数理解析研究所講究録
第2049巻 2017年 94-108

ホロ円的曲面とド・ジッターホロ円的曲面の双対性について

北海道大学院・理学研究院　方　凱航
Fang Kaihang
Department of Mathematics,
Hokkaido University

2017.3

1　はじめに

本論文では光錐内の曲線の双対曲面としてホロ円的曲面とド・ジッターホロ円的曲面を定義し、それらの間の双対性に関して調べる。§4 でルジャンドル双対性の視点から、定理 4 では光錐空間の曲線と二つの曲面との双対関係を述べる。§5 では, 二つの曲面を双曲的高さ関数とド・ジッター高さ関数の判別集合として表す。最後に §5,§7 で二つ曲面の特異点の分類を行い、またその特異点の幾何学的意味に関して調べる。

2　基本概念

$\mathbb{R}^4$を 4 次元数ベクトル空間とし, $\boldsymbol{x}$=(x_0, x_1, x_2, x_3), $\boldsymbol{y}$=$(y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$とする。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して擬内積を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$と定義する。このとき $(\mathbb{R}^4, \langle,\rangle)$ を 4 次元ミンコフスキー空間と呼ぶ。$(\mathbb{R}^4, \langle,\rangle)$ を $\mathbb{R}^4_1$と書く。さらにゼロベクトルではない $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4_1$について $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle > 0, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle < 0$ を満たす時, それぞれ空間的ベクトル, 光的ベクトル, 時間的ベクトルと呼ぶ。$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4_1$のノルムを $\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle|}$と定義する。$\mathbb{R}^4_1$には時間的向きが定まる。ここでは, $\boldsymbol{e}_0$=$(1, 0, 0, 0)$ を未来方向と定める。任意のゼロベクトルではない $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4_1$と実数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4_1$が擬法線ベクトルとなる超平面を次のように定義する。

$$HP(\boldsymbol{v}.c) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\rangle = c\}$$

$\boldsymbol{v}$ が空間的, 光的, 時間的ベクトルのときそれぞれ時間的超平面, 光的超平面, 空間的超平面と呼ぶ。
また, 双曲的空間とは

$$H^3_+(-1) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = -1, x_0 \geq 1\}$$

のことであり, ド・ジッター空間とは

$$S^3_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 1\}$$

のことであり, ベクトル $\boldsymbol{a}$ を頂点とする光錐とは

$$LC^a = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4_1 \mid \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\rangle = 0\}$$

のことである。さらに $LC^* = \{\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in LC^a \mid \boldsymbol{a} = (0,0,0,0)\}$ とおき。これは原点における光円錐と呼ぶ。そして任意の $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{R}^4_1$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3$ は以下のように定義する。

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3 = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

ここで、ベクトル $\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^4_1$ は $\mathbb{R}^4_1$ の標準基底である。LC^* と超平面の共通部分として二次曲面が現われる。$HP(\boldsymbol{v},c)$ は空間的、時間的または光的な超平面の場合,$LC^* \cap HP(\boldsymbol{v},c)$ は三種類の二次曲面となる。それぞれは $\boldsymbol{v}$ が時間的な場合 $E^2(\boldsymbol{v},c) = LC^* \cap HP(\boldsymbol{v},c)$ を楕円的２次曲面、$\boldsymbol{v}$ が空間的な場合 $H^2(\boldsymbol{v},c) = LC^* \cap HP(\boldsymbol{v},c)$ を双曲的２次曲面と言う。さらに、$\boldsymbol{v}$ が光的な場合 $P^2(\boldsymbol{v},c) = LC^* \cap HP(\boldsymbol{v},c)$ を放物的２次曲面と呼ぶ。

3 光錐内の空間的曲線の微分幾何学

この章では Takizawa-Tsukada の論文 [2] に従って，LC^* 内の空間的曲線の微分幾何学とフレネ・セレ型の公式を与える。$\boldsymbol{l} : I \longrightarrow LC^*$ を実数 $\mathbb{R}$ の開集合 I から LC^* への正則曲線とする。そして $\boldsymbol{l}(t)$、$\boldsymbol{l}'(t)$ を一次独立と仮定すると $\boldsymbol{l}'(t)$ は空間的ベクトルである。$\boldsymbol{l}'(t)$ が空間的ベクトルであれば，$\boldsymbol{l}$ を弧長パラメーターに変換することができる。今後は $\boldsymbol{l}$ を単位速度空間的曲線と仮定する。つまり $\langle \boldsymbol{l}'(t), \boldsymbol{l}'(t)\rangle=1$ とする。関数 κ を $\kappa(t) = \langle \boldsymbol{l}''(t),\boldsymbol{l}''(t)\rangle$ と定義する。ここで $\langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{l}'(t)\rangle = 0$ を微分すると，$\langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{l}''(t)\rangle + \langle \boldsymbol{l}'(t), \boldsymbol{l}'(t)\rangle = 0$ なので $\langle \boldsymbol{l}''(t), \boldsymbol{l}(t)\rangle = -1$ を得る。よって以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{l}(t)\rangle & \langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{l}''(t)\rangle \\ \langle \boldsymbol{l}''(t), \boldsymbol{l}(t)\rangle & \langle \boldsymbol{l}''(t), \boldsymbol{l}''(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \kappa(t) \end{pmatrix}$$

の行列式が -1 になるので，擬内積 $\langle , \rangle$ は $\mathbb{R}^4_1$ 内の部分空間 $\{\boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{l}''(t)\}_{\mathbb{R}}$ に制限すると不定値となる。

補題 1. $\langle \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{n}(t)\rangle = 0$ かつ $\langle \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{l}(t)\rangle = -2$ を満たすベクトル $\boldsymbol{n}(t) \in \{\boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{l}''(t)\}_{\mathbb{R}}$ が一意に存在する。

証明. $\boldsymbol{n}(t) = \kappa(t)\boldsymbol{l}(t) + 2\boldsymbol{l}''(t)$ は $\langle \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{n}(t)\rangle = 0$,$\langle \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{l}(t)\rangle = -2$ を満たす。次に，$\overline{\boldsymbol{n}(t)} = \lambda \boldsymbol{l}(t) + \mu \boldsymbol{l}''(t)$ とおき，$\langle \overline{\boldsymbol{n}(t)}, \overline{\boldsymbol{n}(t)}\rangle = 0$ と $\langle \overline{\boldsymbol{n}(t)}, \boldsymbol{l}(t)\rangle = -2$ を満たすとする。$0 = \langle \overline{\boldsymbol{n}(t)}, \overline{\boldsymbol{n}(t)}\rangle = -2\lambda\mu + \mu^2\kappa(t)$ さらに $-2 = \langle \overline{\boldsymbol{n}(t)}, \boldsymbol{l}(t)\rangle = \mu\langle \boldsymbol{l}''(t), \boldsymbol{l}(t)\rangle$，従って $\mu = 2$, $\lambda = \kappa(t)$ となり，一意性が成り立つ。 □

ベクトル $\boldsymbol{l}(t)$,$\boldsymbol{t}(t)$,$\boldsymbol{n}(t)$ と互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}(t)$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{e}(t) = \frac{\boldsymbol{l}(t) \wedge \boldsymbol{t}(t) \wedge \boldsymbol{n}(t)}{\| \boldsymbol{l}(t) \wedge \boldsymbol{t}(t) \wedge \boldsymbol{n}(t) \|}$$

四つのベクトルの組 $\{\boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{t}(t), \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{e}(t)\}$ は $\boldsymbol{l}$ に沿った枠場になる。I 上の関数 τ を $\tau(t) = \langle \boldsymbol{n}'(t), \boldsymbol{e}(t)\rangle$ と定めるとき以下の命題を得る。

命題 1. 以下のフレネ・セレ型公式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{l}'(t) \\ \boldsymbol{t}'(t) \\ \boldsymbol{e}'(t) \\ \boldsymbol{n}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\kappa(t) & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\tau(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa(t) & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{l}(t) \\ \boldsymbol{t}(t) \\ \boldsymbol{e}(t) \\ \boldsymbol{n}(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

証明. $\{\boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{t}(t), \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{e}(t)\}$ は $\mathbb{R}^4_1$ の基底なので, $\boldsymbol{n}'(t) = b_0\boldsymbol{l}(t) + b_1\boldsymbol{t}(t) + b_2\boldsymbol{e}(t) + b_3\boldsymbol{n}(t)$ と書き表される。$\langle \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{l}(t)\rangle = -2$ の両辺を微分すると, $0 = \langle \boldsymbol{n}'(t), \boldsymbol{l}(t)\rangle + \langle \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{l}'(t)\rangle = b_3$ より $b_3 = 0$ となる。$\langle \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{t}(t)\rangle = 0$ の両辺を微分すると, $0 = \langle \boldsymbol{n}'(t), \boldsymbol{t}(t)\rangle + \langle \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{t}'(t)\rangle = b_1 + \kappa(t)$ から $b_1 = -\kappa(t)$ になる。さらに $\langle \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{n}(t)\rangle = 0$ の両辺を微分すると, $0 = 2\langle \boldsymbol{n}'(t), \boldsymbol{n}(t)\rangle = -4b_0$ から $b_0 = 0$ になる。または定義から $\tau(t) = \langle \boldsymbol{n}'(t), \boldsymbol{e}(t)\rangle = b_2$ であり, 従って $\boldsymbol{n}'(t) = -\kappa(t)\boldsymbol{t}(t) + \tau(t)\boldsymbol{e}(t)$ となる。同様に, $\boldsymbol{e}'(t) = \frac{1}{2}\tau(t)\boldsymbol{l}(t)$ を得る。 □

