

高プラントル数スカラーによる成層乱流の大規模直接数値計算

京都大学大学院 工学研究科 沖野真也 (Shinya OKINO)

京都大学大学院 工学研究科 花崎秀史 (Hideshi HANAZAKI)

1 緒言

大気・海洋中における熱・物質の拡散や工業製品中の熱輸送の効率化など、地球物理学や機械工学上の諸問題を考える上で、乱流中におけるスカラーの輸送現象の理解は基礎的で重要なテーマである。流体中のスカラーは、流れに影響を及ぼすことなく、受動的に運動する“パッシブスカラー”と、熱や塩分のように浮力を介して流れに影響を及ぼす“アクティブスカラー”とに分けられる。

パッシブスカラーのスペクトルに関する研究として Batchelor (1959) が挙げられる。そこでは、Prandtl 数 (流体の動粘性係数に対するスカラー拡散係数の比) Pr が 1 よりも十分に大きいとき、スカラーは $k_{B*} = Pr^{1/2} k_{K*}$ で定義される Batchelor 波数において散逸し (ただし k_{K*} は Kolmogorov 波数)、散逸移流領域 ($k_{K*} < k_* < k_{B*}$) において、スカラースペクトルが k^{-1} に比例することが理論的に示された。実際に $Pr > 1$ の場合について直接数値計算をおこなった例として Bogucki *et al.* (1997) や Yeung *et al.* (2004) 等があり、Reynolds 数は小さいものの、最大で $Pr = 1024$ の計算を実施し、Batchelor のスケーリング則を確認している。

一方、これまでアクティブスカラーが鉛直方向に勾配をもった流体中の乱流 (密度成層乱流) の研究は数多くなされてきた (e.g., Herring & Métais, 1989; Gerz & Yamazaki, 1993; Laval *et al.*, 2003; Lindborg, 2006; Brethouwer *et al.*, 2007) が、その多くの場合、 $Pr = 1$ が対象であった。Gargett *et al.* (2003) は Prandtl 数が 7 と 70 のアクティブスカラーを含む二重拡散系の直接数値計算をおこなったが、それでも実用上重要な対象である、水中における熱と塩分の Prandtl 数 (それぞれ 7 と 700 である) とは大きな差がある。(塩分に対する用語としては、通常 Schmidt 数が用いられるが、運動学的には等価であるために、以後両者を区別せずに Prandtl 数と表記する。)

本研究では、Prandtl 数が 7 と 700 のスカラーを含む成層流体中の乱流を大規模直接数値計算によって解析する。特に、 $Pr = 700$ のアクティブスカラーと、 $Pr = 7$ のスカラーによる密度成層流体中における $Pr = 700$ のパッシブスカラーの振舞いの比較に重点を置いた議論をする。

2 基礎方程式と数値計算法

周期境界を有する、一辺の長さが L_* の立方体領域に満たされた密度成層流体を考える。座標系として、鉛直方向に z_* 座標、水平方向に x_*, y_* 座標をとる。本研究ではスカラー T_* の寄与による一様密度成層を取り扱う。すなわち、平均密度、平均スカラー場を $\bar{\rho}_*, \bar{T}_*$ として、 $d\bar{\rho}_*/dz_* \propto d\bar{T}_*/dz_* = \text{const.}$ である。平均密度勾配を用いて、浮力振動数は $N_* = \sqrt{-(g_*/\rho_{0*}) \cdot d\bar{\rho}_*/dz_*}$ と定義される。ここで、流体の代表密度を ρ_{0*} 、重力加速度を g_* としている。加えて、本研究では密度変化に寄与しないスカラー S_* を考える。スカラー S_* もまた鉛直方向に一様な平均勾配をもつものとする ($d\bar{S}_*/dz_* = \text{const.}$)。以後、流体の密度変化に寄与するスカラー T_* をアクティブスカラー、密度変化に寄与しないスカラー S_* をパッシブスカラーと呼んで区別する。

