母集団は同じ、は

$$H_1 : \quad (p_1^{[1]}, \cdots, p_k^{[1]}) = \boldsymbol{p}^{[1]} \neq \boldsymbol{p}^{[2]} = (p_1^{[2]}, \cdots, p_k^{[2]}),$$

$$H_2 : \quad p_i^{[1]} = p_i^{[2]} = p_i, \ \ i = 1, \cdots, k,$$

と記述できる。よって

$$L = \text{Likelihood} = \frac{P(\boldsymbol{x}^{[1]}, \boldsymbol{x}^{[2]} \mid H_1)}{P(\boldsymbol{x}^{[1]}, \boldsymbol{x}^{[2]} \mid H_2)} = \prod_{i=1}^{2} \frac{\prod_{j=1}^{k} (p_j^{[i]})^{x_j^{[i]}}}{\prod_{j=1}^{k} (p_j)^{x_j^{[i]}}} = \prod_{i=1}^{2} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{p_j^{[i]}}{p_j} \right)^{x_j^{[i]}}$$

$$E_{H_1} \log L = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{k} E_{H_1}(X_j^{[i]}) \log \frac{p_j^{[i]}}{p_j} = \sum_{i=1}^{2} N^{[i]} \sum_{j=1}^{k} p_j^{[i]} \log \frac{p_j^{[i]}}{p_j} \tag{1}$$

である。Total Information は、(1) 式の $p_j^{[i]}$ に H_2 の下での (best な) 推定量 $\hat{p}_j^{[i]} = x_j^{[i]} / N^{[i]}$ を代入して

$$\text{Total Information} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{k} x_j^{[i]} \log \frac{x_j^{[i]} / N^{[i]}}{p_j} \tag{2}$$

Within Information は、(2) 式の p_j に H_1 の下での (best な) 推定量 $\hat{p}_j = (x_j^{[1]} + x_j^{[2]})/(N^{[1]} + N^{[2]})$ を代入して

$$\text{Within Information} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{k} x_j^{[i]} \log \frac{x_j^{[i]}/N^{[i]}}{(x_j^{[1]} + x_j^{[2]})/(N^{[1]} + N^{[2]})} \tag{3}$$

全く同様な考え方で

$$\text{Between Information} = \sum_{j=1}^{k} (x_j^{[1]} + x_j^{[2]}) \log \frac{(x_j^{[1]} + x_j^{[2]})/(N^{[1]} + N^{[2]})}{p_j} \tag{4}$$

が得られる。

Proposition 1. 多項分布の 2 標本問題にて、Total Information は Within Information と Between Information の和に等しい。

これは、(2), (3), (4) 式より、容易な計算で得られる。以降、2 標本問題にて、Total information = Within information + Between information が成り立つとき、 Kullback Information の直和分解が成立する、と略記する。

上記の結果は、「離散分布の場合にも『Sum of Squares Total は Sum of Squares Within と Sum of Squares Between の和 という分散分析の基本結果』に対応したものがある」ことを示している。本稿の筆者はこれまでに、離散モデルの 2 標本問題において、 Kullback Information の直和分解が成立する場合、不成立の場合についていくつかの成果を得てきたが、本稿では新たな結果を加えて報告する。

2. 多項分布の場合

Proposition 1. は多項分布の 2 標本問題にて考察したものであるが、これを pooling incomplete samples を伴う多項分布 (Asano, 1965) の場合に拡張できる。

Proposition 2.1 $\boldsymbol{X}^{[1]}$, $\boldsymbol{X}^{[2]}$, $\boldsymbol{Y}^{[1]}$, $\boldsymbol{Y}^{[2]}$, は互いに独立で、各 $i = 1, 2$ に対して

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{X}^{[i]} &= (X_1^{[i]}, \cdots, X_m^{[i]}, \cdots, X_k^{[i]}) \sim \text{Multinomial}(N_x^{[i]}; p_1^{[i]}, \cdots, p_m^{[i]}, \cdots, p_k^{[i]}), \\ \boldsymbol{Y}^{[i]} &= (Y_1^{[i]}, \cdots, Y_m^{[i]}) \sim \text{Multinomial}\Big(N_y^{[i]}; \frac{p_1^{[i]}}{\sum_{j=1}^m p_j^{[i]}}, \cdots, \frac{p_m^{[i]}}{\sum_{j=1}^m p_j^{[i]}}\Big) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

と仮定する。仮説 H_1, H_2 を、

$$H_2 : p_j^{[1]} = p_j^{[2]} = p_j \ \text{ for all } j = 1, \cdots, k, \quad H_1 : \text{not } H_2 \tag{6}$$

に選ぶ。このとき、 Kullback Information の直和分解が成り立つ。

Proposition 2.1 は、 pooling incomplete samples が 1 回行われた場合である。これが階層構造で複数回行われても、同様な結果が成り立つ。たとえば、