定義 1. $\boldsymbol{l}(t)$ に沿った $\mathbb{R}^4_1$ の擬正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_0(t), \boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \boldsymbol{e}_3(t)\}$ を以下の様に定義する：

$$\boldsymbol{e}_0(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}(t) + \boldsymbol{n}(t)), \boldsymbol{e}_1(t) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}(t) - \boldsymbol{n}(t)), \boldsymbol{e}_2(t) = \boldsymbol{e}(t), \boldsymbol{e}_3(t) = \boldsymbol{t}(t)$$

このとき $\langle \boldsymbol{e}_0(t), \boldsymbol{e}_0(t)\rangle = -1, \langle \boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_1(t)\rangle = 1, \langle \boldsymbol{e}_2(t), \boldsymbol{e}_2(t)\rangle = 1, \langle \boldsymbol{e}_3(t), \boldsymbol{e}_3(t)\rangle = 1$ となり, また $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は互いに擬直交していることがわかる。

命題 1 のフレネ・セレ型公式を擬正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_0(t), \boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \boldsymbol{e}_3(t)\}$ を用いて書き表すと以下の命題 2 が成り立つ。

命題 2. $\{\boldsymbol{e}_0(t), \boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \boldsymbol{e}_3(t)\}$ に関して以下のようにフレネ・セレ型公式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_0'(t) \\ \boldsymbol{e}_1'(t) \\ \boldsymbol{e}_2'(t) \\ \boldsymbol{e}_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\tau(t) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\kappa(t) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\tau(t) & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\kappa(t) \\ \frac{1}{2}\tau(t) & \frac{1}{2}\tau(t) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\kappa(t) & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\kappa(t) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_0(t) \\ \boldsymbol{e}_1(t) \\ \boldsymbol{e}_2(t) \\ \boldsymbol{e}_3(t) \end{pmatrix}$$

[4] に従って, 光錐空間的単位速度曲線 $\boldsymbol{l} : I \longrightarrow LC^*$ に対して, 以下の写像を定義する：

$$HC : I \times \mathbb{R} \longrightarrow H^3(-1); HC(t, \mu) = \boldsymbol{e}_0(t) + \mu\boldsymbol{e}_2(t) + \frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{e}_0(t) + \boldsymbol{e}_1(t))$$

この写像を曲線 $\boldsymbol{l}$ のホロ円的曲面と言う。本論文では $\kappa(t) \geq 1$ のときにこの曲面の特異点を調べるために不変量 $\sigma_h^{\pm}(t)$ を以下のように定義する：

$$\sigma_h^{\pm}(t) = \kappa'(t) \pm \sqrt{\kappa(t) - 1}\tau(t)$$

定理 1. $\boldsymbol{l} : I \longrightarrow LC^*$ を光錐空間的単位速度曲線で $\kappa(t_0) \geq 1$ とする。このとき以下が成り立つ。

(1) 点 (t_0, μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のホロ円的曲面 HC の特異点であるための必要十分条件は, $\mu_0 = \pm\sqrt{\kappa(t_0) - 1}$ を満たすことである。

(2) 点 (t_0, μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のホロ円的曲面 HC とカスプ状曲面 $C \times \mathbb{R}$ が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\mu_0 = \pm\sqrt{\kappa(t_0) - 1}$ かつ $\sigma_h^{\pm}(t_0) \neq 0$ を満たすことである。

(3) 点 (t_0, μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のホロ円的曲面 HC とツバメの尾 SW が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa(t_0) > 1, \mu_0 = \pm\sqrt{\kappa(t_0) - 1}$, $\sigma_h^{\pm}(t_0) = 0$ かつ $\sigma_h'^{\pm}(t_0) \neq 0$ を満たすことである。

(4) 点 (t_0, μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のホロ円的曲面 HC とカスプくちばしが局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa(t_0) = 1, \kappa'(t_0) = 0$, $\kappa''(t_0) > 0$ と $\kappa''(t_0) \neq \frac{\tau^2(t_0)}{2}$ を満たすことである。

(5) 点 (t_0, μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のホロ円的曲面 HC とカスプ唇が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa(t_0) = 1, \kappa'(t_0) = 0$, と $\kappa''(t_0) < 0$ を満たすことである。

ここで、$C\times\mathbb{R}=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2=x_2^3\}$ はカスプ状曲面である。また、$SW=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=3\mu^4+\mu^2v, x_2=4\mu^3+2\mu v, x_3=v\}$ はツバメの尾である。$CBK=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=v, x_2=-2u^3+v^2u, x_3=3u^4-v^2u^2\}$ はカスプくちばしである。$CLP=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1=v, x_2=2u^3+v^2u, x_3=3u^4+v^2u^2\}$ はカスプ唇である。HC の特異点と不変量 $\sigma_h^{\pm}$ 関する幾何学的意味は §6 で述べる。

一方、この論文では, 曲線 $\boldsymbol{l}$ のド・ジッターホロ円的曲面を以下のように定義する：

$$DC: I\times\mathbb{R}\longrightarrow S_1^3; DC(t,\mu)=\boldsymbol{e}_1(t)-\mu\boldsymbol{e}_2(t)-\frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t))$$

そして曲面 $\kappa(t)>-1$ のときの特異点を調べるために不変量 $\sigma_d^{\pm}(t)$ を以下のように定義する：

$$\sigma_d^{\pm}(t)=\kappa'(t)\pm\sqrt{\kappa(t)+1}\tau(t)$$

定理 2. $\boldsymbol{l}: I\longrightarrow LC^*$ を光錐空間的単位速度曲線で $\kappa(t)\geq -1$ とする。このとき、以下が成り立つ。

(1) 点 (t_0,μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のド・ジッターホロ円的曲面 DC の特異点であるための必要十分条件は, $\mu_0=\pm\sqrt{\kappa(t_0)+1}$ を満たすことである。

(2) 点 (t_0,μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のド・ジッターホロ円的曲面 DC とカスプ状曲面 $C\times\mathbb{R}$ が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\mu_0=\pm\sqrt{\kappa(t_0)+1}$ かつ $\sigma_d^{\pm}(t_0)\neq 0$ を満たすことである。

(3) 点 (t_0,μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のド・ジッターホロ円的曲面 DC とツバメの尾 SW が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa(t_0)>-1, \mu_0=\pm\sqrt{\kappa(t_0)+1}$, $\sigma_d^{\pm}(t_0)=0$ かつ $\sigma_d'^{\pm}(t_0)\neq 0$ を満たすことである。

(4) 点 (t_0,μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のド・ジッターホロ円的曲面 DC とカスプくちばしが局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa(t_0)=-1, \kappa'(t_0)=0$, $\kappa''(t_0)>0$ と $\kappa''(t_0)\neq\frac{\tau^2(t_0)}{2}$ を満たすことである。

(5) 点 (t_0,μ_0) で曲線 $\boldsymbol{l}$ のド・ジッターホロ円的曲面 DC とカスプ唇が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa(t_0)=-1, \kappa'(t_0)=0$, と $\kappa''(t_0)<0$ を満たすことである。

定理 1 は Takizawa-Tsukada[2] によって得られた分類定理の言いかえである。

4 ルジャンドル双対性

この章では接触多様体とそのルジャンドル部分多様体に関する性質を紹介する。N を $(2n+1)$ 次元多様体として、K を N 上の接超平面場とする。K は局所的にはある 1-形式 α の核として表されるが、この接超平面場 K が非退化であるとは N の各点で条件 $\alpha\wedge(d\alpha)^n\neq 0$ を満たすことである。このとき、(N,K) は**接触多様体**であると言う、さらに K を**接触構造**、α を**接触形式**と呼ぶ。$\phi: N\longrightarrow N'$ を接触多様体 (N,K) と (N',K') の間の微分可能写像とする。ϕ が**接触微分同相写像**であるとは $d\phi(K)=K'$ を満たすこととして、接触微分同相写像が存在するとき、(N,K) と (N',K') は**接触微分同相**であると言う。接触多様体 (N,K) の部分多様体 $i: L\subset N$ が**ルジャンドル部分多様体**であるとは、$\dim L=n$ であり任意の点 $x\in L$ において $di_x(T_xL)\subset K_{i(x)}$ という条件を満たすことである。また、滑らかなファイバー束 $\pi: E\longrightarrow M$ が**ルジャンドルファイバー束**であるとは、その全空間 E が接触多様体でファイバーが全てルジャンドル部分多様体であることである。さらに、全空間のルジャンドル部分多様体 $i: L\subset E$ が与えられた場合、その射影 $\pi\circ i: L\longrightarrow M$ を**ルジャンドル写像**、$\pi\circ i$ の像を L の**波面集合**と呼び $W(L)$ と表す。

この論文に使われる双対性の概念は参考文献 [3] から引用した。擬球面 $H^n(-1)$, S_1^n と LC^* の積空間の部分集合 $\triangle_i, i=1,\ldots,4$ に対して、4 種類の 2 重ルジャンドルファイバー束がある。そのなかで本論文に必要な 2 重ルジャンドルファイバー束は以下の 3 種類である：