本研究では、初期場として等方的な速度場を与え、その時間発展を追跡する。初期の運動エネルギースペクトルは以下で与えられる。

$$E_*(k_*) = 16 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} u_{0*}^2 \frac{k_*^4}{k_{0*}^5} \exp \left\{ -2 \left(\frac{k_*}{k_{0*}} \right)^2 \right\}. \quad (1)$$

ここで、 u_{0*} は速度の一分成分の rms 値、 k_{0*} はスペクトルのピーク波数を表す。初期の運動エネルギーは

$KE_{0*} = \int_0^\infty E_*(k_*) dk_* = 3u_{0*}^2/2$, 初期の積分長は

$$L_{0*} = \frac{3\pi}{4KE_{0*}} \int_0^\infty \frac{E_*(k_*)}{k_*} dk_* = \frac{\sqrt{2\pi}}{k_{0*}} \quad (2)$$

となる。また、初期におけるスカラー変動は 0 とする。

流速 u_{i*} , 基本場からの圧力変動 p'_* , スカラー変動 T'_* , S'_* を支配する基礎方程式は、代表長さ L_{0*} , 代表速度 u_{0*} , 代表圧力変動 $\rho_{0*}u_{0*}^2$, 代表スカラー変動 $L_{0*}d\bar{T}_*/dz_*$, $L_{0*}d\bar{S}_*/dz_*$ を用いて無次元化され、以下で与えられる; 連続の式,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

Boussinesq 近似を施した運動方程式,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{T}{Fr_0^2} \delta_{i3}, \quad (4)$$

スカラーの輸送方程式,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{Re_0 Pr_T} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + u_3, \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_j \frac{\partial S}{\partial x_j} = \frac{1}{Re_0 Pr_S} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} + u_3. \quad (6)$$

ここで、下付きの * を除いたものは無次元量を表し、簡単のために圧力変動とスカラー変動を表すプライム (') は省略している。系の挙動を決定する無次元パラメータは、初期 Reynolds 数: $Re_0 = u_{0*}L_{0*}/\nu_*$, 初期 Froude 数: $Fr_0 = u_{0*}/(N_*L_{0*})$, Prandtl 数: $Pr_T = \nu_*/\kappa_{T*}$, $Pr_S = \nu_*/\kappa_{S*}$ の四つである。ただし、動粘性係数を ν_* , アクティブスカラーの拡散係数を κ_{T*} , パッシブスカラーの拡散係数を κ_{S*} としている。本研究では、初期 Reynolds 数 $Re_0 = 50$, 初期 Froude 数 $Fr_0 = 1$ と固定した上で、二種類の Prandtl 数の組 $(Pr_T, Pr_S) = (7, 700)$ と $(Pr_T, Pr_S) = (700, 7)$ に対する計算をおこなった。流体が温度と塩分によって成層しており、そのうち密度変化に寄与するのが温度か塩分のいずれか一方である状況に相当する。

方程式 (3)-(6) の解をスペクトル法を用いた直接数値計算によって求める。計算領域の一边は $L_*/L_{0*} = 4\pi$ とする。エイリアス誤差は 3/2 則によって完全に除去する。計算には最大で 4096^3 の格子点を用い、このときの切断波数は 682.5 である。時間発展スキームとして 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いた。計算は次の手順で実施する: まず、式 (1) で与えられる初期の等方的な速度場を成層の効果を入れずに時間発展させる。エンストロフィーが最大になった時刻を $t = 0$ とし、この時刻から成層の効果を入れる。計算は $t = 30$ にて終了した。これは、Brunt-Väisälä 周期の約 5 周期分に相当する。(無次元化された Brunt-Väisälä 周期 T_{BV*} は $T_{BV*}u_{0*}/L_{0*} = 2\pi Fr_0 \simeq 6.3$ である。)

