数理解析研究所講究録
第2047巻 2017年 152-171

exponential-symmetry and power-symmetry

石原隆佑[1], 小池健一[2]
[1] 筑波大学大学院数理物質科学研究科
[2] 筑波大学数理物質系

Ryusuke Ishihara[1] and Ken-ichi Koike[2]
[1]Graduate School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba
[2]Faculty of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1 導入

一般に確率変数 X が対称であるとは, 中心となる θ が存在し, 確率変数 $X-\theta$ が $\theta-X$ と同一の分布に従っているというものである. 本稿ではこれを“通常の対称”と呼ぶ. 通常の対称性を持たない確率変数に対しても, 対称の概念を変えることにより別の対称性を定義できる場合が考えられる. まず本稿の冒頭で log-symmetry という対称性を導入する. log-symmetry とは, Seshadri(1965) により導入された対称の概念であり, ある確率変数が, その逆数である確率変数と同一の分布に従っているというものである. 次に, log-symmetry である確率変数の性質を紹介する. 特に, log-symmetry とは, 対数変換した確率変数についての通常の対称性と同値であることが示される.

次に, exponential-symmetry と power-symmetry という新たな対称性を導入する. log-symmetry では, 対数変換された確率変数に対する通常の対称性に着目していた点に対して, exponential-symmetry では, 指数変換された確率変数に対する通常の対称性に着目する. ここまでに対数変換, 指数変換した確率変数の対称性を考えているので, power-symmetry では冪乗変換した確率変数に対する対称性を考える.

本稿では, 上に記したように 2 つの方法で変換されたそれぞれの確率変数に対して, 通常の対称のように“位置 θ”について対称である場合と, log-symmetry のように“尺度 θ”について対称である場合に分ける. それぞれ location, scale を名称の先頭に付けて区別し, 計 4 つの対称性を導入する. ここで特に scale power-symmetry は, log-symmetry の拡張となっている. この 4 つの対称性について, まず定義を示し, 次にいくつかの性質を証明する. 最後にどのような分布がそれぞれの対称性を満たすのか, 例を記す.

2 log-symmetry

ここでは, 対称性の 1 つである log-symmetry の定義と性質を紹介する.
確率変数 X が $\theta \in \mathbb{R}$ について通常の対称であるとは

$$X - \theta \stackrel{\mathrm{d}}{=} \theta - X$$

となることをいう. ただし, $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ は分布が等しいことを表す. この通常の対称に類似なものとして, $X/\theta \stackrel{\mathrm{d}}{=} \theta/X$ となることを対称の 1 つとして考える. これは Seshadri(1965) により導入され, log-symmetry と呼ばれる.
本稿では, なめらかな確率密度関数をもつ連続型確率変数のみを扱い, X で表す. また, X の 確率密度関数を $f_X(\cdot)$, 分布関数を $F_X(\cdot)$, ハザード関数を $h(\cdot)$ と表す.

定義 2.1 (Seshadri(1965)) 正値のみをとる確率変数 X が log-symmetry であるとは

$$\frac{X}{\theta} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{\theta}{X}$$

となることをいう.

この log-symmetry と通常の対称性について, 次の定理が成立する.

定理 2.1 (Mudholkar and Wang(2007)) X が θ について log-symmetry であることは, $\log X$ が $\log\theta$ について通常の対称であることと同値である.

このように, 対数変換した確率変数の対称性であることから, log-symmetry と呼ばれる.
log-symmetry の性質をまとめると, 表 1 のようになる.
log-symmetry に倣い, 以降定義する対称性についても同様の性質を考える. 平均, 中央値, 最頻値については Groeneveld and Meeden(1977), Runnenburg(1978), van Zwet(1979) 等の mean-median-mode inequality が有名であるが, 本稿ではそれぞれ個別に評価する.

3 scale exponential-symmetry

log-symmetry の定義に倣い, 指数変換した確率変数に対して, 尺度についての対称性を考える.

定義 3.1 $\mathbb{R}$ 値確率変数 X が $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ について scale exponential-symmetry であるとは

$$\frac{e^X}{\theta} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{\theta}{e^X}$$

となることをいう.

表 1　log-symmetry の性質

	log-symmetry
確率密度関数	$f_X(\theta x) = (1/x^2) f_X(\theta/x)$
分布関数	$F_X(\theta x) = 1 - F_X(\theta/x)$
分位点関数	$Q(u) = \theta^2/Q(1-u)$
ハザード関数	$h(x)/\{1 - F_X(\theta/x)\} = h(\theta/x)/[x^2\{1 - F_X(\theta x)\}]$
中央値	θ
最頻値	$\leq \theta$
モーメント	$E[(X/\theta)^r] = E[(\theta/X)^r]$
平均	$\geq \theta$

$\theta > 0$ としても一般性を失わない. X の従う分布がどのようなときに scale exponential-symmetry となるか調べる. 定義より, 任意の $x > 0$ に対して

$$P\left(\frac{e^X}{\theta} \leq x\right) = P\left(\frac{\theta}{e^X} \leq x\right)$$

が成立すればよいので, 両辺をそれぞれ X についての確率として表し, 分布関数の関係式にすると

$$P\Big(X \leq \log(\theta x)\Big) = P\Big(X \geq \log\frac{\theta}{x}\Big),$$
$$F_X\Big(\log(\theta x)\Big) = 1 - F_X\Big(\log\frac{\theta}{x}\Big)$$

となる.
両辺を x で微分して, 確率密度関数の関係式にすると

$$f_X\Big(\log(\theta x)\Big) = f_X\left(\log\frac{\theta}{x}\right)$$

となる. 以上より, $F_X(x), f_X(x)$ が

$$F_X\Big(\log(\theta x)\Big) = 1 - F_X\Big(\log\frac{\theta}{x}\Big), \tag{3.1}$$
$$f_X\Big(\log(\theta x)\Big) = f_X\left(\log\frac{\theta}{x}\right) \tag{3.2}$$

を満たすことと X が scale exponential-symmetry であることは同値である.