(1) (a) $H^3(-1)\times S_1^3\supset\triangle_1=\{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\mid\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=0\}$
    (b) $\pi_{11}:\triangle_1\longrightarrow H^3(-1)\quad\pi_{12}:\triangle_1\longrightarrow S_1^3$
    (c) $\theta_{11}=\langle d\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle|_{\triangle_1}\quad\theta_{12}=\langle\boldsymbol{v},d\boldsymbol{w}\rangle|_{\triangle_1}$

(2) (a) $H^3(-1)\times LC^*\supset\triangle_2=\{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\mid\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=-1\}$
    (b) $\pi_{21}:\triangle_2\longrightarrow H^3(-1)\quad\pi_{22}:\triangle_2\longrightarrow LC^*$
    (c) $\theta_{21}=\langle d\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle|_{\triangle_2}\quad\theta_{22}=\langle\boldsymbol{v},d\boldsymbol{w}\rangle|_{\triangle_2}$

(3) (a) $LC^*\times S_1^3\supset\triangle_3=\{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\mid\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=1\}$
    (b) $\pi_{31}:\triangle_3\longrightarrow LC^*\quad\pi_{32}:\triangle_3\longrightarrow S_1^3$
    (c) $\theta_{31}=\langle d\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle|_{\triangle_3}\quad\theta_{32}=\langle\boldsymbol{v},d\boldsymbol{w}\rangle|_{\triangle_3}$

ただし、$\pi_{i1}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}$ と $\pi_{i2}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}$ $(i=1,2,3)$ 定義として,1-形式は $\langle d\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=-w_0dv_0+\sum_{i=1}^3 w_idv_i$ と $\langle\boldsymbol{v},d\boldsymbol{w}\rangle=-v_0dw_0+\sum_{i=1}^3 v_idw_i$ で与えられる。定義から $\triangle_i$ 上の 1-形式 θ_{i1} と θ_{i2},$(i=1,2,3)$ は $\triangle_i$ 上の同じ接超平面場を定めそれを K_i と表す。そして、上の空間について以下の双対性定理が成り立つ。

定理 3. *Izumiya-[3]* それぞれの $(\triangle_i,K_i)$ $(i=1,2,3,)$ は接触多様体であり、射影 π_{ij} $(i=1,2,3,j=1,2)$ はルジャンドルファイバー束となる。さらに、それぞれの接触多様隊はお互いに接触微分同相である。

ルジャンドル部分多様体 $i:L\longrightarrow\triangle_i$, $i=1,2,3$ に対して $\pi_{i1}(i(L))$ と $\pi_{i2}(i(L))$ は $\triangle_i$ 双対であると言う。そして、以下の曲線 $\boldsymbol{l}$、ホロ円的曲面 HC、ド・ジッターホロ円的曲面 DC の双対性が成り立つ。

定理 4. $\boldsymbol{l}:I\longrightarrow LC^*$ を光錐空間的の単位速度曲線とする。以下が成り立つ：

(1) $HC(t,\mu)$ と $DC(t,\mu)$ は $\triangle_1$ 双対である。
(2) $HC(t,\mu)$ と $\boldsymbol{l}(t)$ は $\triangle_2$ 双対である。
(3) $\boldsymbol{l}(t)$ と $DC(t,\mu)$ は $\triangle_3$ 双対である。

証明. (1) 写像 $L_1:I\times J\longrightarrow H^3(-1)\times S_1^3$ を $L_1(t,\mu)=(HC(t,\mu),DC(t,\mu))$ と定義する。定義から $\langle HC(t,\mu),DC(t,\mu)\rangle=0$ になる。従って、$L_1(I\times J)\subset\triangle_1$ が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1(t,\mu)}{\partial\mu}&=(\frac{\mu}{2}\tau(t)(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t))+\frac{1}{2}\tau(t)\boldsymbol{e}_2(t)+(\frac{1}{2}-\frac{\kappa(t)}{2}+\frac{\mu^2}{2})\boldsymbol{e}_3(t),\\&-\frac{\mu}{2}\tau(t)(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t))-\frac{1}{2}\tau(t)\boldsymbol{e}_2(t)+(\frac{1}{2}+\frac{\kappa(t)}{2}-\frac{\mu^2}{2})\boldsymbol{e}_3(t))\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_1(t,\mu)}{\partial t}=(\boldsymbol{e}_2(t)+\mu(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t)),-\boldsymbol{e}_2(t)-\mu(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t)))$$

となる。ここで $\frac{\partial L_1(t,\mu)}{\partial t}$ と $\frac{\partial L_1(t,\mu)}{\partial\mu}$ は一次従属と仮定すると、$n\frac{\partial L_1(t,\mu)}{\partial t}=\frac{\partial L_1(t,\mu)}{\partial\mu}(n\in\mathbb{R})$ が成り立つことから $n=0$ となる。ここで、$\frac{\partial L_1(t,\mu)}{\partial\mu}\neq0$ と $n=0$ は矛盾である。従って $\frac{\partial L_1(t,\mu)}{\partial t}$ と $\frac{\partial L_1(t,\mu)}{\partial\mu}$ は一次独立である。故に L_1 ははめ込みとなり $dimL_1(I\times J)=2$ になる。また $L_1(I\times J)$ の 1-形式 θ_{11} の制限は：

$$\begin{aligned}L_1^*\theta_{11}=\langle dHC(t,\mu),DC(t,\mu)\rangle&=\langle\frac{\partial HC}{\partial t}dt+\frac{\partial DC}{\partial\mu}d\mu,DC\rangle\\&=\langle\frac{\partial HC}{\partial t},DC\rangle dt+\langle\frac{\partial DC}{\partial\mu},DC\rangle d\mu=0\end{aligned}$$

となり、$L_1(I\times J)$ は $\triangle_1$ のルジャンドル部分多様体である。従って (1) が成り立つ。

(2) 写像 $L_2 : I \times J \longrightarrow H^3(-1) \times LC^*$ を $L_2(t,\mu) = (HC(t,\mu), \boldsymbol{l}(t))$ と定義する。定義から、$\langle HC(t,\mu), \boldsymbol{l}(t)\rangle = \langle \boldsymbol{e}_0(t) + \mu\boldsymbol{e}_2(t) + \frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{e}_0(t) + \boldsymbol{e}_1(t)), \boldsymbol{e}_0(t) + \boldsymbol{e}_1(t)\rangle = -1$ になる。従って、$L_2(I \times J) \subset \triangle_2$ が成り立つ。写像 $\Psi_{12} : \triangle_1 \longrightarrow \triangle_2$ を $\Psi_{12}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ と定義する。$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\rangle = -1$ になるから、写像 Ψ_{12} は well-defined である。$\triangle_1$ の 1-形式 $\Psi_{12}^*\theta_{21}$ を計算すると、

$$\Psi_{12}^*\theta_{21} = \langle d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\rangle = \langle d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = \theta_{11}$$

となる。また Ψ_{12} の逆写像 $\Psi_{21} : \triangle_2 \longrightarrow \triangle_1$ は $\Psi_{21}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})$ となる。$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\rangle = 0$ であるから写像 Ψ_{21} は well-defined である。$\triangle_2$ の 1-形式で $\Psi_{12}^*\theta_{21}$ を計算すると、

$$\Psi_{21}^*\theta_{12} = \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{w} - d\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{w}\rangle = \theta_{21}$$

となる。従って Ψ_{12} は $\triangle_1$ から $\triangle_2$ の接触微分同相である。定義によって $\Psi_{12} \circ L_1 = L_2$ があるから、$L_2(I \times J)$ は $\triangle_1$ のルジャンドル部分多様体である。従って (2) が成り立つ。

(3) 写像 $\Psi_{13} : \triangle_1 \longrightarrow \triangle_3$ を $\Psi_{13}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$ と定義する。(2) と同様の計算をすると、Ψ_{13} は $\triangle_1$ から $\triangle_3$ の接触微分同相になる。また定義によって、$\Psi_{13} \circ L_1 = (\boldsymbol{l}(t), DC(t,\mu))$ である。従って $(\boldsymbol{l}(t), DC(t,\mu))(I \times J)$ は $\triangle_3$ のルジャンドル部分多様体である。従って (3) が成り立つ。

□

5 光錐内の双曲的高さ関数とド・ジッター高さ関数

この章では, 光錐内の曲線の不変量を研究するために重要な関数を導入する。$\boldsymbol{l} : I \longrightarrow LC^*$ を空間的単位速度曲線とする。関数 $H^h : I \times H_1^3(-1) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $H^h(t,\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{v}\rangle + 1$ と定義する。関数 H^h を双曲的高さ関数と呼ぶ。任意の $\boldsymbol{v}_0 \in H_1^3(-1)$ にとって $h_{\boldsymbol{v}_0}(\mathrm{t}) = H^h(t, \boldsymbol{v_0})$ とする。この時, 以下の命題が成り立つ。

命題 3. 光錐内の単位速度曲線 $\boldsymbol{l} : I \longrightarrow LC^*$ に対して, 以下が成り立つ：

(1) $h_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, ある $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ が存在し, $\boldsymbol{v_0} = \lambda\boldsymbol{e}_0(t_0) + (\lambda-1)\boldsymbol{e}_1(t_0) + \mu\boldsymbol{e}_2(t_0) + \nu\boldsymbol{e}_3(t_0)$ が成り立つことである。