3 計算結果

得られた流れ場やエネルギースペクトルを議論する前に、流れを特徴づける波数の時間変化を fig.1 に示す。Ozmidov 波数は

$$k_{O*} = \left(\frac{N_*^3}{\epsilon_*} \right)^{1/2} \quad (7)$$

で定義され (ϵ_* : 運動エネルギー散逸率), 浮力効果と非線形効果のつりあう波数を表す。Ozmidov 波数以下の大スケールでは浮力の影響が支配的となる。Fig.1 は $Pr_T = 700$ における結果であるが, $Pr_T = 7$ であっても, k_K や k_O の時間変化に定性的な違いはない。また、ここではアクティブスカラーに対する Batchelor 波数 k_{BT} のみを描いている。

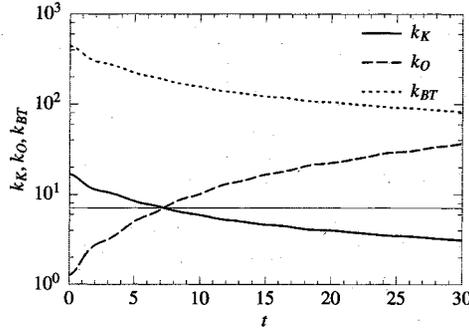


Figure 1 Time development of the Kolmogorov (k_K), Ozmidov (k_O) and Batchelor (k_{BT}) wavenumbers for $Pr_T = 700, Pr_S = 7$.

初期時刻において、Kolmogorov 波数は約 17 であり、時間の経過とともに単調に減少する。一方、Ozmidov 波数は単調に増加し、 $t \sim 7$ で Kolmogorov 波数を上回る。これは、 $t \sim 7$ の時点で速度場の最小スケールにまで浮力の効果が及んだことを意味する。本稿では以後、 $k_K \sim k_O$ である $t = 6$ と、 $k_K \ll k_O$ である $t = 30$ という二つの時刻を選び、そこでのスカラー場やそのエネルギースペクトルについて紹介する。

なお、初期時刻におけるアクティブスカラーの Batchelor 波数は $k_{BT} = k_K \times \sqrt{Pr_T} \simeq 440$ であるから、本計算（最大波数 682.5）によってその最小スケールまで十分に解像できているといえる。また、本研究では時刻 $t = 6$ において、格子点数を 2048^3 （最大波数 341）に減らして計算を続けた。この時刻における Batchelor 波数は 206 程度まで減少しているため、 2048^3 点の計算であっても十分な解像度が確保されているためである。

3.1 減衰初期 ($t = 6$) における結果

まず、fig.2 に Prandtl 数が 700 のスカラーの強度 ($S^2/(2Fr_0^2)$, または $T^2/(2Fr_0^2)$ で定義する) の $t = 6$ における空間分布を示す。両者の違いはアクティブスカラーの Prandtl 数である。すなわち、fig.2(a) がパッシブスカラー ($Pr_S = 700$, ただし、 $Pr_T = 7$), fig.2(b) がアクティブスカラー ($Pr_T = 700$) の分布である。なお、fig.2(b) はポテンシャルエネルギーの分布に相当する。図には $x = 4\pi, y = 4\pi, z = 0$ における面内分布と、スカラー強度の最大値の 30% を表す等値面が示されている。また、カラーバーの最大値も、スカラー強度の最大値の 30% に設定されている。

両者のアクティブスカラーの Prandtl 数は異なるため、速度場も異なるが、スカラー強度の分布に大きな違いは見られない。これは、Prandtl 数の違いによる速度場の違いが小スケールにのみ現れ、fig.2 に見られる比較的大きなスケールには現れないためである。

両者の定量的な違いは、アクティブスカラーの最大強度がパッシブスカラーに比べて 15% 程度小さいことである。この違いは、アクティブスカラーのポテンシャルエネルギーが鉛直スカラーフラックスを介して、運動エネルギーへと変換されているために生じる。以上に述べた内容は fig.3 に示すスペクトルを見ることでよりはっきりと理解されるであろう。