Proposition 2.2 $\boldsymbol{X}^{[i]}=(X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]})$, $\boldsymbol{Y}^{[i]}=(Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]})$, $\boldsymbol{Z}^{[i]}=(Z_1^{[i]},\cdots,Z_{m(1)}^{[i]})$, $(i=1,2)$ が互いに独立で

$$\boldsymbol{X}^{[i]}\sim \mathrm{Multinomial}(N_x^{[i]};\ \theta_1^{[i]},\cdots\cdots,\theta_{m(1)}^{[i]},\cdots\cdots,\ \theta_{m(2)}^{[i]},\cdots\cdots,\ \theta_k^{[i]}),$$

$$\boldsymbol{Y}^{[i]}\sim \mathrm{Multinomial}\Big(N_y^{[i]};\frac{\theta_1^{[i]}}{\sum_{a=1}^{m(2)}\theta_a^{[i]}},\cdots,\frac{\theta_{m(1)}^{[i]}}{\sum_{a=1}^{m(2)}\theta_a^{[i]}},\cdots,\frac{\theta_{m(2)}^{[i]}}{\sum_{a=1}^{m(2)}\theta_a^{[i]}}\Big),$$

$$\boldsymbol{Z}^{[i]}\sim \mathrm{Multinomial}\Big(N_z^{[i]};\frac{\theta_1^{[i]}}{\sum_{a=1}^{m(1)}\theta_a^{[i]}},\cdots,\frac{\theta_{m(1)}^{[i]}}{\sum_{a=1}^{m(1)}\theta_a^{[i]}}\Big),$$

とする。仮説 H_1, H_2 を $H_2:\theta_j^{[1]}=\theta_j^{[2]}=\theta_j$, $H_1:\text{not } H_2$ に選ぶ。このとき、Kullback Information の直和分解が成り立つ。

注： $$\frac{\theta_j^{[i]}/\sum_{a=1}^{m(2)}\theta_a^{[i]}}{\sum_{l=1}^{m(1)}(\theta_l^{[i]}/\sum_{a=1}^{m(2)}\theta_a^{[i]})}=\frac{\theta_j^{[i]}}{\sum_{a=1}^{m(1)}\theta_a^{[i]}}\quad j=1,\cdots,m(1).$$

さて、Proposition 2.1 におけるモデルの確率構造および仮説、すなわち、(5), (6) は、$s=\sum_{l=1}^{m}p_l$, $u_j=p_j/\sum_{l=1}^{m}p_l$, $(j\le m)$, $v_j=p_j/\sum_{l=m+1}^{k}p_l$ $(j>m)$ とパラメータ変換することで、次のように書き直せる：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{X}^{[i]}=(X_1^{[i]},\cdots,X_m^{[i]},X_{m+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]})\\&\qquad\sim \mathrm{Multinomial}(N_x^{[i]};s^{[i]}u_1^{[i]},\cdots,s^{[i]}u_m^{[i]},(1-s^{[i]})v_{m+1}^{[i]},\cdots,(1-s^{[i]})v_k^{[i]}),\\&\boldsymbol{Y}^{[i]}=(Y_1^{[i]},\cdots,Y_m^{[i]})\sim \mathrm{Multinomial}(N_y^{[i]};u_1^{[i]},\cdots,u_m^{[i]})\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&H_2:\ u_j^{[1]}=u_j^{[2]}=u_j,\ \ v_j^{[1]}=v_j^{[2]}=v_j\ \text{ for all } j,\ \text{ and } s^{[1]}=s^{[2]}=s\\&H_1:\ \text{not } H_2.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

さて、確率構造に関する仮定 (7) は、次の 表 2.1 のように書き表すことができる。

表 2.1

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$X_1^{[i]},\cdots,X_m^{[i]}$	$X_{m+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
	$s^{[i]}$	$1-s^{[i]}$
	$u_1^{[i]},\cdots,u_m^{[i]}$	$v_{m+1}^{[i]},\cdots,v_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$Y_1^{[i]},\cdots,Y_m^{[i]}$	
	$u_1^{[i]},\cdots,u_m^{[i]}$	

以降、本稿では、混乱の恐れがない限り、多項分布の確率構造に関する仮定を (7) のように記載する代わりに 表 2.1 のように略記する。また、仮説 H_1, H_2 は、常に H_2：パラメータは index $i=1,2$ に関して等しい (つまり、$s^{[1]}=s^{[2]}=s$ 等), H_1 :not H_2 に選ぶ。

このような表記により、Proposition 2.2 は、変数変換 $s^{[i]}=\sum_{l=1}^{m(2)}\theta_l^{[i]}$, $t^{[i]}=\frac{\sum_{l=1}^{m(1)}\theta_l^{[i]}}{\sum_{l=1}^{m(2)}\theta_l^{[i]}}$,

$$u_j^{[i]}=\frac{\theta_j^{[i]}}{\sum_{l=1}^{m(1)}\theta_l^{[i]}},\quad v_j^{[i]}=\frac{\theta_j^{[i]}}{\sum_{l=m(1)+1}^{m(2)}\theta_l^{[i]}},\quad w_j^{[i]}=\frac{\theta_j^{[i]}}{\sum_{l=m(2)+1}^{k}\theta_l^{[i]}}$$ によって、