ここで, scale exponential-symmetry と通常の対称性について, 次の定理が成立する.

定理 3.1 X が $\theta = e^{\eta} > 0$ について scale exponential-symmetry であることは, X が $\eta = \log\theta$ について通常の対称であることと同値である.

証明

X が $\theta = e^{\eta}$ について scale exponential-symmetry であるとする. (3.2) において, $\log x = t$ とすると, $\log\theta = \eta$ より

$$f_X(t+\eta) = f_X(-t+\eta).$$

これは, X が $\eta = \log\theta$ について通常の対称を意味する.

逆に, X が $\eta = \log\theta$ について通常の対称とすると, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $f_X(t+\eta) = f_X(-t+\eta)$ を満たす. このとき, $x > 0$ に対して

$$P\left(\frac{e^X}{\theta} \leq x\right) = P\big(X \leq \log(\theta x)\big) = \int_{-\infty}^{\log(\theta x)} f(t)dt$$

$s = t - \eta$ と置換すると

$$P\left(\frac{e^X}{\theta} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{\log x} f(s+\eta)ds$$

となる. また,

$$P\left(\frac{\theta}{e^X} \leq x\right) = P\left(X \geq \log\frac{\theta}{x}\right) = \int_{\log\frac{\theta}{x}}^{\infty} f(t)dt$$

$t = \eta - s$ と置換し, X が θ について通常の対称であることより

$$P\left(\frac{\theta}{e^X} \leq x\right) = \int_{-\infty}^{\log x} f(\eta+s)ds.$$

以上より,

$$P\left(\frac{e^X}{\theta} \leq x\right) = P\left(\frac{\theta}{e^X} \leq x\right)$$

よって, $\theta = e^{\eta}$ について scale exponential-symmetry となる. □

3.1 分位点関数

X が scale exponential-symmetry のとき, 分位点関数について調べる. $F_X(x)$ を狭義単調増加とする. このとき, (3.1) は, 分位点関数 $Q(x)$ を用いて

$$\log(\theta x) = Q\Big(1 - F\Big(\log\frac{\theta}{x}\Big)\Big)$$

と表せる. ここで, $u = F_X\bigl(\log(\theta/x)\bigr)$ と置換すると, $x = \theta/\exp\bigl(Q(u)\bigr)$ より

$$\log\left(\frac{\theta^2}{\exp\bigl(Q(u)\bigr)}\right) = Q(1-u)$$

となる. 左辺を整理すれば, $0 < u < 1$ に対して

$$2\log\theta - Q(u) = Q(1-u) \tag{3.3}$$

となる.

3.2 ハザード関数

X が scale exponential-symmetry のとき, ハザード関数について調べる. (3.2) において, 両辺を $\Bigl\{1 - F_X\Bigl(\log(\theta x)\Bigr)\Bigr\}\Bigl\{1 - F_X\Bigl(\log(\theta/x)\Bigr)\Bigr\}$ で割ると

$$\frac{1}{1 - F_X\Bigl(\log\dfrac{\theta}{x}\Bigr)}\frac{f_X\Bigl(\log(\theta x)\Bigr)}{1 - F_X\Bigl(\log(\theta x)\Bigr)} = \frac{1}{1 - F_X\Bigl(\log(\theta x)\Bigr)}\frac{f_X\Bigl(\log\dfrac{\theta}{x}\Bigr)}{1 - F_X\Bigl(\log\dfrac{\theta}{x}\Bigr)}$$

となり, 両辺にハザード関数の形が現れるので, それぞれ $h(x)$ で置き換えると

$$\frac{1}{1 - F_X\Bigl(\log\dfrac{\theta}{x}\Bigr)}h\Bigl(\log(\theta x)\Bigr) = \frac{1}{1 - F_X\Bigl(\log(\theta x)\Bigr)}h\Bigl(\log\frac{\theta}{x}\Bigr)$$

となる.

3.3 中央値

X が scale exponential-symmetry のとき, 中央値について調べる. $F_X(x)$ を狭義単調増加とする. (3.3) で $u = 1/2$ とすると

$$2\log\theta - Q\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr) = Q\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr),$$
$$Q\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr) = \log\theta.$$

よって中央値は $\log\theta$ である.