Fig.3 は $t = 6$ における運動エネルギースペクトル E_K 、ポテンシャルエネルギースペクトル（あるいはアクティブスカラースペクトル） E_P 、パッシブスカラースペクトル E_S を示す。また、鉛直破線によって、Kolmogorov 波数 k_K 、Ozmidov 波数 k_O 、Batchelor 波数 k_{BT} または k_{BS} を示している。

低波数領域 ($k \lesssim k_O \sim k_K$) において、fig.3(a, b) を比較すると、 E_K, E_P, E_S のそれぞれについて大きな差異は見られない。これは低波数領域が主に浮力によって支配されているためであり、Prandtl 数の違いによる効

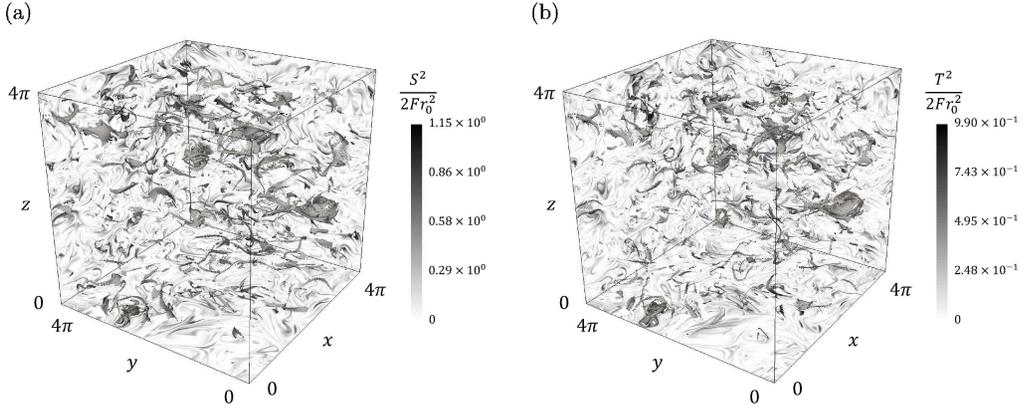


Figure 2 Spatial distribution of the intensity of (a) the passive scalar of $Pr_S = 700$, $S^2/(2Fr_0^2)$, where $Pr_T = 7$, and (b) the active scalar of $Pr_T = 700$, $T^2/(2Fr_0^2)$ (or potential energy), at $t = 6$.