$\boldsymbol{X}^{[i]}$, $\boldsymbol{Y}^{[i]}$, $\boldsymbol{Z}^{[i]}$ $(i=1,2)$ が互いに独立な多項分布で、その確率構造が 表 2.2 で与えられているならば、Kullback Information の直和分解が成り立つ

と言い表すことができる。

表 2.2

<table>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{X}^{[i]}$</td><td>$X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$</td><td>$X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$</td></tr>
<tr><td>$s^{[i]}t^{[i]}$</td><td>$s^{[i]}(1-t^{[i]})$</td><td>$1-s^{[i]}$</td></tr>
<tr><td>$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$</td><td>$w_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,w_k^{[i]}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{Y}^{[i]}$</td><td>$Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$t^{[i]}$</td><td>$1-t^{[i]}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{Z}^{[i]}$</td><td>$Z_1^{[i]},\cdots,Z_{m(1)}^{[i]}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Proposition 2.2 と同様な結果も、直ちに得られる。

Proposition 2.3 $\boldsymbol{X}^{[i]}$, $\boldsymbol{Y}^{[i]}$ $(i=1,2)$ が互いに独立な多項分布で、その確率構造が表 2.3 で与えられているならば、Kullback Information の直和分解が成り立つ

表 2.3

<table>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{X}^{[i]}$</td><td>$X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$</td><td>$X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$</td></tr>
<tr><td>$s^{[i]}t^{[i]}$</td><td>$s^{[i]}(1-t^{[i]})$</td><td>$1-s^{[i]}$</td></tr>
<tr><td>$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$</td><td>$w_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,w_k^{[i]}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{Y}^{[i]}$</td><td>$Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$t^{[i]}$</td><td>$1-t^{[i]}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$</td><td></td></tr>
</table>

なお パラメータに関しては、各 $i=1,2$ に対して $0 \le s^{[i]},t^{[i]},u_j^{[i]},v_j^{[i]},w_j^{[i]} \le 1$, $\sum_{j=1}^{m(1)} u_j^{[i]}=1$, $\sum_{j=m(1)+1}^{m(2)} v_j^{[i]}=1$, $\sum_{j=m(2)+1}^{k} w_j^{[i]}=1$ が満たされるものとする。(パラメータに関するこの仮定は、以降、暗黙の仮定として、本節で特に断わることなく用いる)

Remark: Proposition 2.3 の確率構造を「 $\boldsymbol{X}^{[i]}$ と $\boldsymbol{Y}^{[i]}$ のパラメータが比例関係にある」と述べることができる。

他方、Proposition 2.3 とかなり似通った確率構造を持っていても、Kullback Information の直和分解が成り立たないことがある。

例 2.1 $\boldsymbol{X}^{[i]}$, $\boldsymbol{Y}^{[i]}$ $(i=1,2)$ は互いに独立な多項分布で、その確率構造が表 2.4 で与えら

れている。このとき、Kullback Information の直和分解は不成立。

表 2.4

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$	$X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$	$X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
	$s^{[i]}$	$(1-s^{[i]})t^{[i]}$	$(1-s^{[i]})(1-t^{[i]})$
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	$w_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,w_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]}$	$Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$	
	$s^{[i]}$	$1-s^{[i]}$	
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	

例 2.2 $\boldsymbol{X}^{[i]}$, $\boldsymbol{Y}^{[i]}$, $\boldsymbol{Z}^{[i]}$, $(i=1,2)$ は互いに独立な多項分布で、その確率構造が 表 2.5 で与えられている。このとき、Kullback Information の直和分解は不成立。

表 2.5

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$	$X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$	$X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
	$s^{[i]}t^{[i]}$	$s^{[i]}(1-t^{[i]})$	$1-s^{[i]}$
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	$w_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,w_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]}$	$Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$	
	$t^{[i]}$	$1-t^{[i]}$	
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	
$\boldsymbol{Z}^{[i]}$	$Z_1^{[i]},\cdots,Z_{m(1)}^{[i]}$		$Z_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,Z_k^{[i]}$
	$s^{[i]}$		$1-s^{[i]}$
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$		$w_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,w_k^{[i]}$

Remark. 例 2.1, 例 2.2 にて、Kullback Information の直和分解が成り立たないのは、「カテゴリーの合併。その後同じ割合での配分」が原因と思える。 例 2.1 の場合、確率変数 $X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]},X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$ のカテゴリー $\{m(1)+1,\cdots,m(2),m(2)+1,\cdots,k\}$ が一旦合併してから 確率変数 $Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$ により $\{m(1)+1,\cdots,m(2)\}$ へ $X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$ の生起確率と同じ割合で分岐している。例 2.2 では、確率変数 $X_1^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]},X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$ のカテゴリー $\{m(1)+1,\cdots,m(1),m(1)+1,\cdots,m(2)\}$ が一旦合併してから 確率変数 $Z_1^{[i]},\cdots,Z_{m(1)}^{[i]}$ により $\{1,\cdots,m(1)\}$ へ $X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$ の生起確率と同じ割合で分岐している。このことが直和分解不成立の原因と思われるが、詳細解明までには至っていない。