3.4 最頻値

X が scale exponential-symmetry のとき, 最頻値について調べる. $f_X(x)$ を単峰型で微分可能とする. (3.2) の両辺を x で微分して整理すると

$$f'_X\Bigl(\log(\theta x)\Bigr) = -f'_X\Bigl(\log\frac{\theta}{x}\Bigr)$$

が成立する.ここで, $x=1$ とすると

$$f_X'\Big(\log\theta\Big) = -f_X'\Big(\log\theta\Big),$$
$$f_X'\Big(\log\theta\Big) = 0$$

となり, $x=\log\theta$ での微分係数が 0 であることがわかる. よって最頻値は $\log\theta$ である.

3.5 モーメント

X が scale exponential-symmetry のとき, X の r 次モーメントについて調べる. (3.2) を, 変数を x として書き直すと

$$f_X(x) = f_X\big(2\log\theta - x\big)$$

となる. これを用いると, X の r 次モーメントは

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(2\log\theta - x)dx$$

となる. $y = 2\log\theta - x$ と置換すると

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} \big(2\log\theta - y\big)^r f_X(y)dy = E\Big[\big(2\log\theta - X\big)^r\Big] \tag{3.4}$$

となる.

3.6 平均

X が scale exponential-symmetry のとき, 平均について調べる. (3.4) で $r=1$ とすると

$$E[X] = E[2\log\theta - X]$$

が成立する. これを $E[X]$ について解けば

$$E[X] = \log\theta.$$

よって平均は $\log\theta$ である.

3.7 scale exponential-symmetry となる確率変数の例

scale exponential-symmetry となる確率変数の例は, 正規分布に従う確率変数などが挙げられる. 実際, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ とすると, $\log(\theta x)$, $\log(\theta/x)$ での確率密度関数の値はそれぞれ, $x>0$ に対

して

$$f_X\Big(\log(\theta x)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\Big\{\log(\theta x) - \mu\Big\}^2}{2\sigma^2}\right],$$

$$f_X\Big(\log\frac{\theta}{x}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\Big(\log\frac{\theta}{x} - \mu\Big)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

である．この 2 式が等しいことは

$$\Big\{\log(\theta x) - \mu\Big\}^2 = \Big(\log\frac{\theta}{x} - \mu\Big)^2$$

が成立することと同値であり，これを θ について解くと

$$\theta = e^{\mu}$$

となる．よって $\theta = e^{\mu}$ とおけば，任意の $x > 0$ に対して $f_X\Big(\log(\theta x)\Big) = f_X\Big(\log(\theta/x)\Big)$ が成立するので，X は scale exponential-symmetry となる．このとき，$F_X(x)$ は狭義単調増加，$f_X(x)$ は単峰型で微分可能なので，X は上記の性質を全て満たす．

scale exponential-symmetry とならない確率変数の例は，Gumbel 分布に従う確率変数などが挙げられる．実際，X を Gumbel 分布に従う確率変数とすると

$$f_X(x) = \frac{1}{\eta}\exp\Big(-\frac{x-\mu}{\eta}\Big)\exp\left\{-\exp\Big(-\frac{x-\mu}{\eta}\Big)\right\} \quad (-\infty < x < \infty, \quad \mu \in \mathbb{R},\ \eta > 0)$$

である．$\log(\theta x)$, $\log(\theta/x)$ での確率密度関数の値はそれぞれ，$x > 0$ に対して

$$f_X\Big(\log(\theta x)\Big) = \frac{1}{\eta}\exp\left\{-\frac{\log(\theta x) - \mu}{\eta}\right\}\exp\left[-\exp\left\{-\frac{\log(\theta x) - \mu}{\eta}\right\}\right],$$

$$f_X\Big(\log\frac{\theta}{x}\Big) = \frac{1}{\eta}\exp\left(-\frac{\log\frac{\theta}{x} - \mu}{\eta}\right)\exp\left\{-\exp\left(-\frac{\log\frac{\theta}{x} - \mu}{\eta}\right)\right\}$$

であるが，この 2 式が等しくなるような $\theta > 0$ は存在しない．よって X は scale exponential-symmetry ではない．

4 location exponential-symmetry

X を指数変換した確率変数 e^X に対して，location についての対称性を考える．

定義 4.1 $\mathbb{R}$ 値確率変数 X が $\theta \in \mathbb{R}$ について location exponential-symmetry であるとは

$$e^X - \theta \overset{\mathrm{d}}{=} \theta - e^X$$

となることをいう.

X の従う分布がどのようなときに location exponential-symmetry となるか調べる. scale exponential-symmetry のときと同様にすれば, $F_X(x)$, $f_X(x)$ が, 任意の $x < |\theta|$ に対して

$$F_X\Big(\log(x+\theta)\Big) = 1 - F_X\Big(\log(\theta - x)\Big), \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{x+\theta} f_X\Big(\log(x+\theta)\Big) = \frac{1}{\theta - x} f_X\Big(\log(\theta - x)\Big) \tag{4.2}$$

を満たすことと X が location exponential-symmetry であることは同値であることが示される.

location exponential-symmetry の分位点関数, ハザード関数, 中央値については scale exponential-symmetry のときと同様にすれば求められる.