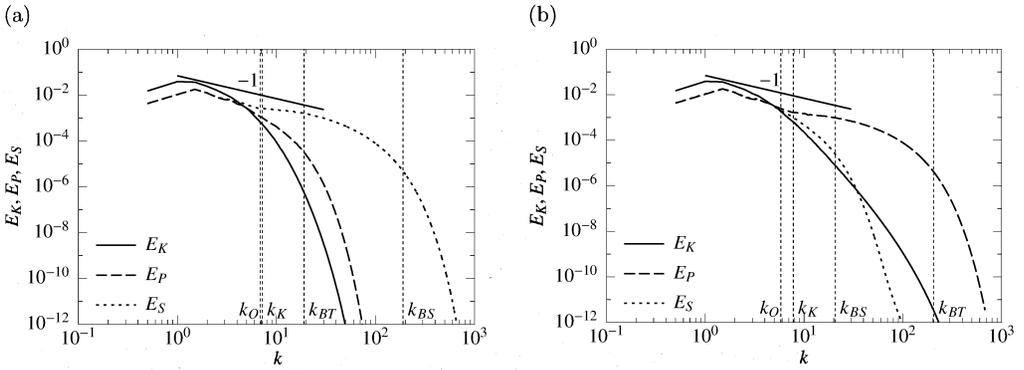
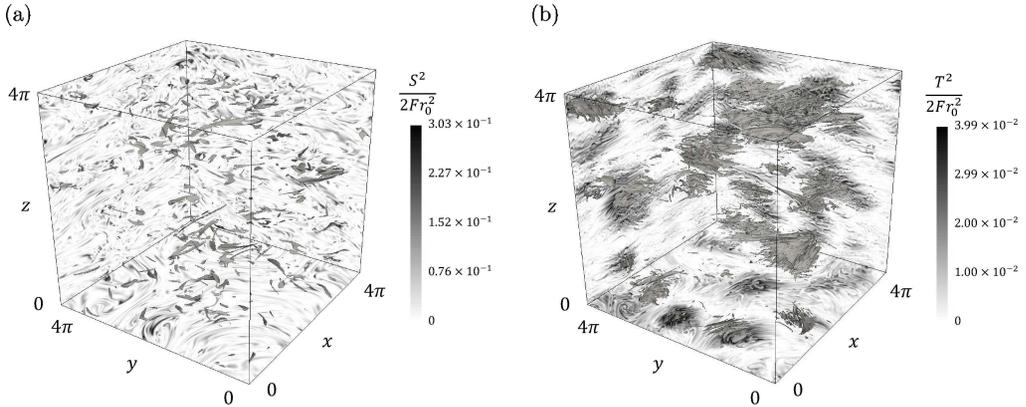
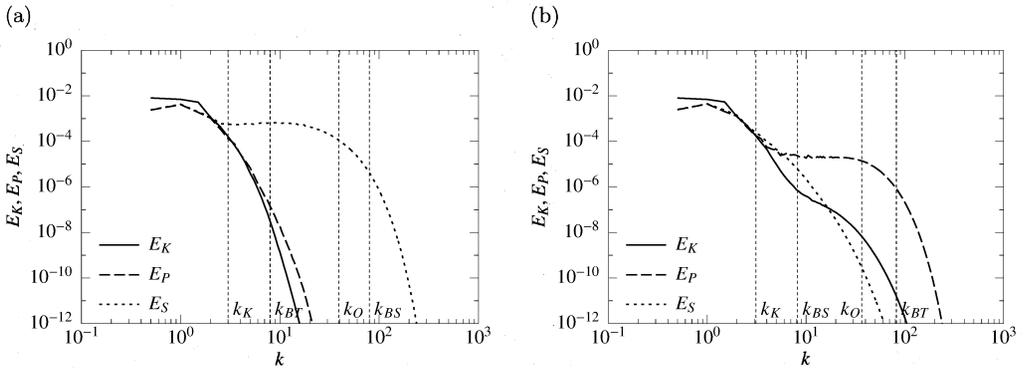


Figure 3 Kinetic energy spectrum E_K , active scalar spectrum (or potential energy spectrum) E_P and passive scalar spectrum E_S at $t = 6$. (a) $Pr_T = 7, Pr_S = 700$. (b) $Pr_T = 700, Pr_S = 7$. Vertical dashed line indicates either the Kolmogorov (k_K), Ozmidov (k_O) or Batchelor wavenumber (k_{BT} or k_{BS}).

果は高波数領域に現れる。 $Pr_T = 7$ と $Pr_T = 700$ における E_K, E_P をそれぞれ比較すると、 $k \gtrsim k_O \sim k_K$ において $Pr_T = 700$ の場合のほうがより多くの運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを保有していることが分かる。高 Prandtl 数のスカラーはその分子拡散が小さいために、小スケールに多くのポテンシャルエネルギーを保持することができ、さらにそのポテンシャルエネルギーが鉛直スカラーフラックスを介して運動エネルギーに供給されるため、エネルギースペクトルにこのような特徴が現れる。

さらに、fig.3(a) に示される $Pr_S = 700$ のパッシブスカラースペクトルと fig.3(b) に示される $Pr_T = 700$ のアクティブスカラースペクトルを比較しよう。いずれも $1.5 \lesssim k \lesssim 40$ の広い波数領域において、スペクトルが k^{-1} に従うことが確認できる。 $k_K < k < k_B$ で k^{-1} に従うという Batchelor の理論とは定量的には若干異なるが、 $40/1.5 \simeq 27 \sim \sqrt{Pr}$ であるから、 k^{-1} 乗則の成り立つ波数帯の幅としては一致している。また、 $Pr_T = 700$ のアクティブスカラースペクトル E_P は $Pr_S = 700$ のパッシブスカラースペクトル E_S よりも、 $k \gtrsim k_O \sim k_K$ においてわずかに小さい値をとっており、これが fig.2 で見られた定量的な差異を表している。

Figure 4 Same as figure 2, but $t = 30$.Figure 5 Same as figure 3, but $t = 30$.