Proposition 2.4 $\boldsymbol{X}^{[i]}$, $\boldsymbol{Y}^{[i]}$, $\boldsymbol{Z}^{[i]}$, $(i=1,2)$ は互いに独立な多項分布で、その確率構造が 表 2.6 で与えられている。このとき、Kullback Information の直和分解が成り立つ。

表 2.6

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$	$X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$	$X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
	$s_1^{[i]}t^{[i]}$	$s_1^{[i]}(1-t^{[i]})$	$1-s_1^{[i]}$
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	$w_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,w_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]}$	$Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$	
	$t^{[i]}$	$1-t^{[i]}$	
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	
$\boldsymbol{Z}^{[i]}$	$Z_1^{[i]},\cdots,Z_{m(1)}^{[i]}$	$Z_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Z_{m(2)}^{[i]}$	$Z_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,Z_k^{[i]}$
	$s_2^{[i]}t^{[i]}$	$s_2^{[i]}(1-t^{[i]})$	$1-s_2^{[i]}$
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	$w_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,w_k^{[i]}$

Remark: Proposition 2.4 は、Proposition 2.3 の拡張と考えることができる。つまり、$\boldsymbol{Y}^{[i]}$ は $\boldsymbol{X}^{[i]}$ のパラメータと比例関係にあると同時に、$\boldsymbol{Z}^{[i]}$ のパラメータとも比例関係にある。このような状況下においても、Kullback Information の直和分解が成り立つ。

例 2.3 独立な多項分布 $\boldsymbol{X}^{[i]}, \boldsymbol{Y}^{[i]}, \boldsymbol{Z}^{[i]}, \boldsymbol{W}^{[i]}$ $(i=1,2)$ が表 2.7 の確率構造で書き表せるとき、Kullback 情報量の直和分解は不成立。

表 2.7

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$	$X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$	$X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
	$s^{[i]}t_1^{[i]}$	$s^{[i]}(1-t_1^{[i]})$	$1-s^{[i]}$
	$\mu_1^{[i]},\cdots,\mu_{m(1)}^{[i]}$	$\xi_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,\xi_{m(2)}^{[i]}$	$\eta_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,\eta_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]}$	$Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$	
	$t_1^{[i]}$	$1-t_1^{[i]}$	
	$\mu_1^{[i]},\cdots,\mu_{m(1)}^{[i]}$	$\xi_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,\xi_{m(2)}^{[i]}$	
$\boldsymbol{Z}^{[i]}$	$Z_1^{[i]},\cdots,Z_{m(1)}^{[i]}$	$Z_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Z_{m(2)}^{[i]}$	$Z_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,Z_k^{[i]}$
	$s^{[i]}t_2^{[i]}$	$s^{[i]}(1-t_2^{[i]})$	$1-s^{[i]}$
	$\mu_1^{[i]},\cdots,\mu_{m(1)}^{[i]}$	$\xi_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,\xi_{m(2)}^{[i]}$	$\eta_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,\eta_k^{[i]}$
$\boldsymbol{W}^{[i]}$	$W_1^{[i]},\cdots,W_{m(1)}^{[i]}$	$W_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,W_{m(2)}^{[i]}$	
	$t_2^{[i]}$	$1-t_2^{[i]}$	
	$\mu_1^{[i]},\cdots,\mu_{m(1)}^{[i]}$	$\xi_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,\xi_{m(2)}^{[i]}$	

なお、例 2.3 におけるパラメータ $0 \le \mu_j^{[i]} \le 1,\quad 0 \le \xi_j^{[i]} \le 1,\quad 0 \le \eta_j^{[i]} \le 1$ は、$\sum_{j=1}^{m(1)} \mu_j^{[i]} = 1,\ \sum_{j=m(1)+1}^{m(2)} \xi_j^{[i]} = 1,\ \sum_{j=m(2)+1}^{k} \eta_j^{[i]} = 1$ を満たすものである。

例 2.4 独立な多項分布 $\boldsymbol{X}^{[i]}, \boldsymbol{Y}^{[i]}, \boldsymbol{Z}^{[i]}(i=1,2)$ が下記のような確率構造で書き表せると

き、Kullback 情報量の直和分解は不成立。

表 2.8

	$X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$	$X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$	$X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$s^{[i]}t_1^{[i]}$	$s^{[i]}(1-t_1^{[i]})$	$1-s$
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	$w_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,w_k^{[i]}$
	$Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]}$	$Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$	
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$t_1^{[i]}$	$1-t_1^{[i]}$	
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	
	$Z_1^{[i]},\cdots,Z_{m(1)}^{[i]}$	$Z_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Z_{m(2)}^{[i]}$	$Z_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,Z_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Z}^{[i]}$	$s^{[i]}t_2^{[i]}$	$s^{[i]}(1-t_2^{[i]})$	$1-s^{[i]}$
	$u_1^{[i]},\cdots,u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,v_{m(2)}^{[i]}$	$w_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,w_k^{[i]}$