4.1 最頻値

$f_X(x)$ を単峰型で微分可能とする. (4.2) の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(x+\theta)^2} f\Big(\log(x+\theta)\Big) + \frac{1}{(x+\theta)^2} f'\Big(\log(x+\theta)\Big) \\ & = \frac{1}{(\theta - x)^2} f\Big(\log(\theta - x)\Big) - \frac{1}{(\theta - x)^2} f'\Big(\log(\theta - x)\Big) \end{aligned}$$

となる. ここで, $x = 0$ として整理すると

$$f'_X\Big(\log\theta\Big) = f_X\Big(\log\theta\Big)$$

となる. $f_X(x)$ は確率密度関数なので, $f_X\Big(\log\theta\Big) \geq 0$ より

$$f'_X\Big(\log\theta\Big) \geq 0$$

となる. よって $f_X(x)$ の最頻値を x_0 とすると, 少なくとも

$$x_0 \geq \log\theta$$

となる.

4.2 平均

X が location exponential-symmetry のとき, 平均について調べる. 定義 $e^X - \theta \stackrel{\mathrm{d}}{=} \theta - e^X$ は, e^X の分布が θ を中心に通常の対称であることと同値なので, $E[e^X] = \theta$ が成立する. $Y = e^X$ とすると, $\log Y = X$ より

$$E[X] = -E[-\log Y].$$

ここで, $-\log y$ は, $y>0$ で凸関数である. よって $E[-\log Y]$ について, Jensen の不等式より

$$E[-\log Y] \geq -\log E[Y]$$

が成立する. これより, $-E[-\log Y]$ について

$$-E[-\log Y] \leq \log E[Y]$$

が成立するので, 平均 $E[X]$ について, 少なくとも

$$E[X] \leq \log E[Y] = \log\theta$$

となる.

4.3 location exponential-symmetry となる確率変数の例

location exponential-symmetry となる確率変数の例は, パラメータの値が等しいベータ分布に従う Y を, $Y=e^X$ で変換した確率変数 X などが挙げられる. 実際, Y の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \frac{1}{B(\alpha,\alpha)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\alpha-1} \qquad (0<y<1, \alpha>0)$$

であり, $Y=e^X$ と変換すると

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(Y \leq e^x) = F_Y(e^x), \\ f_X(x) &= e^x f_Y(e^x) \end{aligned}$$

となるので, X の確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{e^x}{B(\alpha,\alpha)} e^{x(\alpha-1)}(1-e^x)^{\alpha-1} = \frac{1}{B(\alpha,\alpha)} e^{\alpha x}(1-e^x)^{\alpha-1}$$

である. よって, $\left\{1/(x+\theta)\right\} f_X\left(\log(x+\theta)\right)$, $\left\{1/(\theta-x)\right\} f_X\left(\log(\theta-x)\right)$ の値はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+\theta} f_X\left(\log(x+\theta)\right) &= \frac{1}{x+\theta}\frac{1}{B(\alpha,\alpha)}(x+\theta)^{\alpha}\left\{1-(x+\theta)\right\}^{\alpha-1} \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\alpha)}(x+\theta)^{\alpha-1}\left\{1-(x+\theta)\right\}^{\alpha-1}, \\ \frac{1}{\theta-x} f_X\left(\log(\theta-x)\right) &= \frac{1}{\theta-x}\frac{1}{B(\alpha,\alpha)}(\theta-x)^{\alpha}\left\{1-(\theta-x)\right\}^{\alpha-1} \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\alpha)}(\theta-x)^{\alpha-1}\left\{1-(\theta-x)\right\}^{\alpha-1} \end{aligned}$$

である. この 2 式が等しいことは

$$(x+\theta)^{\alpha-1}\left\{1-(x+\theta)\right\}^{\alpha-1} = (\theta-x)^{\alpha-1}\left\{1-(\theta-x)\right\}^{\alpha-1}$$

が成立することと同値である. これを θ について解くと,

$$\theta = \frac{1}{2}$$

となる．よって $\theta = 1/2$ とおくと，任意の $x < |\theta|$ に対して，$\Big\{1/(x+\theta)\Big\} f_X\Big(\log(x+\theta)\Big) = \Big\{1/(\theta-x)\Big\} f_X\Big(\log(\theta-x)\Big)$ が成立するので，X は location exponential-symmetry である．このとき，$f_X(x)$ が単峰型であれば，X は上記の性質を全て満たす．

location exponential-symmetry とならない確率変数の例は，正規分布に従う確率変数などが挙げられる．実際，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+\theta} f_X\Big(\log(x+\theta)\Big) &= \frac{1}{(x+\theta)\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\big\{\log(x+\theta)-\mu\big\}^2}{2\sigma^2}\right], \\
\frac{1}{\theta-x} f_X\Big(\log(\theta-x)\Big) &= \frac{1}{(\theta-x)\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\big\{\log(\theta-x)-\mu\big\}^2}{2\sigma^2}\right]
\end{aligned}
$$