3.2 最終時刻 ($t = 30$) における結果

続いて、浮力の効果が Kolmogorov スケールよりも十分小さいスケールにまで及んだ時刻 $t = 30$ における結果を示す。Fig.4 は $t = 30$ における、Prandtl 数が 700 のスカラーの強度分布である。Fig.4(a, b) とともに fig.2 と比べて水平方向に伸びた扁平な構造が見られる。これは浮力によって鉛直方向の運動が抑制された結果であり、成層乱流に見られる一般的な特徴である (e.g., Herring & Métais, 1989)。

減衰初期である $t = 6$ では、Prandtl 数が 700 のスカラーはアクティブであってもパッシブであっても類似の構造をもっていた (ただし、アクティブスカラーの Prandtl 数は異なる) のに対し、 $t = 30$ において両者は大きく異なる様相を示す。すなわち、fig.4(a) のパッシブスカラーは空間に対して一様に分布しているのに対し、fig.4(b) のアクティブスカラーは空間の一部の領域に群れをなして局在している様子が見られる。また、スカラー強度の最大値においても、アクティブスカラーはパッシブスカラーに比べて、1 桁程度小さい値をもっている。このような高 Prandtl 数スカラーの局在化が起こるメカニズムは今のところ不明であるが、スペクトルの観点からさらなる考察を加える。

$t = 30$ におけるスペクトル E_K, E_P, E_S を fig.5 に示す。まず、Prandtl 数が 700 のスカラーに着目する。

Fig.5(a, b) とともに, 初期 ($t = 6$) に見られた k^{-1} 乗則は $t = 30$ では成り立たない. その代わりに, $Pr_S = 700$ のパッシブスカラー (fig.5a) では $3 < k < 20$, $Pr_T = 700$ のアクティブスカラー (fig.5b) では $7 < k < 30$ の波数域において平坦なスペクトルをもつことが確認できる. 両者の違いはスペクトルの大きさである. すなわち, スペクトルが平坦な領域において, $Pr_S = 700$ のパッシブスカラースペクトルは $E_S = O(10^{-3})$ であり, 低波数 ($k \sim 1$) におけるスペクトルの値と大きく違わないのに対し, $Pr_T = 700$ のアクティブスカラースペクトルは $E_P = O(10^{-5})$ とかなり小さい. そのため, $Pr_T = 700$ のアクティブスカラーのスペクトルは階段状となっている. Fig.4(b) で $Pr_T = 700$ のアクティブスカラーが局在化しているのを見たが, 大スケール ($k \lesssim k_K$) のスペクトルが局在しているスカラーの大きな塊に相当し, 平坦なスペクトル ($7 < k < 30$) が大きな塊に含まれる小さな変動に対応している. 一方, $Pr_S = 700$ のパッシブスカラーはそのような階段状スペクトルをもたないため, fig.4(a) の $Pr_S = 700$ のパッシブスカラーの分布には局在化という特異なパターンは現れない.

$Pr_T = 700$ のアクティブスカラーのほうがスペクトルの値が小さい原因は, $t = 6$ でのスペクトルに対しても述べたように, ポテンシャルエネルギーから運動エネルギーへの変換である. 実際, $k \sim 20$ あたりの運動エネルギースペクトルは盛り上がっている. Laval *et al.* (2003) や Brethouwer *et al.* (2007) では, 運動エネルギースペクトルのより顕著な盛り上がりが確認され, これは Kelvin-Helmholtz 不安定性によるものであると述べられている. 我々の系でも Kelvin-Helmholtz 不安定性に由来するような流れが生じているかは未確認であるが, 局所 Richardson 数 Ri は広い範囲で負になっており, 流れは不安定な状態にあるといえる.