Remark: 例 2.4 は「Proposition 2.4 におけるパラメータ $s_1^{[i]}$, $s_2^{[i]}$ を $s_1^{[i]}=s_2^{[i]}=s^{[i]}$ とし、パラメータ $t^{[i]}$ を別のものにした」確率モデルである。Proposition 2.4 では直和分解が成り立つのに例 2.4 では Kullback 情報量の直和分解が成り立たない。この原因が何であるか。著者には全くわからず、困っている。

例 2.5 独立な多項分布 $\boldsymbol{X}^{[i]}$, $\boldsymbol{Y}^{[i]}$ $(i=1,2)$ が

表 2.9

	$X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$	$X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$	$X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(3)}^{[i]}$	$X_{m(3)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$s^{[i]}t^{[i]}r^{[i]}$	$s_1^{[i]}t^{[i]}(1-r^{[i]})$	$s^{[i]}(1-t^{[i]})$	$1-s^{[i]}$
	$\mu_1^{[i]},\cdots,\mu_{m(1)}^{[i]}$	$\xi_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,\xi_{m(2)}^{[i]}$	$\zeta_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,\zeta_{m(3)}^{[i]}$	$\eta_{m(3)+1}^{[i]},\cdots,\eta_k^{[i]}$
	$Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]}$	$Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$		$Y_{m(3)+1}^{[i]},\cdots,Y_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$s^{[i]}r^{[i]}$	$s^{[i]}(1-r^{[i]})$		$1-s^{[i]}$
	$\mu_1^{[i]},\cdots,\mu_{m(1)}^{[i]}$	$\xi_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,\xi_{m(2)}^{[i]}$		$\eta_{m(3)+1}^{[i]},\cdots,\eta_k^{[i]}$

なる確率構造で書き表せるとき、Kullback 情報量の直和分解不成立。パラメータ s を $\boldsymbol{X}^{[i]}$ と $\boldsymbol{X}^{[i]}$ では別々のものにすると、すなわち、確率構造が 表 2.10 で与えられるとき、Kullback 情報量の直和分解は成立。

表 2.10

	$X_1^{[i]},\cdots,X_{m(1)}^{[i]}$	$X_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(2)}^{[i]}$	$X_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,X_{m(3)}^{[i]}$	$X_{m(3)+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$s_1^{[i]}t^{[i]}r^{[i]}$	$s_1^{[i]}t^{[i]}(1-r^{[i]})$	$s_1^{[i]}(1-t^{[i]})$	$1-s_1^{[i]}$
	$\mu_1^{[i]},\cdots,\mu_{m(1)}^{[i]}$	$\xi_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,\xi_{m(2)}^{[i]}$	$\zeta_{m(2)+1}^{[i]},\cdots,\zeta_{m(3)}^{[i]}$	$\eta_{m(3)+1}^{[i]},\cdots,\eta_k^{[i]}$
	$Y_1^{[i]},\cdots,Y_{m(1)}^{[i]}$	$Y_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,Y_{m(2)}^{[i]}$		$Y_{m(3)+1}^{[i]},\cdots,Y_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$s_2^{[i]}r^{[i]}$	$s_2^{[i]}(1-r^{[i]})$		$1-s_2^{[i]}$
	$\mu_1^{[i]},\cdots,\mu_{m(1)}^{[i]}$	$\xi_{m(1)+1}^{[i]},\cdots,\xi_{m(2)}^{[i]}$		$\eta_{m(3)+1}^{[i]},\cdots,\eta_k^{[i]}$

3. 負の多項分布 (NM) の場合

例 3.1 $\boldsymbol{X}^{[1]}$, $\boldsymbol{X}^{[2]}$, $\boldsymbol{Y}^{[1]}$, $\boldsymbol{Y}^{[2]}$ は互いに独立で、各 $i=1,2$ に対し

$$\mathbf{X}^{[i]}=(X_1^{[i]},\cdots,X_m^{[i]},\cdots,X_k^{[i]})\sim \mathrm{NM}(r_x^{[i]},\,\theta_1^{[i]},\cdots,\theta_m^{[i]},\cdots,\theta_k^{[i]}),$$

$$\mathbf{Y}^{[i]}=(Y_1^{[i]},\cdots,Y_m^{[i]})\sim \mathrm{NM}(r_y^{[i]},\,\sum_{j=l}^{k}\theta_l^{[i]}\frac{\theta_1^{[i]}}{\sum_{l=1}^{m}\theta_l^{[i]}},\cdots,\sum_{j=l}^{k}\theta_l^{[i]}\frac{\theta_m^{[i]}}{\sum_{j=l}^{m}\theta_l^{[i]}})$$