であるが，この 2 式が等しくなるような θ は存在しない．よって X は location exponential-symmetry ではない．

exponential-symmetry の性質

exponential-symmetry の性質をまとめると，表 2 のようになる．

表 2　exponential-symmetry の性質の比較

	scale exponential-symmetry	location exponential-symmetry
確率密度関数	$f_X\big(\log(\theta x)\big) = f_X\Big(\log\big(\frac{\theta}{x}\big)\Big)$	$\frac{1}{x+\theta} f_X\big(\log(x+\theta)\big) = \frac{1}{\theta - x} f_X\big(\log(\theta - x)\big)$
分布関数	$F_X\big(\log(\theta x)\big) = 1 - F_X\Big(\log\big(\frac{\theta}{x}\big)\Big)$	$F_X\big(\log(x+\theta)\big) = 1 - F_X\big(\log(\theta - x)\big)$
分位点関数	$2\log\theta - Q(u) = Q(1-u)$	$2\theta - \exp\big(Q(u)\big) = \exp\big(Q(1-u)\big)$
ハザード関数	$\frac{h\big(\log(\theta x)\big)}{1 - F_X\big(\log(\theta/x)\big)} = \frac{h\big(\theta/x\big)}{x^2\big\{1 - F_X(\theta x)\big\}}$	$\frac{h\big(\log(x+\theta)\big)}{(x+\theta)\big\{1 - F_X\big(\log(\theta - x)\big)\big\}} = \frac{h\big(\log(\theta - x)\big)}{(\theta - x)\big\{1 - F_X\big(\log(x - \theta)\big)\big\}}$
中央値	$\log\theta$	$\log\theta$
最頻値	$\log\theta$	$\geq \log\theta$
モーメント	$E\big[X^r\big] = E\big[(2\log\theta - X)^r\big]$	Not explicitly available
平均	$\log\theta$	$\leq \log\theta$

5 scale power-symmetry

log-symmetry の拡張として, 正値確率変数の冪乗に対しての対称性を考える.

定義 5.1 正値確率変数 X が $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ について scale power-symmetry であるとは, ある $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して

$$\frac{X^a}{\theta} \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{\theta}{X^a}$$

となることをいう.

$\theta > 0$ としても一般性を失わない. X の従う分布がどのようなときに, scale power-symmetry となるか調べる. 定義より, 任意の $x > 0$ に対して

$$P\Big(\frac{X^a}{\theta} \leq x\Big) = P\Big(\frac{\theta}{X^a} \leq x\Big)$$

が成立すればよいので, 両辺をそれぞれ X^a についての確率として表すと

$$P\Big(X^a \leq \theta x\Big) = P\Big(X^a \geq \frac{\theta}{x}\Big)$$

となる. ここで, a の正負により不等号の向きが変化するので, a について場合分けする.
(i) $a > 0$ のとき

$$P\bigg(X \leq \Big(\theta x\Big)^{1/a}\bigg) = P\bigg(X \geq \Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{1/a}\bigg),$$
$$F_X\bigg(\Big(\theta x\Big)^{1/a}\bigg) = 1 - F_X\bigg(\Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{1/a}\bigg).$$

分布関数がこれを満たせばよい. さらに, 両辺を x で微分して

$$\frac{1}{a}\Big(\theta x\Big)^{(1/a)-1}\theta f_X\bigg(\Big(\theta x\Big)^{1/a}\bigg) = -\frac{1}{a}\Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{(1/a)-1}\Big(-\frac{\theta}{x^2}\Big)f_X\bigg(\Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{1/a}\bigg),$$
$$x^{(1/a)}f_X\bigg(\Big(\theta x\Big)^{1/a}\bigg) = x^{-(1/a)}f_X\bigg(\Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{1/a}\bigg).$$

確率密度関数がこれをみたせばよい.
(ii) $a < 0$ のとき

$$P\bigg(X \geq \Big(\theta x\Big)^{1/a}\bigg) = P\bigg(X \leq \Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{1/a}\bigg),$$
$$1 - F_X\bigg(\Big(\theta x\Big)^{1/a}\bigg) = F_X\bigg(\Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{1/a}\bigg).$$

分布関数がこれをみたせばよい. さらに, 両辺を x で微分して

$$-\frac{1}{a}\Big(\theta x\Big)^{(1/a)-1}\theta f_X\bigg(\Big(\theta x\Big)^{1/a}\bigg) = \frac{1}{a}\Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{(1/a)-1}\Big(-\frac{\theta}{x^2}\Big)f_X\bigg(\Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{1/a}\bigg),$$
$$x^{1/a}f_X\bigg(\Big(\theta x\Big)^{1/a}\bigg) = x^{-1/a}f_X\bigg(\Big(\frac{\theta}{x}\Big)^{1/a}\bigg).$$

確率密度関数がこれを満たせばよい.
(i), (ii) より, ある $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $F_X(x), f_X(x)$ が

$$F_X\left(\left(\theta x\right)^{1/a}\right) = 1 - F_X\left(\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/a}\right), \tag{5.1}$$

$$x^{1/a} f_X\left(\left(\theta x\right)^{1/a}\right) = x^{-1/a} f_X\left(\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/a}\right) \tag{5.2}$$

を満たすことと X が scale power-symmetry であることは同値である.

注意 5.1　これは $a = 1$ のとき, log-symmetry の定義と一致する.

scale power-symmetry の性質については, これまでと同様にすれば求めることができる.