(2) $h_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h'_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, ある $\mu \in \mathbb{R}$ が存在し, $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{e}_0(t_0) + \frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{e}_0(t_0) + \boldsymbol{e}_1(t_0)) + \mu\boldsymbol{e}_2(t_0)$ が成り立つことである。

(3) $h_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h'_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h''_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{e}_0(t_0) + \frac{\kappa(t_0)-1}{2}(\boldsymbol{e}_0(t_0) + \boldsymbol{e}_1(t_0)) \pm \sqrt{\kappa(t_0)-1}\boldsymbol{e}_2(t_0)$ が成り立つことである。

(4) $h_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h'_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h''_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h'''_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{e}_0(t_0) + \frac{\kappa(t_0)-1}{2}(\boldsymbol{e}_0(t_0) + \boldsymbol{e}_1(t_0)) \pm \sqrt{\kappa(t_0)-1}\boldsymbol{e}_2(t_0)$ かつ $\sigma_h^{\pm}(t_0) = 0$ が成り立つことである。

(5) $h_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h'_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h''_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h'''_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = h^{(4)}_{\boldsymbol{v_0}}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{e}_0(t_0) + \frac{\kappa(t_0)-1}{2}(\boldsymbol{e}_0(t_0) + \boldsymbol{e}_1(t_0)) \pm \sqrt{\kappa(t_0)-1}\boldsymbol{e}_2(t_0)$ かつ $\kappa''(t_0) \pm \sqrt{\kappa(t_0)-1}\tau'(t_0) - \frac{1}{2}\tau^2(t_0) = 0$ $(i,e\ \sigma_h^{\pm}(t_0) = \sigma_h'^{\pm}(t_0) = 0)$ が成り立つことである。

ここで、$\sigma_h(t) = \kappa'(t) \pm \sqrt{\kappa(t)-1}\tau(t)$ である（第３節参照）

証明. $h_{\boldsymbol{v_0}}(t) = \langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{v_0}\rangle + 1$ の定義より, 以下の計算式を得る。

(a) $h_{\boldsymbol{v_0}}(t) = \langle \boldsymbol{e}_0(t) + \boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{v_0}\rangle + 1$

(b) $h'_{v_0}(t) = \langle e_3(t), v_0\rangle$
(c) $h''_{v_0}(t) = \langle (\frac{1}{2} - \frac{\kappa(t)}{2})e_0(t) - (\frac{1}{2} + \frac{\kappa(t)}{2})e_1(t), v_0\rangle$
(d) $h'''_{v_0}(t) = \langle -\frac{\kappa'(t)}{2}e_0(t) - \frac{\kappa'(t)}{2}e_1(t) + \frac{\tau(t)}{2}e_2(t) - \kappa(t)e_3, v_0\rangle$
(e) $h^{(4)}_{v_0}(t) = \langle (-\frac{\kappa''(t)}{2} + \frac{\tau^2(t)}{4} - \frac{\kappa(t)}{2} + \frac{\kappa^2(t)}{2})e_0(t) + (-\frac{\kappa''(t)}{2} + \frac{\tau^2(t)}{4} + \frac{\kappa(t)}{2} + \frac{\kappa^2(t)}{2})e_1(t) + \frac{\tau'(t)}{2}e_2(t) + (-\frac{\kappa'(t)}{2} - \kappa'(t))e_3(t), v_0\rangle$

この計算式から以下のように証明される。

(1) $h_{v_0}(t) = \langle e_0(t) + e_1(t), v_0\rangle + 1 = 0$ より (1) が成り立つ。

(2) $h_{v_0}(t) = h'_{v_0}(t) = 0$ から $\nu = 0$ を得る。または $v_0 \in H^3_1(-1)$ から $\lambda = 1 + \frac{\mu^2}{2}$ を得る。従って (2) が成り立つ。

(3) $h_{v_0}(t_0) = h'_{v_0}(t_0) = h''_{v_0}(t_0) = 0$ から $\kappa(t_0) = 1 + \mu^2$ を得る。従って (3) が成り立つ。

(4) $h_{v_0}(t_0) = h'_{v_0}(t_0) = h''_{v_0}(t_0) = h'''_{v_0}(t_0) = 0$ から $\kappa'(t_0) \pm \sqrt{\kappa(t_0) - 1}\tau(t_0) = 0$ を得る。不変量を与えると $\sigma_h(t)$ の定義から (4) が成り立つ。

(5) $h_{v_0}(t_0) = h'_{v_0}(t_0) = h''_{v_0}(t_0) = h'''_{v_0}(t_0) = h^{(4)}_{v_0}(t_0) = 0$ から $\kappa''(t_0) \pm \sqrt{\kappa(t_0) - 1}\tau'(t_0) - \frac{1}{2}\tau^2(t_0) = 0$ になる。言い換えると $\sigma'^{\pm}_h(t_0) = \sigma^{\pm}_h(t_0) = 0$ となる。従って (5) が成り立つ。

□

関数 $H^d : I \times S^3_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $H^d(t, v) = \langle l(t), v\rangle - 1$ と定義する。関数 H^d をド・ジッター高さ関数と呼ぶ。任意の $v_0 \in S^3_1$ に対して $d_{v_0}(t) = H^d(t, v_0)$ とする。このとき以下の命題が成り立つ。

命題 4. 曲線 $l : I \longrightarrow LC_+$ を光錐内の単位速度曲線とする。以下が成り立つ。

(1) $d_{v_0}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, ある $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ が存在し, $v_0 = \lambda e_0(t_0) + (\lambda+1)e_1(t_0) + \mu e_2(t_0) + \nu e_3(t_0)$ が成り立つことである。

(2) $d_{v_0}(t_0) = d'_{v_0}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, ある $\mu \in \mathbb{R}$ が存在し, $v_0 = e_1(t_0) - \frac{\mu^2}{2}(e_0(t_0) + e_1(t_0))) - \mu e_2(t_0))$ が成り立つことである。

(3) $d_{v_0}(t_0) = d'_{v_0}(t_0) = d''_{v_0}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, $v_0 = e_1(t_0) - \frac{\kappa(t_0)+1}{2}(e_0(t_0) + e_1(t_0)) \mp \sqrt{\kappa(t_0) + 1}e_2(t_0)$ が成り立つことである。

(4) $d_{v_0}(t_0) = d'_{v_0}(t_0) = d''_{v_0}(t_0) = d'''_{v_0}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, $v_0 = e_1(t_0) - \frac{\kappa(t_0)+1}{2}(e_0(t_0) + e_1(t_0)) \mp \sqrt{\kappa(t_0) + 1}e_2(t_0)$ かつ $\sigma^{\pm}_d(t_0) = 0$ が成り立つことである。

(5) $d_{v_0}(t_0) = d'_{v_0}(t_0) = d''_{v_0}(t_0) = d'''_{v_0}(t_0) = h^{(4)}_{v_0}(t_0) = 0$ を満たすための必要十分条件は, $v_0 = e_1(t_0) - \frac{\kappa(t_0)+1}{2}(e_0(t_0) + e_1(t_0) \mp \sqrt{\kappa(t_0) + 1}e_2(t_0)$ かつ $\kappa''(t_0) \pm \sqrt{\kappa(t_0) + 1}\tau'(t_0) - \frac{1}{2}\tau^2(t_0) = 0$ $(i, e\ \sigma^{\pm}_d(t_0) = \sigma'^{\pm}_d(t_0) = 0)$ が成り立つことである。

ここで、$\sigma^{\pm}_d(t) = \kappa'(t) \pm \sqrt{\kappa(t) + 1}\tau(t) = 0$ である。(第３節参照)

証明. 命題３と同じ方法により証明できるので省略する。 □

定理１と２を証明するために関数芽の開折に関する特異点理論を紹介する。$F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (s_0, x_0)) \longrightarrow \mathbb{R}$ を関数芽とする。$f(s) = F_{x_0}(s, x_0)$ を満たすとき, F を f の r 次元開折と呼ぶ。f が s_0 で A_k 型特異点を持つとは $f^{(p)}(s_0) = 0 (1 \leq p \leq k)$ かつ $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ が成り立つときを言う。f が s_0 で少なくとも A_k 型特異点を持つとは $f^{(p)}(s_0) = 0 (1 \leq p \leq k)$ が成り立つことを言う。F を f の開折, $f(s)$ が s_0 で A_k 型特異点を持つとする, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ は s_0 に $(k-1)$ までテイラー展開すると, $(k-1)$ ージェットは

$j^{(k-1)}\frac{\partial F}{\partial x_i}(s,x_0)=\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_{ji}(s-s_0)^j (i=1,\cdots,r)$ となる。このとき $k\times r$ 行列 (α_{ji}) のランクが $k(k\leq r)$ のとき F を普遍開折と呼ぶ。
判別集合は開折理論における重要な集合である。開折 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r,(s_0,x_0))\longrightarrow\mathbb{R}$ に対して,

$$D_F=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^r \mid \text{ある } s \text{ が存在し}, F(s,\boldsymbol{x})=\frac{\partial F}{\partial s}(s,\boldsymbol{x})=0 \text{ になる }\}$$