なる確率モデルでは、Kullback 情報量の直和分解不成立。なお、上記の確率モデルにて、パラメータ $\theta_j^{[i]}$ の制約条件は $\sum_{j=1}^{m}\theta_j^{[i]}\le 1$ であって、$\sum_{j=1}^{m}\theta_j^{[i]}=1$ ではない。

他方、次の場合には、Kullback 情報量の直和分解が成立する。

Proposition 3.1 上記 例 3.1 の 確率変数 $\boldsymbol{Y}^{[i]}$ に関する仮定を

$$\mathbf{Y}^{[i]}=(Y_1^{[i]},\cdots,Y_m^{[i]})\sim \mathrm{Multinomial}(N_y^{[i]},\,\frac{\theta_1^{[i]}}{\sum_{j=1}^{m}\theta_j^{[i]}},\cdots,\frac{\theta_m^{[i]}}{\sum_{j=1}^{m}\theta_j^{[i]}})$$

に変更すると、Kullback 情報量の直和分解が成立する

Proposition 3.1 は、「ベースとなるのが 負の多項分布。これに Pooling incomplete sample として付随するのが多項分布。このような確率モデルにおける 2 標本問題」と言える。しかし、このような確率モデルの状況設定は、自然なものとは言い難い。

さて、

$$s^{[i]}=\sum_{l=1}^{k}\theta_l^{[i]},\ t^{[i]}=\frac{\sum_{l=1}^{m}\theta_l^{[i]}}{\sum_{l=1}^{k}\theta_l^{[i]}},\ u_j^{[i]}=\frac{\theta_j^{[i]}}{\sum_{l=1}^{m}\theta_l^{[i]}}\ (j\le m),\ v_j^{[i]}=\frac{\theta_j^{[i]}}{\sum_{l=m+1}^{k}\theta_l^{[i]}}\ (j>m)$$

とパラメータ変換することで、例 3.1, Proposition 3.1 の確率構造は、それぞれ 表 3.1 および 表 3.2 で書き表せる。

表 3.1

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$r_x^{[i]}$	$X_1^{[i]},\cdots,X_m^{[i]}$	$X_{m+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
	$1-s^{[i]}$	$s^{[i]}t^{[i]}$	$s^{[i]}(1-t^{[i]})$
		$u_1^{[i]},\cdots,u_m^{[i]}$	$v_{m+1}^{[i]},\cdots,v_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$r_y^{[i]}$	$Y_1^{[i]},\cdots,Y_m^{[i]}$	
	$1-s^{[i]}$	$s^{[i]}$	
		$u_1^{[i]},\cdots,u_m^{[i]}$	

表 3.2

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$r_x^{[i]}$	$X_1^{[i]},\cdots,X_m^{[i]}$	$X_{m+1}^{[i]},\cdots,X_k^{[i]}$
	$1-s^{[i]}$	$s^{[i]}t^{[i]}$	$s^{[i]}(1-t^{[i]})$
		$u_1^{[i]},\cdots,u_m^{[i]}$	$v_{m+1}^{[i]},\cdots,v_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$		$Y_1^{[i]},\cdots,Y_m^{[i]}$	
		$u_1^{[i]},\cdots,u_m^{[i]}$	

例 3.1 の確率構造において、パラメータ $s^{[i]}$ を $\boldsymbol{X}^{[i]}, \boldsymbol{Y}^{[i]}$ で別々のものにすると、Kullback 情報量の直和分解が成立する。

Proposition 3.2 負の多項分布 $\mathbf{X}^{[1]}, \mathbf{X}^{[2]}, \mathbf{Y}^{[1]}, \mathbf{Y}^{[2]}$ は互いに独立で、その確率構造が 表 3.3 で与えられるならば、 Kullback 情報量の直和分解が成立する。

表 3.3

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$r_x^{[i]}$	$X_1^{[i]}, \cdots, X_m^{[i]}$	$X_{m+1}^{[i]}, \cdots, X_k^{[i]}$
	$1-s_1^{[i]}$	$s_1^{[i]}t^{[i]}$	$s_1^{[i]}(1-t^{[i]})$
		$u_1^{[i]}, \cdots, u_m^{[i]}$	$v_{m+1}^{[i]}, \cdots, v_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$r_y^{[i]}$	$Y_1^{[i]}, \cdots, Y_m^{[i]}$	
	$1-s_2^{[i]}$	$s_2^{[i]}$	
		$u_1^{[i]}, \cdots, u_m^{[i]}$	

Remark 例 3.1 すなわち、$\boldsymbol{X}^{[i]}, \boldsymbol{Y}^{[i]}$ が負の多項分布で、確率構造が 表 3.1 の時は、直和分解不成立。このことは、$\boldsymbol{X}^{[i]}, \boldsymbol{Y}^{[i]}$ が多項分布で 確率構造が 表 3.4 で与えられている時に直和分解不成立だったことからも類推できる