5.1 scale power-symmetry となる確率変数の例

scale power-symmetry となる確率変数の例は, log-symmetry である Y を $Y = X^a$ で変換した X が挙げられる.
実際, 任意の $x > 0$ に対して, $F_X(x), f_X(x)$ は
(i) $a > 0$ のとき

$$F_X(x) = P\left(X \leq x\right) = P\left(Y^{1/a} \leq x\right) = P\left(Y \leq x^a\right) = F_Y\left(x^a\right),$$
$$f_X(x) = a x^{a-1} f_Y\left(x^a\right)$$

(ii) $a < 0$ のとき

$$F_X(x) = P\left(X \leq x\right) = P\left(Y^{1/a} \leq x\right) = P\left(Y \geq x^a\right) = 1 - F_Y\left(x^a\right),$$
$$f_X(x) = -a x^{a-1} f_Y\left(x^a\right)$$

(i), (ii) より, 任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して, $f_X(x)$ は

$$f_X(x) = \mathrm{sgn}(a) x^{a-1} f_Y\left(x^a\right)$$

と表せる. ただし, sgn(a) は符号関数で

$$\mathrm{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & (a > 0), \\ -1 & (a < 0) \end{cases}$$

を満たす.
ここで, Y を対数正規分布に従う確率変数とすると

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}y} \exp\left\{-\frac{\left(\log y - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (y > 0)$$

なので, X の確率密度関数 $f_X(x)$ は

$$f_X(x) = \mathrm{sgn}(a)x^{a-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x^a}\exp\left\{-\frac{\left(\log x^a - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\} = \mathrm{sgn}(a)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x}\exp\left\{-\frac{\left(a\log x - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (x > 0)$$

となる. この $f_X(x)$ に対して

$$\begin{aligned}
x^{1/a}f_X\left((\theta x)^{1/a}\right) &= \mathrm{sgn}(a)x^{1/a}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}(\theta x)^{1/a}}\exp\left[-\frac{\left\{a\log(\theta x)^{1/a} - \mu\right\}^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \mathrm{sgn}(a)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\theta^{1/a}}\exp\left[-\frac{\left\{\log(\theta x) - \mu\right\}^2}{2\sigma^2}\right], \\
x^{-(1/a)}f_X\left(\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/a}\right) &= \mathrm{sgn}(a)x^{-1/a}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/a}}\exp\left[-\frac{\left\{a\log\left(\theta/x\right)^{1/a} - \mu\right\}^2}{2\sigma^2}\right] \\
&= \mathrm{sgn}(a)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\theta^{1/a}}\exp\left[-\frac{\left\{\log\left(\theta/x\right) - \mu\right\}^2}{2\sigma^2}\right]
\end{aligned}$$

なので, この 2 式が等しいことは

$$\left\{\log(\theta x) - \mu\right\}^2 = \left\{\log\left(\theta/x\right) - \mu\right\}^2$$

が成立することと同値である. これを θ について解くと

$$\theta = e^{\mu}$$

となる. よって $\theta = e^{\mu}$ とおくと, 任意の $x > 0$ に対して $x^{1/a}f_X\left((\theta x)^{1/a}\right) = x^{-1/a}f_X\left(\left(\theta/x\right)^{1/a}\right)$ が成立するので, X は scale power-symmetry となる. このとき, $F_X(x)$ は狭義単調増加, $f_X(x)$ は単峰型で微分可能なので, この X は上記の性質を全て満たす.

scale power-symmetry とならない確率変数の例は, パレート分布に従う確率変数などが挙げられる. 実際, X をパレート分布に従う確率変数とすると, パレート分布の確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{\beta\gamma^\beta}{x^{\beta+1}} \quad (x > \gamma, \beta > 0, \gamma > 0)$$

である. この $f_X(x)$ に対して

$$\begin{aligned}
x^{1/a}f_X\left((\theta x)^{1/a}\right) &= x^{-\beta/a}\frac{\beta\gamma^\beta}{\theta^{(\beta+1)/a}}, \\
x^{-1/a}f_X\left(\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/a}\right) &= x^{\beta/a}\frac{\beta\gamma^\beta}{\theta^{(\beta+1)/a}}
\end{aligned}$$

であるが, この 2 式が等しくなるような θ は存在しない. よって X は scale power-symmetry ではない.

6 location power-symmetry

X を冪変換した確率変数 X^a に対して, location についての対称性を考える.

定義 6.1 正値確率変数 X が, $\theta \in \mathbb{R}$ について location power-symmetry であるとは, ある $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して

$$X^a - \theta \overset{\mathrm{d}}{=} \theta - X^a$$

となることをいう.

X の従う分布がどのようなときに, location power-symmetry となるか調べる. scale power-symmetry のときと同様に a について場合分けすると, ある $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して, $F_X(x), f_X(x)$ が

$$F_X\left((x+\theta)^{1/a}\right) = 1 - F_X\left((\theta - x)^{1/a}\right), \tag{6.1}$$

$$(x+\theta)^{1/a-1} f_X\left((x+\theta)^{1/a}\right) = (\theta - x)^{1/a-1} f_X\left((\theta - x)^{1/a}\right) \tag{6.2}$$

を満たすことと X が location power-symmetry であることは同値であることが示される.

location power-symmetry の分位点関数, ハザード関数, 中央値, 平均については, これまでと同様にして求めることができる.