と定義し, F の判別集合と呼ぶ。命題 3, (1),(2) により, 双曲的高さ関数の判別集合は $HC:I\times\mathbb{R}\longrightarrow H^3_+(-1)$, $HC(t,\mu)=\boldsymbol{e}_0(t)+\mu\boldsymbol{e}_2(t)+\frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t))$ の像に一致する。この曲面をホロ円的曲面と呼ぶ。また命題 4, (1),(2) により, ド・ジッター高さ関数の判別集合は $DC:I\times\mathbb{R}\longrightarrow S^3_1$, $DC(t,\mu)=\boldsymbol{e}_1(t)-\mu\boldsymbol{e}_2(t)-\frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t))$ の像となり, これをド・ジッターホロ円的曲面と呼ぶ。

定理 5. *Bruce-Giblin[1]* $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r,(s_0,x_0))\longrightarrow\mathbb{R}$ を f の r 次元開折とし, さらに f は s_0 で A_k 型特異点を持つとする。そして, F は f の普遍開折とする。このとき以下が成り立つ。

(1) $k=2$ のとき,D_F と $C\times\mathbb{R}^{r-2}$ は局所微分同相である
(2) $k=3$ のとき,D_F と $SW\times\mathbb{R}^{r-3}$ は局所微分同相である

定理 1 と 2 を証明するために以下の命題 5 と 6 が成り立つことを示す。

命題 5. $\boldsymbol{l}:I\longrightarrow LC^*$ を光錐内の単位速度空間的曲線で $\kappa(t)\geq 1$ を満たすものとする。関数 $H^h: I\times H^3_1(-1)\longrightarrow\mathbb{R}$, を $\boldsymbol{l}(t)$ 上の双曲的高さ関数とする。$h_{\boldsymbol{v_0}}$ が s_0 で A_2 型特異点 $(\kappa(t)\geq 1)$ または A_3 型特異点 $(\kappa(t)>1)$ を持つならば, H^h は $h_{\boldsymbol{v_0}}$ の普遍開折である。

証明. $\mathbb{R}^4_1$ の擬正規直交枠により与えられる基底 $\{\boldsymbol{e}_0(t_0),\boldsymbol{e}_1(t_0),\boldsymbol{e}_2(t_0),\boldsymbol{e}_3(t_0)\}$ を考える。このとき $\mathbb{R}^4_1$ のベクトルは $\boldsymbol{v}=v_0\boldsymbol{e}_0(t_0)+v_1\boldsymbol{e}_1(t_0)+v_2\boldsymbol{e}_2(t_0)+v_3\boldsymbol{e}_3(t_0)$ と書かれるので。単位速度光錐内の空間的曲線 $\boldsymbol{l}$ を $\boldsymbol{l}(t)=x_0(t)\boldsymbol{e}_0(t_0)+x_1(t)\boldsymbol{e}_1(t_0)+x_2(t)\boldsymbol{e}_2(t_0)+x_3(t)\boldsymbol{e}_3(t_0)$ と書き表わす。双曲的高さ関数の定義から

$$H^h(t,\boldsymbol{v})=-v_0x_0(t)+v_1x_1(t)+v_2x_2(t)+v_3x_3(t)$$

となる。$v_0=\sqrt{1+v_1^2+v_2^2+v_3^2}$ より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^h}{\partial v_1}&=-x_0(t)\frac{v_1}{v_0}+x_1(t),\frac{\partial H^h}{\partial v_2}=-x_0(t)\frac{v_2}{v_0}+x_2(t),\frac{\partial H^h}{\partial v_3}=-x_0(t)\frac{v_3}{v_0}+x_3(t)\\
\frac{\partial^2 H^h}{\partial t\partial v_1}&=-x_0'(t)\frac{v_1}{v_0}+x_1'(t),\frac{\partial^2 H^h}{\partial t\partial v_2}=-x_0'(t)\frac{v_2}{v_0}+x_2'(t),\frac{\partial^2 H^h}{\partial t\partial v_3}=-x_0'(t)\frac{v_3}{v_0}+x_3'(t)\\
\frac{\partial^3 H^h}{\partial^2 t\partial v_1}&=-x_0''(t)\frac{v_1}{v_0}+x_1''(t),\frac{\partial^3 H^h}{\partial^2 t\partial v_2}=-x_0''(t)\frac{v_2}{v_0}+x_2''(t),\frac{\partial^3 H^h}{\partial^2 t\partial v_3}=-x_0''(t)\frac{v_3}{v_0}+x_3''(t)
\end{aligned}$$

となる。また命題 3 から,$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_0(t_0)+\frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{e}_0(t_0)+\boldsymbol{e}_1(t_0))+\mu\boldsymbol{e}_2(t_0)$ となるので, 以下の行列を得る.

$$\begin{aligned}
A&=\begin{pmatrix}
-x_0(t)\frac{\mu^2}{\mu^2+2}+x_1(t) & -x_0(t)\frac{2\mu}{\mu^2+2}+x_2(t) & x_3(t)\\
-x_0'(t)\frac{\mu^2}{\mu^2+2}+x_1'(t) & -x_0'(t)\frac{2\mu}{\mu^2+2}+x_2'(t) & x_3'(t)\\
-x_0''(t)\frac{\mu^2}{\mu^2+2}+x_1''(t) & -x_0''(t)\frac{2\mu}{\mu^2+2}+x_2''(t) & x_3''(t)
\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}
-\frac{\mu^2}{\mu^2+2}+1 & -\frac{2\mu}{\mu^2+2} & 0\\
0 & 0 & 1\\
-(\frac{1}{2}-\frac{\kappa}{2})\frac{\mu^2}{\mu^2+2}-\frac{1}{2}-\frac{\kappa}{2} & -(\frac{1}{2}-\frac{\kappa}{2})\frac{2\mu}{\mu^2+2} & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

従って,

(1) h_{v_0} が $l(t_0)$ で A_2 特異点を持ち, $\kappa(t_0) \geq 1$ の場合は, $\mu = \pm\sqrt{\kappa(t_0)-1}$ であり、

$$det\begin{pmatrix} -\frac{\mu^2}{\mu^2+2}+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{\mu^2}{\mu^2+2}+1 = \frac{2}{\kappa(t_0)+1} \neq 0 \tag{2}$$

なので、H^h は $h_{v_0}(t)$ の普遍開折である。

(2) h_{v_0} が $l(t_0)$ で A_3 特異点を持ち, $\kappa(t_0) > 1$ の場合は

$$det\begin{pmatrix} -\frac{\mu^2}{\mu^2+2}+1 & -\frac{2\mu}{\mu^2+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(\frac{1}{2}-\frac{\kappa}{2})\frac{\mu^2}{\mu^2+2}-\frac{1}{2}-\frac{\kappa}{2} & -(\frac{1}{2}-\frac{\kappa}{2})\frac{2\mu}{\mu^2+2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{4\kappa(t_0)\sqrt{\kappa(t_0)-1}}{\kappa(t_0)+1} \neq 0 \tag{3}$$

なので、$rank = 3$ となり、H^h は $h_{v_0}(t)$ の普遍開折である。$\kappa(t_0) = 1$ の場合は $\det A = 0$ となり H^h は $h_{v_0}(t)$ の普遍開折ではない。

□

証明. (定理 1 の証明) 命題 3,(2) から、曲線 l の双曲的高さ関数の判別集合 $\mathcal{D}_{H^h}$ はホロ円的曲面 HC の像であることが分かる。判別集合 $\mathcal{D}_{H^h}$ の特異点は命題 3,(3) から主張 (1) が成り立つ。また、命題 3,(4) と (5) から、以下が成り立つ:

(1) h_{v_0} が $t = t_0$ で A_2 型特異点を持つための必要十分条件は, ($\kappa(t_0) > 1$) のとき $\sigma_h^{\pm}(t_0) = \kappa'(t_0) \pm (\sqrt{\kappa(t_0)-1})\tau(t_0) \neq 0$ が成り立つこと。($\kappa(t_0) = 1$) のとき $\sigma_h^{\pm}(t) = \kappa'(t) \neq 0$ が成り立つこと。

(2) h_{v_0} が $t = t_0$ で A_3 型特異点を持つための必要十分条件は, ($\kappa(t_0) > 1$) のとき $\sigma_h^{\pm}(t_0) = 0, \boldsymbol{v_0} = HC(t_0, \pm\sqrt{\kappa(t_0)-1})$ かつ $\sigma_h'^{\pm}(t_0) \neq 0$ が成り立つこと。($\kappa(t_0) = 1$) のとき $\sigma_h^{\pm}(t_0) = 0$ かつ $\sigma_h'^{\pm}(t_0) = \kappa''(t_0) \neq 0$ が成り立つこと。

こちらと定理 (5) と命題 (5) の結果をまとめて、主張 (2),(3) が成り立つ。 □

命題 6. $l : I \longrightarrow LC^*$ を光錐内の単位速度の空間的曲線で $\kappa(t) \geq -1$ を満たすものとする。関数 $H^d : I \times S_1^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $l(t)$ 上のド・ジッター高さ関数とする。d_{v_0} が s_0 で A_2 型特異点 ($\kappa(t) \geq -1$) または A_3 型特異点 ($\kappa(t) > -1$) を持つならば, H^d は d_{v_0} の普遍開折である。

証明. ここでは、双曲的高さ関数の証明方法と同様にして, 以下の行列を得る：

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\mu^2}{\mu^2-2}-1 & \frac{2\mu}{\mu^2-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(\frac{1}{2}+\frac{\kappa}{2})\frac{\mu^2}{\mu^2-2}+\frac{1}{2}-\frac{\kappa}{2} & (\frac{1}{2}+\frac{\kappa}{2})\frac{-2\mu}{\mu^2-2} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

従って, 命題 5 の証明と同様にして以下が示される：

(1) d_{v_0} が $l(t_0)$ で A_2 型特異点を持ち, $\kappa(t_0) \geq -1$ の場合は H^d は $d_{v_0}(t_0)$ の普遍開折となる。

(2) d_{v_0} が $l(t_0)$ で A_3 型特異点を持ち, $\kappa(t_0) > -1$ の場合は H^d は $d_{v_0}(t_0)$ の普遍開折となる。$\kappa(t_0) = -1$ の場合は $\det A = 0$, から H^d は $d_{v_0}(t_0)$ の普遍開折ではない.