表 3.4

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$X_1^{[i]}, \cdots, X_{m(1)}^{[i]}$	$X_{m(1)+1}^{[i]}, \cdots, X_{m(2)}^{[i]}$	$X_{m(2)+1}^{[i]}, \cdots, X_k^{[i]}$
	$1-s^{[i]}$	$s^{[i]}t^{[i]}$	$s^{[i]}(1-t^{[i]})$
	$u_1^{[i]}, \cdots, u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]}, \cdots, v_{m(2)}^{[i]}$	$w_{m(2)+1}^{[i]}, \cdots, w_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$Y_1^{[i]}, \cdots, Y_{m(1)}^{[i]}$	$Y_{m(1)+1}^{[i]}, \cdots, Y_{m(2)}^{[i]}$	
	$1-s^{[i]}$	$s^{[i]}$	
	$u_1^{[i]}, \cdots, u_{m(1)}^{[i]}$	$v_{m(1)+1}^{[i]}, \cdots, v_{m(2)}^{[i]}$	

Remark 2 $\boldsymbol{X}^{[i]}, \boldsymbol{Y}^{[i]}$ が負の多項分布で、確率構造が 表 3.5 の時は、直和分解が成立

表 3.5

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$r_x^{[i]}$	$X_1^{[i]}, \cdots, X_m^{[i]}$	$X_{m+1}^{[i]}, \cdots, X_k^{[i]}$
	$1-s_1^{[i]}$	$s_1^{[i]}t^{[i]}$	$s_1^{[i]}(1-t^{[i]})$
		$u_1^{[i]}, \cdots, u_m^{[i]}$	$v_{m+1}^{[i]}, \cdots, v_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$r_y^{[i]}$	$Y_1^{[i]}, \cdots, Y_m^{[i]}$	
	$1-s_2^{[i]}$	$s_2^{[i]}$	
		$u_1^{[i]}, \cdots, u_m^{[i]}$	

これは、$\boldsymbol{X}^{[i]}, \boldsymbol{Y}^{[i]}$:多項分布で 、確率構造が 表 3.6 の時は、直和分解が成立することから、負の多項分布の場合でも直和分解成立が類推できる

表 3.6

<table>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{X}^{[i]}$</td><td>$X_1^{[i]}, \cdots, X_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$X_{m(1)+1}^{[i]}, \cdots, X_{m(2)}^{[i]}$</td><td>$X_{m(2)+1}^{[i]}, \cdots, X_k^{[i]}$</td></tr>
<tr><td>$1 - s_1^{[i]}$</td><td>$s_1^{[i]} t^{[i]}$</td><td>$s_1^{[i]}(1 - t^{[i]})$</td></tr>
<tr><td>$u_1^{[i]}, \cdots, u_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$v_{m(1)+1}^{[i]}, \cdots, v_{m(2)}^{[i]}$</td><td>$w_{m(2)+1}^{[i]}, \cdots, w_k^{[i]}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{Y}^{[i]}$</td><td>$Y_1^{[i]}, \cdots, Y_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$Y_{m(1)+1}^{[i]}, \cdots, Y_{m(2)}^{[i]}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$1 - s_2^{[i]}$</td><td>$s_2^{[i]}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$u_1^{[i]}, \cdots, u_{m(1)}^{[i]}$</td><td>$v_{m(1)+1}^{[i]}, \cdots, v_{m(2)}^{[i]}$</td><td></td></tr>
</table>

Remark 3 負の多項分布は、「負の 2 項分布 × 多項分布」と分解できるので、「多項分布の部分」で Pooling incomplete samples が行われていれば、直和分解が成立する、と言える。

4. Poisson 分布の場合

例 4.1 $m < k$ とする。$X_j^{[i]}$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, \cdots, k)$ および $Y_j^{[i]}$ $(i = 1, 2,$ $j = 1, 2, \cdots, m)$ はすべて独立で

$$X_j^{[i]} \sim Poisson(\lambda_j^{[i]}), \quad j = 1, \cdots, k,$$

$$Y_j^{[i]} \sim Poisson((\lambda_1^{[i]} + \cdots + \lambda_m^{[i]} + \cdots + \lambda_k^{[i]}) \frac{\lambda_j^{[i]}}{\lambda_1^{[i]} + \cdots + \lambda_m^{[i]}}), \ j = 1, \cdots, m.$$

$$H_1 : (\lambda_1^{[1]}, \cdots, \lambda_k^{[1]}) \neq (\lambda_1^{[2]}, \cdots, \lambda_k^{[2]}), \quad H_2 : (\lambda_1^{[1]}, \cdots, \lambda_k^{[1]}) = (\lambda_1^{[2]}, \cdots, \lambda_k^{[2]}).$$