6.1 最頻値

X が location power-symmetry のとき, 最頻値について調べる. $f_X(x)$ を単峰型で微分可能とする. (6.2) の両辺を x で微分して整理すると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a} - 1\right)(x+\theta)^{1/a-2} f_X\left((x+\theta)^{1/a}\right) + \frac{1}{a}(x+\theta)^{2/a-2} f'_X\left((x+\theta)^{1/a}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{a}\right)(\theta - x)^{1/a-2} f_X\left((\theta - x)^{1/a}\right) - \frac{1}{a}(\theta - x)^{2/a-2} f'_X\left((\theta - x)^{1/a}\right)
\end{aligned}$$

となる. ここで, $x = 0$ として整理すると

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\theta^{1/a-2} f_X\left(\theta^{1/a}\right) + \frac{1}{a}\theta^{2/a-2} f'_X\left(\theta^{1/a}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\theta^{1/a-2} f_X\left(\theta^{1/a}\right) - \frac{1}{a}\theta^{2/a-2} f'_X\left(\theta^{1/a}\right),$$

$$f'_X\left(\theta^{1/a}\right) = (a-1)\theta^{-1/a} f_X\left(\theta^{1/a}\right).$$

となる. ここで, $\theta^{-1/a} > 0$ であり, $f_X(x)$ は確率密度関数なので, $f_X\left(\theta^{1/a}\right) \geq 0$ である. また, $(a-1)$ は a の値により符号が変わるので, a について場合分けする.

(i) $a \geq 1$ のとき
$a-1 \geq 0$ となるので

$$f'_X\left(\theta^{1/a}\right) \geq 0$$

となる. よって $f_X(x)$ の最頻値を x_0 とすると, 少なくとも

$$x_0 \geq \theta^{1/a}$$

となる.
(ii) $a < 1$ のとき
$a-1 < 0$ となるので

$$f'_X\left(\theta^{1/a}\right) \leq 0$$

となる. よって $f_X(x)$ の最頻値を x_0 とすると, 少なくとも

$$x_0 \leq \theta^{1/a}$$

となる.
(i), (ii) より, $f_X(x)$ の最頻値 x_0 について, 少なくとも

$$\begin{cases} x_0 \geq \theta^{1/a} & (a \geq 1), \\ x_0 \leq \theta^{1/a} & (a < 1) \end{cases}$$

となる.

6.2 location power-symmetry となる確率変数の例

location power-symmetry となる確率変数の例は, 通常の対称である三角分布に従う正値確率変数 Y を, $Y = X^a$ で変換した確率変数 X などが挙げられる. 実際, $[\alpha, \beta](\alpha > 0)$ 上の三角分布に対して, Y の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{4\left(y-\alpha\right)}{\left(\beta-\alpha\right)^2} & \left(\alpha \leq y < \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right), \\ \dfrac{2}{\beta-\alpha} & \left(y = \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right), \\ \dfrac{4\left(\beta-y\right)}{\left(\beta-\alpha\right)^2} & \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} < y \leq \beta\right) \end{cases}$$

であり, ある $a > 0$ に対して $Y = X^a$ と変換すると

$$F_X(x) = P\left(X \leq x\right) = P\left(Y^{1/a} \leq x\right) = P\left(Y \leq x^a\right) = F_Y(x^a),$$
$$f_X(x) = a x^{a-1} f_Y(x^a)$$

となるので, X の確率密度関数は

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{4ax^{a-1}\left(x^a-\alpha\right)}{\left(\beta-\alpha\right)^2} & \left(\alpha^{1/a}\leq x<\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{1/a}\right),\\ \dfrac{2^{1/a}a\left(\alpha+\beta\right)^{1-1/a}}{\beta-\alpha} & \left(x=\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{1/a}\right),\\ \dfrac{4ax^{a-1}\left(\beta-x^a\right)}{\left(\beta-\alpha\right)^2} & \left(\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^{1/a}<x\leq\beta^{1/a}\right)\end{cases}$$

である. これより, $\left(x+\theta\right)^{1/a-1}f_X\left((x+\theta)^{1/a}\right)$, $\left(\theta-x\right)^{1/a-1}f_X\left((\theta-x)^{1/a}\right)$ の値は

$$\left(x+\theta\right)^{1/a-1}f_X\left((x+\theta)^{1/a}\right)=\begin{cases}\dfrac{4a\left(x+\theta-\alpha\right)}{\left(\beta-\alpha\right)^2} & \left(\alpha-\theta\leq x<\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\theta\right),\\ \dfrac{2a}{\beta-\alpha} & \left(x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\theta\right),\\ \dfrac{4a\left(\beta-x-\theta\right)}{\left(\beta-\alpha\right)^2} & \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\theta<x\leq\beta-\theta\right),\end{cases}$$

$$\left(\theta-x\right)^{1/a-1}f_X\left((\theta-x)^{1/a}\right)=\begin{cases}\dfrac{4a\left(x-\theta+\beta\right)}{\left(\beta-\alpha\right)^2} & \left(\theta-\beta\leq x<\theta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right),\\ \dfrac{2a}{\beta-\alpha} & \left(x=\theta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right),\\ \dfrac{4a\left(\beta-x-\theta\right)}{\left(\beta-\alpha\right)^2} & \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\theta<x\leq\beta-\theta\right)\end{cases}$$