□

証明. (定理 2 の証明)) 命題 4,(2) から、曲線 $\boldsymbol{l}$ のド・ジッター高さ関数の判別集合 $\mathcal{D}_{H^d}$ はド・ジッターホロ円的曲面 DC の像であることが分かる。判別集合 $\mathcal{D}_{H^d}$ の特異点は命題 3, (3) から主張 (1) が成り立つ。また、命題 4, (4) と (5) から、以下が成り立つ:

(1) $d_{\boldsymbol{v}_0}$ が $t = t_0$ で A_2 型特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa(t_0) > -1$ のとき $\sigma_d^{\pm}(t_0) = \kappa'(t_0) \pm (\sqrt{\kappa(t_0)+1})\tau(t_0) \neq 0$ が成り立つこと。$\kappa(t_0) = -1$ のとき $\sigma_d^{\pm}(t_0) = \kappa'(t_0) \neq 0$ が成り立つこと。

(2) $d_{\boldsymbol{v}_0}$ が $t = t_0$ で A_3 型特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa(t_0) > -1$ のとき $\sigma_d^{\pm}(t) = 0, \boldsymbol{v}_0 = DC(t_0, \pm\sqrt{\kappa(t_0)+1})$ かつ $\sigma_d'^{\pm}(t) \neq 0$ が成り立つこと。$\kappa(t_0) = -1$ のとき $\sigma_d^{\pm}(t) = 0$ かつ $\sigma_d'^{\pm}(t) = \kappa''(t_0) \neq 0$ が成り立つこと。

こちらと定理 (5) と命題 (6) の結果をまとめて、主張 (2),(3) が成り立つ。 □

6 光錐空間の曲線の不変量

この章では、曲線 $\boldsymbol{l}$ の不変量 $\sigma_h^{\pm}$ と $\sigma_d^{\pm}$ を使ってホロ円的曲面 HC とド・ジッターホロ円的曲面 DC の特異点の幾何学的性質を調べる。最初は、ホロ円的曲面で $\sigma_h^{\pm} \equiv 0$ の場合を考える。

命題 7. $\boldsymbol{l} : I \longrightarrow LC^*, (\kappa(t) \neq 1)$ を光錐内の単位速度空間的曲線とする。ホロ円的曲面の特異値曲線 $HC(t, \mu(t)) = \boldsymbol{e}_0(t) + \frac{\mu^2(t)}{2}(\boldsymbol{e}_0(t) + \boldsymbol{e}_1(t)) + \mu(t)\boldsymbol{e}_2(t)$, $\mu(t) = \pm\sqrt{\kappa(t)-1}$、に対して、以下は同値である。

(a) $HC(t, \mu(t))$ は定ベクトルである。
(b) $\sigma_h^{\pm}(t) \equiv 0$
(c) $Im(\boldsymbol{l}) \subset E^2(\boldsymbol{v}, -1)$, ただし $\boldsymbol{v}$ は時間的ベクトルである。

証明. $\mu(t) = \pm\sqrt{\kappa(t)-1}$ の仮定から、

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{e}_0(t) + \frac{\kappa(t)-1}{2}(\boldsymbol{e}_0(t) + \boldsymbol{e}_1(t)) \pm \sqrt{\kappa(t)-1}\boldsymbol{e}_2(t)$$

を得る。

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(t) = \frac{\kappa'(t) \pm \sqrt{\kappa(t)-1}\tau(t)}{2}(\boldsymbol{e}_0(t) + \boldsymbol{e}_1(t)) + \frac{\sqrt{\kappa(t)-1}\tau(t) \pm \kappa'(t)}{2\sqrt{\kappa(t)-1}}\boldsymbol{e}_2(t)$$

がある。$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(t) \equiv 0$ になるための必要十分条件は $\sigma_h^{\pm}(t) \equiv \kappa'(t) \pm \sqrt{\kappa'(t)-1}\tau(t) \equiv 0$ である。従って (a)⇔(b) が成り立つ。
また、$\sigma_h^{\pm}(t) \equiv 0$ を仮定すると、$HC(t, \mu(t)) = \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}$ は定ベクトルである。$\langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{v}(t) \rangle = -1$ によって、$Im(\boldsymbol{l}) \subset LC^* \cap HP(\boldsymbol{v}, -1)$ となる。ここで $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}$ は時間的ベクトルであるから (b)⇒(c) が成り立つ。
(b)⇐(c) の場合、$Im(\boldsymbol{l}) \subset E^2(\boldsymbol{v}, -1)$, $\boldsymbol{v}$ は時間的ベクトルと仮定する。このとき, $h_{\boldsymbol{v}}(t) = \langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{v} \rangle + 1 = 0$ を得る。命題 3 の (4) から任意の t について、$h_{\boldsymbol{v}}(t) \equiv h'_{\boldsymbol{v}}(t) \equiv \cdots \equiv h'''_{\boldsymbol{v}}(t) \equiv 0$ になるならば $\sigma_h^{\pm}(t) \equiv 0$ が成り立つ。従って、(b)⇐(c) が成り立つ。 □

または、ド・ジッターホロ円的曲面 DC で $\sigma_d^{\pm} \equiv 0$ の場合を考える。

命題 8. $\boldsymbol{l} : I \longrightarrow LC^*, (\kappa(t) \neq -1)$ を光錐内の単位速度空間的曲線とする。ド・ジッターホロ円的曲面の特異値曲線 $DC(t, \mu(t)) = \boldsymbol{e}_1(t) + \frac{\mu^2(t)}{2}(\boldsymbol{e}_0(t) + \boldsymbol{e}_1(t)) - \mu(t)\boldsymbol{e}_2(t)$, $\mu(t) = \pm\sqrt{\kappa(t)+1}$ に対して、以下は同値

である。

(a) $DC(t,\mu(t))$ は定ベクトルである。

(b) $\sigma_d^{\pm}(t) \equiv 0$

(c) $Im(\boldsymbol{l}) \subset S^2(\boldsymbol{v},1)$, ただし $\boldsymbol{v}$ は空間的ベクトルである。

証明. $\mu(t) = \pm\sqrt{\kappa(t)+1}$ の仮定から、

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{e}_1(t) - \frac{\kappa(t)+1}{2}(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t)) \mp \sqrt{\kappa(t)-1}\boldsymbol{e}_2(t)$$

を得る。

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(t) = \frac{-\kappa'(t) \mp \sqrt{\kappa(t)+1}\tau(t)}{2}(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t)) - \frac{\sqrt{\kappa(t)+1}\tau(t) \pm \kappa'(t)}{2\sqrt{\kappa(t)+1}}\boldsymbol{e}_2(t)$$

がある。$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(t) \equiv 0$ になるための必要十分条件は $\sigma_d^{\pm}(t) \equiv \kappa'(t) \pm \sqrt{\kappa'(t)+1}\tau(t) \equiv 0$ である。従って (a)⇔(b) が成り立つ。
また、$\sigma_d^{\pm}(t) \equiv 0$ を仮定すると、$DC(t,\mu(t)) = \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}$ は定ベクトルである。$\langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle = 1$ によって、$Im(\boldsymbol{l}) \subset LC^* \cap HP(\boldsymbol{v},1)$ となる。ここで $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}$ は空間的ベクトルであるから (b)⇒(c) が成り立つ。
(b)⇐(c) の場合、$Im(\boldsymbol{l}) \subset S^2(\boldsymbol{v},1)$, $\boldsymbol{v}$ は空間的ベクトルと仮定する。このとき, $d_{\boldsymbol{v}}(t) = \langle \boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{v}\rangle - 1 \equiv 0$ を得る。命題 4 の (4) から任意の t について、$d_{\boldsymbol{v}}(t) \equiv d'_{\boldsymbol{v}}(t) \equiv \cdots \equiv d'''_{\boldsymbol{v}}(t) \equiv 0$ になるならば $\sigma_d^{\pm}(t) \equiv 0$ が成り立つ。従って、(b)⇐(c) が成り立つ。 □