3.3 規格化されたスペクトル

最後に, Prandtl 数が 700 のスカラーに Batchelor のスケールリングを施したものを fig.6 に示す. 横軸の波数は Batchelor 波数 k_{B*} によって, 縦軸のスカラースペクトルはスカラー拡散係数 κ_* , スカラー散逸率 χ_* , Kolmogorov 時間 $\sqrt{\nu_*/\epsilon_*}$ を用いて規格化されている. 鉛直破線は Ozmidov 波数を表し, 時間の経過とともに増加する.

パッシブスカラースペクトル, アクティブスカラースペクトルともに, Kolmogorov 波数よりも大きい波数 ($k_{K*}/k_{B*} = 1/\sqrt{700} \sim 4 \times 10^{-2}$) において, 時刻によらずおよそ一本の曲線上に乗っていることが分かる. これは成層の効果が Kolmogorov スケールにまで及んでいるにもかかわらず, スカラースペクトルが Batchelor のスケールリング則に従うことを示している. なお, さらに時刻が経過し, $k_B < k_O$ となると Batchelor スケールリングが成り立たなくなることを $Pr_T = 7$ の結果により確認している.

4 結言

Prandtl 数が 700 のスカラーを含む成層乱流 ($Pr_T = 700, Pr_S = 7$ と $Pr_T = 7, Pr_S = 700$ の 2 ケース) を, 最大で 4096³ 点を用いた直接数値シミュレーションによって解析した. 特に, $Pr_T = 700$ のアクティブスカラーと, $Pr_T = 7$ の密度成層流体中における $Pr_S = 700$ のパッシブスカラーの振舞いの違いに注目し, 以下の知見を得た.

成層の影響が Kolmogorov スケールにまで及んでいないとき ($k_O \lesssim k_K$),

1. $Pr_S = 700$ のパッシブスカラーと $Pr_T = 700$ のアクティブスカラーの分布は, それぞれのアクティブスカラーの Prandtl 数が異なるにもかかわらず, ほぼ同一である.
2. $Pr_S = 700$ のパッシブスカラーと $Pr_T = 700$ のアクティブスカラーのスペクトルもほぼ同一の形状をしており, 1 桁以上にわたってスペクトルが k^{-1} 乗に比例する. ただし, $Pr_T = 700$ のアクティブスカラーのもつポテンシャルエネルギーは鉛直エネルギーフラックスを介して運動エネルギーへと変換され

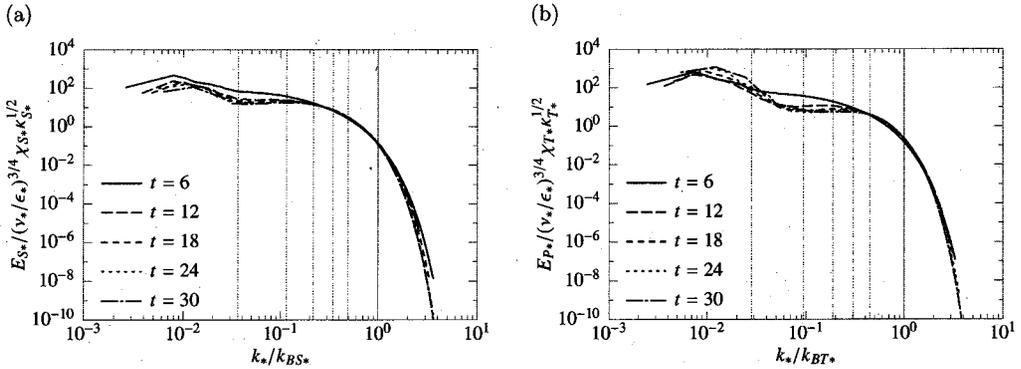


Figure 6 Normalized spectra of (a) the passive scalar of $Pr_S = 700$, where $Pr_T = 7$ and (b) the active scalar of $Pr_T = 700$. Vertical solid line indicates the Batchelor wavenumber. Vertical dotted lines shows the increasing Ozmidov wavenumber with time (at $t = 6, 12, \dots, 30$ from the left).