この場合、Kullback 情報量の直和分解は成り立たない。

Proposition 4.1 $m \leq k$ とする。$X_j^{[i]}$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, \cdots, k)$ および $\boldsymbol{Y}^{[i]}$ $(i = 1, 2)$ は互いに独立で

$$X_j^{[i]} \sim Poisson(\lambda_j^{[i]}), \quad i = 1, \cdots, k,$$

$$\boldsymbol{Y}^{[i]} = \Big(Y_1^{[i]}, \cdots, Y_m^{[i]}\Big) \sim Multinomial(N_y^{[i]}, \frac{\lambda_1^{[i]}}{\sum_{a=1}^m \lambda_a^{[i]}}, \cdots, \frac{\lambda_1^{[i]}}{\sum_{a=1}^m \lambda_a^{[i]}}\Big).$$

$$H_1 : (\lambda_1^{[1]}, \cdots, \lambda_k^{[1]}) \neq (\lambda_1^{[2]}, \cdots, \lambda_k^{[2]}), \quad H_2 : (\lambda_1^{[1]}, \cdots, \lambda_k^{[1]}) = (\lambda_1^{[2]}, \cdots, \lambda_k^{[2]}).$$

このとき、Kullback 情報量の直和分解は成立する。**Remark** この現象に対する 1 つの解釈 Poisson 分布の積 = 1 次元 Poisson × 多項分布 と分解される。よって、Pooling incomplete samples が「多項分布」の部分なら Kullback 情報量の直和分解が成り立つ。

Proposition 4.2. $m \leq k$ とする。$X_j^{[i]}$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, \cdots, k)$ および $X_j^{[i]}$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, \cdots, m)$ は互いに独立。パラメータ $\lambda_x^{[i]}, \lambda_y^{[i]}, \theta_j^{[i]}$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, \cdots, k)$ は、

$0 \le \lambda_x^{[i]},\, 0 \le \lambda_y^{[i]},\, 0 \le \theta_j^{[i]} \le 1,\ \ \sum_{j=1}^{k} \theta_j^{[i]} = 1$ を満たすとする。このとき、

$$X_j^{[i]} \sim Poisson(\lambda_x^{[i]}\theta_j^{[i]}), \quad j = 1, \cdots, k,$$

$$Y_j^{[i]} \sim Poisson(\lambda_y^{[i]} \frac{\theta_j^{[i]}}{\sum_{l=1}^{m} \theta_l^{[i]}}), \quad j = 1, \cdots, m.$$

ならば、Kullback 情報量の直和分解が成立する。

Remark $t^{[i]} = \sum_{a=1}^{m} \theta_a^{[i]}$, $u_j = \theta_j / \sum_{a=1}^{m} \theta_a$, $(j \le m)$, $v_j = \theta_j / \sum_{a=m+1}^{k} \theta_a$, $(j > m)$ と変数変換することで 表 4.1, 更に $\lambda^{[i]} = \lambda_x^{[i]} + \lambda_y^{[i]}$, $s^{[i]} = \lambda_x^{[i]}/(\lambda_x^{[i]} + \lambda_y^{[i]})$ とすることで 表 4.2 のように確率構造を表記できる。

表 4.1

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$X_1^{[i]}, \cdots, X_m^{[i]}$	$X_{m+1}^{[i]}, \cdots, X_k^{[i]}$
	$\lambda_x^{[i]} t^{[i]}$	$\lambda_x^{[i]}(1 - t^{[i]})$
	$u_1^{[i]}, \cdots, u_m^{[i]}$	$v_{m+1}^{[i]}, \cdots, v_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$Y_1^{[i]}, \cdots, Y_m^{[i]}$	
	$\lambda_y^{[i]}$	
	$u_1^{[i]}, \cdots, u_m^{[i]}$	

表 4.2

$\boldsymbol{X}^{[i]}$	$X_1^{[i]}, \cdots, X_m^{[i]}$	$X_{m+1}^{[i]}, \cdots, X_k^{[i]}$
	$\lambda^{[i]} s^{[i]} t^{[i]}$	$\lambda^{[i]} s^{[i]} (1 - t^{[i]})$
	$u_1^{[i]}, \cdots, u_m^{[i]}$	$v_{m+1}^{[i]}, \cdots, v_k^{[i]}$
$\boldsymbol{Y}^{[i]}$	$Y_1^{[i]}, \cdots, Y_m^{[i]}$	
	$\lambda^{[i]}(1 - s^{[i]})$	
	$u_1^{[i]}, \cdots, u_m^{[i]}$	

今後の課題 本稿で扱った内容を、情報理論の立場、あるいは情報幾何の立場で説明できるように思える。今後の研究課題である。

References

[1] Asano, C. (1965). On estimating multinomial probabilities by pooling incomplete samples. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **17**, 1-13.

[2] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions.* Wiley.

[3] Kullback, S. (1959). *Information Theory and Statistics.* Wiley.

[4] Kullback, S. (1968). *Information Theory and Statistics,* Revised edition. Dover.

[5] 布能英一郎 (2015). 負の多項分布における Kullback 情報量の直和分解—— Pooling incomplete samples の場合を含めた考察—— 京都大学数理解析研究所講究録 No 1954, 90-103.

[6] 布能英一郎 (2016). 多変量離散型分布の 2 標本問題における Kullback 情報量の直和分解 京都大学数理解析研究所講究録 No 1999, 111-130.

[7] 稲垣宣生 (2003). 数理統計学 (改訂版), 裳華房.