上の命題 6,7 を見ると、HC と DC の特異点は曲線 $\boldsymbol{l}$ と楕円的 2 次曲面または双曲的 2 次曲面との接触に関わると考えることができる。沈め込み写像 $F : LC^* \longrightarrow \mathbb{R}$ と、空間的曲線 $\boldsymbol{l} : I \longrightarrow LC^*$ を考える。ここで、曲面 $F^{-1}(0)$ と曲線 $\boldsymbol{l}$ が $t = t_0$ で k 点接触するとは、関数 $g(t) = F \circ \boldsymbol{l}(t)$ に対して、$g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = \cdots = g^{k-1}(t_0) = 0, g^k(t_0) \neq 0$ を満たすこと。また、$F^{-1}(0)$ が $t = t_0$ で曲線 $\boldsymbol{l}$ は少なくとも k 点接触するとは、関数 $g(t) = F \circ \boldsymbol{l}(t)$ に対して、$g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = \cdots = g^{k-1}(t_0) = 0$ を満たすことと定義する。関数 $\mathcal{H} : LC^* \times H^3(-1) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\mathcal{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\rangle$ と定義する。双曲的高さ関数は $H^h(t,\boldsymbol{v}) = \mathcal{H} \circ (\boldsymbol{l} \times 1_{H^3(-1)})$ と書き表される。命題 3 から、以下の命題が成り立つ。

命題 9. $\boldsymbol{v}_0 = HC(t_0,\mu_0)$ に対して、以下が成り立つ：

(1) 曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ が t_0 で楕円的 2 次曲面 $E^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ が少なくとも 2 点接触であるため必要十分条件は、$\mu_0 = \sqrt{\kappa(t_0)-1}$ を満たすことである。このとき $E^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ は接触楕円的 2 次曲面と言う。

(2) 曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ と接触楕円的 2 次曲面 $E^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ が t_0 で 3 点接触するための必要十分条件は、$\mu_0 = \sqrt{\kappa(t_0)-1}$ かつ $\sigma_h^{\pm}(t_0) \neq 0$ を満たすことである。

(3) 曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ と接触楕円的 2 次曲面 $E^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ が t_0 で 4 点接触するための必要十分条件は、$\mu_0 = \sqrt{\kappa(t_0)-1}, \sigma_h^{\pm}(t_0) = 0$ かつ $\sigma_h'^{\pm}(t_0) \neq 0$ を満たすことである。

定理 1 によって、ホロ円的曲面 HC の特異点の分類の幾何学的特徴付けが以下のように得られる。

定理 6. $\boldsymbol{l} : I \longrightarrow LC^*$ を光錐内の単位速度空間的曲線として、$k(t_0) \neq 1$ とする。$\boldsymbol{v}_0 = HC(t_0,\mu_0)$ に対して、以下が成り立つ：

(1) 点 (t_0,μ_0) でホロ円的曲面 HC の特異点であるための必要十分条件は、曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ が t_0 で接触楕円的 2 次曲面 $E^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ を持つことである。

(2) 点 (t_0,μ_0) でホロ円的曲面 HC と $C\times\mathbb{R}$ が局所微分同相であるための必要十分は条件は、曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ が t_0 で接触楕円的 2 次曲面 $E^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ と *3* 点接触することである。

(3) 点 (t_0,μ_0) でホロ円的曲面 HC と SW が局所微分同相であるための必要十分条件は、曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ が t_0 で接触楕円的 2 次曲面 $E^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ と *4* 点接触することある。

また 関数 $\mathcal{D}: LC^*\times S^1_3\longrightarrow\mathbb{R}$ を $\mathcal{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle$ と定義する。ド・ジッター高さ関数は $H^d(t,\boldsymbol{v})=\mathcal{D}\circ(\boldsymbol{l}\times 1_{S^1_3})$ と表示される。命題4から、以下が成り立つ。

命題 10. $\boldsymbol{v}_0=DC(t_0,\mu_0)$ に対して、以下が成り立つ：

(1) 曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ と双曲的 2 次曲面 $H^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ が t_0 で少なくとも *2* 点接触するための必要十分条件は、$\mu_0=\sqrt{\kappa(t_0)+1}$ を満たすことである。このとき $H^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ を**接触双曲的 2 次曲面**と言う。

(2) 曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ と接触双曲的 2 次曲面 $H^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ が t_0 で *3* 点接触するための必要十分条件は、$\mu_0=\sqrt{\kappa(t_0)+1}$ かつ $\sigma_d^{\pm}(t_0)\neq 0$ を満たすことである。

(3) 曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ と接触双曲的 2 次曲面 $H^2(\boldsymbol{v}_0,-1)$ が t_0 で *4* 点接触するための必要十分条件は、$\mu_0=\sqrt{\kappa(t_0)+1}$, $\sigma_d^{\pm}(t_0)=0$ かつ $\sigma_d'^{\pm}(t_0)\neq 0$ を満たすことである。

定理2によって、ド・ジッターホロ円的曲面 DC の特異点の分類の幾何学的特徴付けが以下のように得られる。

定理 7. $\boldsymbol{l}: I\longrightarrow LC^*$ を光錐空間的単位速度曲線として、$k(t_0)\neq -1$ である。$\boldsymbol{v}_0=DC(t_0,\mu_0)$ に対して、以下が成り立つ：

(1) 点 (t_0,μ_0) がド・ジッターホロ円的曲面 DC の特異点であるための必要十分条件は、曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ が t_0 で接触双曲 2 次曲面 $H^2(\boldsymbol{v}_0,1)$ を持つことである。

(2) 点 (t_0,μ_0) でド・ジッターホロ円的曲面 DC と $C\times\mathbb{R}$ が局所微分同相であるための必要十分条件は、曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ と接触双曲的 2 次曲面 $H^2(\boldsymbol{v}_0,1)$ が t_0 で *3* 点接触することである。

(3) 点 (t_0,μ_0) でド・ジッターホロ円的曲面 DC と SW が局所微分同相であるための必要十分条件条件は、曲線 $\boldsymbol{l}(t)$ 接触双曲的 2 次曲面 $H^2(\boldsymbol{v}_0,1)$ が t_0 で *4* 点接触することである。

7 カスプくちばしとカスプ唇

曲面 HC と DC は $\kappa(t_0)=1$ と -1 のとき、それぞれの対応する高さ関数は普遍開折ではないので、Bruce-Gblin の判別法を使えない。ここでは $\kappa(t_0)=1$ と -1 の場合にも特異点を分類するため,[4] における判定法を適用する。Takizawa-Tsukada[2] の定理 5.3 では曲面 HC 特異点の分類が以下の定理として与えられている。

定理 8. *[2]* 点 (t_0,μ_0) は曲面 HC の特異点とする。$\kappa(t_0)=1$ の場合、以下が成り立つ：

(1) 点 (t_0,μ_0) でホロ円的曲面 HC とカスプ状曲面が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa'(t_0)\neq 0$ を満たすことである。

(2) 点 (t_0,μ_0) でホロ円的曲面 HC とカスプくちばしが局所微分同相であるための必要十分条件

は, $\kappa'(t_0)=0$, $\kappa''(t_0)>0$ と $\kappa''(t_0)\neq\frac{\tau^2(t_0)}{2}$ を満たすことである。

(3) 点 (t_0,μ_0) でホロ円的曲面 HC とカスプ唇が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa'(t_0)=0$, と $\kappa''(t_0)<0$ を満たすことである。

このことから, 定理 1 の (4),(5) の主張が証明された。一方、定理 2 の (4),(5) の主張は以下の命題を意味する。

命題 11. 点 (t_0,μ_0) は曲面 DC の特異点とする。$\kappa(t_0)=-1$ の場合、以下のものが成り立つ：

(1) 点 (t_0,μ_0) でド・ジッターホロ円的曲面 DC とカスプ状曲面が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa'(t_0)\neq 0$ を満たすことである。

(2) 点 (t_0,μ_0) でド・ジッターホロ円的曲面 DC とカスプくちばしが局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa'(t_0)=0$, $\kappa''(t_0)>0$ と $\kappa''(t_0)\neq\frac{\tau^2(t_0)}{2}$ を満たすことである。

(3) 点 (t_0,μ_0) でド・ジッターホロ円的曲面 DC とカスプ唇が局所微分同相であるための必要十分条件は, $\kappa'(t_0)=0$, と $\kappa''(t_0)<0$ を満たすことである。

上の命題 11 を証明するために,Izumiya-Saji-Takahashi[4] の論文に従って必要な道具を紹介する。$F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ を関数芽とする。F がモース超曲面族とは、写像芽

$$\Delta^*F\ =\left(\ F,\frac{\partial F}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial q_k}\ \right):(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k,0)$$

が非特異点であること。このとき,$\Sigma_*(F)=\Delta^*F^{-1}(0)$ はなめらかな $(n-1)$ 次元の部分多様体となる。
関数芽 $F,G:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ が P–$\mathcal{K}$– 同値であるとは, 微分同相芽 $\Phi:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,0)$ で $\Phi(q,x)=(\phi(q,x),\psi(x))$ の形をしているものと, 関数芽 $\lambda:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ で $\lambda(0)\neq 0$ を満たすものが存在して, $\lambda(q,x)F(q,x)=G\circ\Phi(q,x)$ が成立することと定義する。

定理 9 ([4],Prop7.5)**.** $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ を A_3 型の関数芽 $f(t)$ の開折とする。4 次元開折 $\tilde{F}(t,\boldsymbol{v},u):(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^4,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ を

$$\tilde{F}(t,\boldsymbol{v},u)=F(t,\boldsymbol{v})+ut^2$$

と定義する。このとき、$\tilde{F}(t,\boldsymbol{v},u)$ が $f(t)$ の $\mathcal{K}$– 普遍開折になるため必要十分条件は $F(t,\boldsymbol{v})$ がモース超曲面族になることである。
注) 一変数関数芽 f の開折については, $\mathcal{K}$– 普遍開折は §5 で定義された普遍開折と同値な概念であることが知られている。