となる. この 2 式が等しいことは

$$\alpha-\theta=\theta-\beta$$

が成立することと同値である. これを θ について解くと

$$\theta=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

となる. よって $\theta=(\alpha+\beta)/2$ が存在し, 任意の $\alpha<x<\beta$ に対して $\left(x+\theta\right)^{1/a-1}f_X\left((x+\theta)^{1/a}\right)=\left(\theta-x\right)^{1/a-1}f_X\left((\theta-x)^{1/a}\right)$ が成立するので, X は location power-symmetry となる. このとき, $F_X(x)$ は狭義単調増加であるが, $f_X(x)$ は $x=(\alpha+\beta)/2$ で微分不可能なので, 分位点関数, ハザード関数, 中央値の性質は満たす.

location power-symmetry とならない確率変数の例は, 対数正規分布に従う確率変数などが挙げられる. 実際, X を対数正規分布に従う確率変数とすると

$$\left(x+\theta\right)^{1/a-1}f_X\left((x+\theta)^{1/a}\right)=\frac{1}{(x+\theta)\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{\left\{\dfrac{1}{a}\log(x+\theta)-\mu\right\}^2}{2\sigma^2}\right],$$

$$\left(\theta-x\right)^{1/a-1}f_X\left((\theta-x)^{1/a}\right)=\frac{1}{(\theta-x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{\left\{\dfrac{1}{a}\log(\theta-x)-\mu\right\}^2}{2\sigma^2}\right]$$

であるが, この 2 式が等しくなるような θ は存在しない. よって X は location power-symmetry ではない.

性質の比較

scale power-symmetry と location power-symmetry の性質を比較すると, 表 3 のようになる.

表 3　power-symmetry の性質の比較

	scale power-symmetry	location power-symmetry
確率密度関数	$x^{1/a} f_X\left((\theta x)^{1/a}\right) = x^{-(1/a)} f_X\left(\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/a}\right)$	$(x+\theta)^{(1/a)-1} f_X\left((x+\theta)^{1/a}\right) = (\theta - x)^{(1/a)-1} f_X\left((\theta - x)^{1/a}\right)$
分布関数	$F_X\left((\theta x)^{1/a}\right) = 1 - F_X\left(\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/a}\right)$	$F_X\left((x+\theta)^{1/a}\right) = 1 - F_X\left((\theta - x)^{1/a}\right)$
分位点関数	$Q(u) = \dfrac{\theta^{2/a}}{Q(1-u)}$	$2\theta - \{Q(u)\}^a = \{Q(1-u)\}^a$
ハザード関数	$\dfrac{x^{(1/a)-1} h\left((\theta x)^{1/a}\right)}{1 - F_X\left(\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/a}\right)} = \dfrac{x^{-(1/a)-1} h\left(\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/a}\right)}{1 - F_X\left((\theta x)^{1/a}\right)}$	$\dfrac{(x+\theta)^{(1/a)-1} h\left((x+\theta)^{1/a}\right)}{1 - F_X\left((\theta - x)^{1/a}\right)} = \dfrac{(\theta - x)^{(1/a)-1} h\left((\theta - x)^{1/a}\right)}{1 - F_X\left((x+\theta)^{1/a}\right)}$
中央値	$\theta^{1/a}$	$\theta^{1/a}$
最頻値	$\leq \theta^{1/a}$	$\leq \theta^{1/a}$
モーメント	$E\left[\left(\dfrac{X}{\theta^{1/a}}\right)^r\right] = E\left[\left(\dfrac{\theta^{1/a}}{X}\right)^r\right]$	Not explicitly available
平均	$\geq \theta^{1/a}$	$\geq \theta^{1/a}$

参考文献

Abadir, K.M. (2005). The mean-median-mode inequality: counterexamples. *Economet. Theory*, **21**, 477-482.

Groeneveld, R.A. and Meeden, G. (1977). The mode, median, and mean inequality. *American Statistician*, **31**, 120-121.

Jones, M.C. (2008). On reciprocal symmetry. *J. Statist. Planning Inference*, **138**, 3039-3043.

Jones, M.C. (2010). Distributions generated by transformations of scale using an extended Schlömilch transformation. *Sankhyā Ser. A* **72**, 359-375.

Jones, M.C. (2012). Relationships between distributions with certain symmetries. *Statist. Probab. Lett.*, **82**, 1737-1744.

Jones, M.C. (2015). Univariate continuous distributions: symmetries and transformations. *J. Statist. Planning Inference*, **161**, 119-124.

Marshall, A.W. and Olkin, I. (2007). *Life Distributions Structure of Nonparametric, Semiparametric, and Parametric Families.* Springer, New York.

Mudholkar, G.S. and Natarajan, R. (2002). The inverse Gaussian models: analogues of symmetry, skewness and kurtosis. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **54**, 138-154.

Mudholkar, G.S. and Wang, H. (2007). IG-symmetry and R-symmetry: interrelations and applications to the inverse Gaussian theory. *J. Statist. Planning Inference*, **137**, 3655-3678.

Runnenburg, J.Th. (1978). Mean, median, mode. *Statistica Neerlandica*, **32**, 73-79.

Seshadri, V. (1965). On random variables which have the same distribution as their reciprocals. *Canad. Math. Bull.*, **8**, 819-824.

Wang, H. (2006). R-symmetry and Applications. University of Rochester. Ph.D. thesis.

van Zwet, W.R. (1979). Mean, median, mode II. *Statistica Neerlandica*, **33**, 1-5.