るため、その値は小さくなる。実際、 $Pr_T = 700$ の計算において、高波数の運動エネルギースペクトルは $Pr_T = 7$ の場合に比べ大きな値をもつ。

時刻の経過とともに Ozmidov 波数は増加し、最小スケールの運動にまで浮力の影響が及ぶようになる ($k_O \gg k_K$)。このとき、

3. $Pr_S = 700$ のパッシブスカラーは領域全体に一様に分布するのに対し、 $Pr_T = 700$ のアクティブスカラーは空間の一部に群れをなし局在する。
4. スカラースペクトルにおいて、時刻初期に見られた k^{-1} 乗則に従う領域はなくなり、代わりに平坦なスペクトルが現れる。この平坦な領域において、 $Pr_T = 700$ のアクティブスカラースペクトルは鉛直フラックスによるエネルギー交換のため、 $Pr_S = 700$ のパッシブスカラーに比べ小さな値をとる。

さらに、

5. $k_O < k_B$ である限り、 $Pr_S = 700$ のパッシブスカラースペクトルも $Pr_T = 700$ のアクティブスカラースペクトルも $k > k_K$ において Batchelor のスケージングに従う。

しかしながら、高 Prandtl 数スカラーの局在化が起こるメカニズムやスカラースペクトルに平坦な領域が生じる理由などは未解明である。今後、エネルギースペクトルの収支 (鉛直スカラーやエネルギー輸送、散逸のスペクトル) や流れの非等方性 (水平スペクトルと鉛直スペクトルの違い) 等を詳細に調べることで、高 Prandtl スカラーの特異な振舞いを理解したいと考えている。

謝辞

本研究は平成 28 年度 HPCI システム利用研究課題 (課題番号: hp160108) により、東北大学サイバーサイエンスセンター SX-ACE を利用して得られたものである。また、本研究の一部は平成 28 年度地球シミュレータ公募課題により、海洋研究開発機構の地球シミュレータを利用して得られたものである。

参考文献

- BATCHELOR, G. K. 1959 Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. *J. Fluid Mech.* **5**, pp.113-133.
- BOGUCKI, D., DOMARADZKI, J. A. & YEUNG, P. K. 1997 Direct numerical simulations of passive scalars with $Pr > 1$ advected by turbulent flow. *J. Fluid Mech.* **343**, pp.111-130.
- BRETHOUWER, G., BILLANT, P., LINDBORG, E. & CHOMAZ, J. M. 2007 Scaling analysis and simulation of strongly stratified turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **585**, pp.343-368.
- HERRING, J. R. & MÉTAIS, O. 1989 Numerical experiments in forced stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **202**, pp.97-115.
- GERZ, T. & YAMAZAKI, H. 1993 Direct numerical simulation of buoyancy-driven turbulence in stably stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **249**, pp.415-440.
- GARGETT, A. E., MERRYFIELD, W. J. & HOLLOWAY, G. 2003 Direct numerical simulation of differential scalar diffusion in three-dimensional stratified turbulence. *J. Phys. Oceanogr.* **33**, pp.1758-1782.
- LAVAL, J. P., MCWILLIAMS, J. C. & DUBRULLE, B. 2003 Forced turbulence: successive transition with Reynolds number. *Phys. Rev. E* **68**, 036308.
- LINDBORG, E. 2006 The energy cascade in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **550**, pp.207-242.
- YEUNG, P. K., DONZIS, D. A. & SREENIVASAN, K. R. 2004 Simulations of three-dimensional turbulent mixing for Schmidt numbers of the order 1000. *Flow, Turbul. Combust.* **72**, pp.333-347.