定理 10 ([4],Lemma7.7)**.** *(カスプくちばしとカスプ唇の判別定理)*
$F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ をモース超曲面族として、$f(t)=F(t,0)$ を A_3 型関数芽とする。($\frac{\partial F}{\partial t}\mid_{\sum_*(F)}$) のヘッセ行列 ($Hess=H(\frac{\partial F}{\partial t}\mid_{\Sigma_*(F)})$) に対して, 以下の主張が成り立つ。

(1) $\det Hess<0$ の場合、$F(t,\boldsymbol{v})$ と $t^4-v_1^2t^2+v_2t+v_3$ は $P-\mathcal{K}$– 同値になる。

(2) $\det Hess>0$ の場合、$F(t,\boldsymbol{v})$ と $t^4+v_1^2t^2+v_2t+v_3$ は $P-\mathcal{K}$– 同値になる。

注) $F(t,\boldsymbol{v})=t^4-v_1^2t^2+v_2t+v_3$ の判別集合 D_F はカスプくちばしであり,$F(t,\boldsymbol{v})=t^4+v_1^2t^2+v_2t+v_3$ の判別集合 D_F はカスプ唇である。$P-\mathcal{K}$– 同値に関して以下の事実が成り立つ。

命題 12. $F,G:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ が $P-\mathcal{K}-$ 同値ならば, 微分同相写像芽 $\psi:(\mathbb{R}^r,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^r,0)$ が存在して, $\psi(D_F)=D_G$ が成り立つ。

ここで、ド・ジッター高さ関数 $H^d: I\times S^3_1\longrightarrow\mathbb{R}$ を考える。ただし、$\boldsymbol{l}(t)=\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t)$ である。$H^d(t,\boldsymbol{v})$ が t に関しての偏微分を考える。H^d の判別集合 D_{H^d} は t_0 の近くでホロ円的曲面 $DC(t,\mu)=\boldsymbol{e}_1(t)-\mu\boldsymbol{e}_2(t)-\frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t))$ である。$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{e}_1(t_0)$ と仮定する。そして、命題3の証明によって, 以下の式を得る。

$$\frac{\partial H^d}{\partial t}(t_0,\boldsymbol{v}_0)=0,\quad \frac{\partial^2 H^d}{\partial t^2}(t_0,\boldsymbol{v}_0)=\frac{1}{2}+\frac{\kappa(t_0)}{2},\quad \frac{\partial^3 H^d}{\partial t^3}(t_0,\boldsymbol{v}_0)=\frac{\kappa'(t_0)}{2},$$

また

$$\frac{\partial^4 H^d}{\partial t^4}(t_0,\boldsymbol{v}_0)=-\frac{\kappa''(t_0)}{2}+\frac{\tau^2(t_0)}{4}+\frac{\kappa(t_0)}{2}+\frac{\kappa^2(t_0)}{2}$$

となる。

上の計算に従って, $\kappa(t_0)=-1,\ \kappa'(t_0)=0$ かつ $\kappa''(t_0)\neq\frac{\tau^2(t_0)}{2}$ のとき、$d_{\boldsymbol{v}_0}(t)=H^d(t,\boldsymbol{v}_0)$ が t_0 で A_3 型特異点をもつ。ここに、4次元開折 $\tilde{H}^d: I\times S^3_1\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$\tilde{H}^d(t,\boldsymbol{v},u)=H^d(t,\boldsymbol{v})+u(t-t_0)^2=\langle\boldsymbol{l}(t),\boldsymbol{v}\rangle+u(t-t_0)^2-1$$

と定義する。$\tilde{H}^d$ を点 $(t_0,\boldsymbol{v}_0,0)$ における関数芽と満たす。

補題 2. $\kappa(t_0)=-1,\ \kappa'(t_0)=0$ かつ $\kappa''(t_0)\neq\frac{\tau^2(t_0)}{2}$ のとき、$\tilde{H}^d$ は $d_{\boldsymbol{v}_0}$ の $\mathcal{K}-$ 普遍開折である。

証明. ここで、$\mathbb{R}^4_1$ のローレンツ変換を作用させて、$\boldsymbol{e}_0(t_0)=(1,0,0,0), \boldsymbol{e}_1(t_0)=(0,1,0,0), \boldsymbol{e}_2(t_0)=(0,0,1,0), \boldsymbol{e}_3(t_0)=(0,0,0,1)$ と仮定する。また、パラメーター変換によって $t_0=0$ と仮定する。このとき、$\tilde{H}^d(t,\boldsymbol{v},u)=\langle\boldsymbol{l}(t),\boldsymbol{v}\rangle+ut^2-1$ となる。$\boldsymbol{v}=(v_0,v_1,v_2,v_3)$ と $\boldsymbol{l}(t)=(l_0(t),l_1(t),l_2(t),l_3(t))$ と表すと,

$$\tilde{H}^d(t,\boldsymbol{v},u)=-l_0(t)v_0+l_1(t)v_1+l_2(t)v_2+l_3(t)v_3$$

となる。

S^3_1 の局所座標を $\boldsymbol{v}=(v_0,\sqrt{1+v_0^2-v_2^2-v_3^2},v_2,v_3)$ とする。このとき, 以下の式が成り立つ。

$$\frac{\partial\tilde{H}^d}{\partial v_0}(t,\boldsymbol{v},u)=-l_0(t)+l_1(t)\frac{v_0}{v_1},\ \frac{\partial\tilde{H}^d}{\partial v_2}(t,\boldsymbol{v},u)=l_2(t)-l_1(t)\frac{v_2}{v_1},\ \frac{\partial\tilde{H}^d}{\partial v_3}(t,\boldsymbol{v},u)=-l_3(t)-l_1(t)\frac{v_3}{v_1}$$

$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{e}_1(0)=(0,1,0,0)$ における、$2-jets$ は

$$j^2(\frac{\partial\tilde{H}^d}{\partial v_0}(t,\boldsymbol{v},0))(0)=-l_0(0)-l_0'(0)t-\frac{1}{2}l_0''(0)t^2$$
$$j^2(\frac{\partial\tilde{H}^d}{\partial v_2}(t,\boldsymbol{v},0))(0)=l_2(0)+l_2'(0)t+\frac{1}{2}l_2''(0)t^2$$
$$j^2(\frac{\partial\tilde{H}^d}{\partial v_3}(t,\boldsymbol{v},0))(0)=l_3(0)+l_3'(0)t+\frac{1}{2}l_3''(0)t^2$$
$$j^2(\frac{\partial\tilde{H}^d}{\partial u}(t,\boldsymbol{v},0))(0)=t^2$$

である。ここで行列

$$\begin{pmatrix} -l_0(0) & -l_0'(0) & -l_0''(0)\\ l_2(0) & l_2'(0) & l_2''(0)\\ l_3(0) & l_3'(0) & l_3''(0)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{l}'(0)=\boldsymbol{e}_3(0), \boldsymbol{l}''(0)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\kappa(0))\boldsymbol{e}_0(0)-(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}2\kappa(0))\boldsymbol{e}_1(0)$ なので、以下の行列に一致する。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\kappa(0) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の rank は 3 に等しいことから,$\tilde{H}^d$ は d_{v_0} の普遍開折である。すなわち, $\mathcal{K}-$ 普遍開折である。 □

定理 9 によって、H^d はモース超平面族になる。そして、定理 10 と命題 12 を応用して、命題 11 を証明する。

証明. (1) は命題 6 において証明したため。ここでは省略する。
ここで $\rho(t,\mu)=\frac{\partial^2 H^d}{\partial t^2}|_{\Sigma_*(H^d)}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H^d}{\partial t^2}|_{\Sigma_*(H^d)} &= \langle(\frac{1}{2}-\frac{\kappa(t)}{2})\boldsymbol{e}_0(t)-(\frac{1}{2}+\frac{\kappa(t)}{2})\boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_1(t)-\mu\boldsymbol{e}_2(t)-\frac{\mu^2}{2}(\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{e}_1(t))\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\mu^2-\kappa(t)-1)\end{aligned}$$

となり, $\rho(t,\mu)$ の $(0,t_0)$ でのヘッセ行列は

$$Hess(\rho)(0,t_0) \ = \begin{pmatrix} \frac{\kappa''(t_0)}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。従って, $\kappa''(t_0)>0, \kappa(t_0)=-1, \kappa'(t_0)=0$ かつ $\kappa''(t_0)\neq\frac{\tau^2(t_0)}{2}$ のとき、DC とカスプくちばしが局所微分同相となる。また $\kappa''(t_0)<0, \kappa(t_0)=-1, \kappa'(t_0)=0$ のとき、DC とカスプ唇が局所微分同相となる。 □

参考文献

[1] J.W BRUCE AND P.J GIBLIN: Curves and singularities(second edition), Cambridge University press,1992

[2] Chie TAKIZAWA and Kazumi TSUKADA: Horocyclic surfaces in hyperboloc 3-space, Kyushu J. Math, 64(2009) 269-284

[3] S.IZUMIYA: Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone, Moscow Mathematical Journal, 9(2009) 325-357

[4] S.IZUMIYA ,K.SAJI,M,TAKAHASHI: Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space, J. Math. Soc. Japan Vol.62. No.3(2010) 789-849