数理解析研究所講究録
第2050巻 2017年 24-40

計算可能前構造と横山吉川の性質

日本大学工学部　樋口　幸治郎 *
Kojiro Higuchi
College of Engineering, Nihon University

木更津工業高等専門学校　倉橋　太志 †
Taishi Kurahashi
National Institute of Technology, Kisarazu College

1　序論

論文 [5] において, 横山と吉川は, 1 階古典述語論理上の理論が本質的決定不可能であることと, Rice 性を持つこととが同値であることを示した. ここで理論 T が **Rice 性**を持つとは, T 上の文の計算可能集合で T 上同値な文に閉じているものは自明な集合 (つまり, 文全体か, 又は, 空集合) に限ることを言う. 従って, 理論が本質的決定不可能であれば, その理論上の真偽に関する如何なる非自明な性質も決定不可能になる. この定理における, 本質的不可能性と Rice 性とが同値になる, という性質を**横山吉川の性質** (又は, **YY 性**) と呼ぶことにすれば, これは計算可能前構造, すなわち, 計算可能構造 $\mathcal{A}$ とその上の合同関係 $\equiv$ との対, についての性質とみなすことができる. 横山吉川の定理は, 実質的に計算可能前ブール代数が横山吉川の性質を持つことを示している. この論文の主目的は, YY 性の性質を明らかにすること, また, 如何なる計算可能前構造が横山吉川の性質を持つかを解明することである. 後者についての結果の一例は表 1 に挙げている通りで, ブール代数の

表 1: 理論と横山吉川の性質

YY 性を持つ理論	弱 YY 性を持たない理論
半束, 分配束, ハイティング代数, ブール代数	群, 環, 体

他, 半束やその他の多くの束構造の計算可能前構造が横山吉川の性質を持つことが示される. 一方で, 群, 環, 体の計算可能前構造は, 一般には, 横山吉川の性質はおろか, それを弱めた形の性質 (横山吉川の弱性質) すら持たない. しかしながら, この場合でも, 計算可能

*higuchi.koujirou@nihon-u.ac.jp
†kurahashi@n.kisarazu.ac.jp

前有限構造であるときや, 或いは, 整数環 $\mathbb{Z}$ が満たすような良い性質を持つ場合には, 横山吉川の性質を持つことが示される.

論文の構成について説明しよう. 2節では, 計算可能前構造の説明を行う. 3節では, 計算可能前構造の性質として, 本質的決定不可能性や Rice 性の定義を与える. また, 言語 L が関係記号を含む場合の計算可能前 L 構造は, 関係記号の解釈が非自明であれば Rice 性を持たないことを示す. 4節では, 横山吉川の性質と弱性質, 及び, 極大拡張性の定義を与え, 相互関係を明らかにする. また, 任意の計算可能前有限構造は必ず横山吉川の性質を持つことを示す. 5節では, 表1に現れる (代数としての) 理論のように, 正文 (つまり否定 $\neg$ も含意 $\rightarrow$ も含まない文) により公理化可能な理論 (これを**正論**と呼ぶ) についての性質を探求する. 6節では, 表1の結果や, 半束に否定演算 $\neg$ を加えた理論や, 整数環 $\mathbb{Z}$ のように可逆元が有限個の単項イデアル整域の計算可能前構造は横山吉川の性質を持つことを示す.

2節以降に必要となる予備知識や用語法について, ここにまとめる. この論文では, 1階 (古典) 述語論理や計算可能性理論 (再帰理論とも言う) に関する基礎知識を読者に仮定する. 必要あらば文献 [1, 2, 3, 4] を参照されたい. その他, 以下の定義を, 論文中, 自由に用いる. 言語 L を, 関数記号, 関係記号の集合と同一視し, 言語 L の理論 T を公理となる文の集合と同一視する. 関数/関係記号にはそれぞれ引数 $n \geq 0$ が付与されており, n 変数, 又は, n 項関数/関係記号と呼ぶ. 0項関数記号は**定数記号**とも言う. 言語 L, L' が $L \supset L'$ であるとき, L 構造 $\mathcal{A}$ の記号の解釈を言語 L' に制限して得られる L' 構造を $\mathcal{A} \restriction L'$ と書き, $\mathcal{A}$ の L' への**縮約**という. L 構造 $\mathcal{A}$ について, $|\mathcal{A}|$ の各元 a に対応してそれぞれ新しく定数記号 c_a(誤解の恐れがなければ $a = c_a$ とみなす) を導入した言語を $L(\mathcal{A})$ と書く. 自然に解釈を拡張して, $\mathcal{A}$ は $L(\mathcal{A})$ 構造とみなせる. L 構造 $\mathcal{A}$ 上の2項関係 $\equiv$ が L **合同関係**であるとは, $\equiv$ は同値関係, かつ, 言語 L に含まれる全ての関数/関係記号の解釈が $\equiv$ を保つことを言う. L 構造 $\mathcal{A}$ とその上の L 合同関係 $\equiv$ に対して, 同値類の集合に自然に導入される L 構造, すなわち**剰余構造** $\mathcal{A}/\equiv$ が定義できる. 同値類を対応させる $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}/\equiv$ への上への関数を, **(自然な) 射影**と言い, これは L **準同型写像**, すなわち, L に含まれる関数/関係記号の解釈を保つ写像になる. 関係記号を持たない言語の構造を**代数 (構造)** と言う. 言語 L の**理論** T **が計算可能**とは, T の記号や文 σ に, ゲーデル数 $\ulcorner\sigma\urcorner$ が割り当てられていて, $\ulcorner T\urcorner$ が計算可能集合になることを言う. 以後は, 誤解を恐れず, 記号や文 σ と対応する自然数 $\ulcorner\sigma\urcorner$ を同一視する. T が計算可能な理論のときは, 特に, **言語** L **は計算可能**である, つまり, L は集合として計算可能であり, かつ, 各記号の引数を与える関数も計算可能である. 計算可能理論 T の定理全体の集合が計算可能であるとき, T は**決定可能**であると言い, そうでないとき**決定不可能**であると言う. 計算可能言語 L について, L **構造** $\mathcal{A}$ **が計算可能**であるとは, その領域 $|\mathcal{A}| \subset \omega$ が計算可能であり, また, 言語 L の各記号 S の構造 $\mathcal{A}$ での解釈 $S^{\mathcal{A}}$ が, S について一様に計算可能な関数や関係となっている構造 (又は, これと同型な構造) となっていることを言う.

2 計算可能前構造

ある論理上の理論の研究や次数構造の研究など, 数理論理学の分野において, 計算可能構造とその上の合同関係を通じて, 通常計算不可能な剰余構造 (又は, それの同型構造) の

性質を探求することは多い. このような計算可能構造と合同関係の対を, その剰余構造の計算可能前構造と呼ぶことにする.

定義 2.1 (計算可能前構造). 言語 L の計算可能構造 $\mathcal{A}$ とその上の合同関係 $\equiv_{\mathbb{A}}$ の対 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ を剰余構造 $\mathcal{A}/\equiv_{\mathbb{A}}$(或いは, その同型構造) の**計算可能前 L 構造**, 又は, **計算可能擬 L 構造**と言う. [1] $L' \subset L$ に対し, $\mathbb{A} \upharpoonright L'$ を $(\mathcal{A} \upharpoonright L', \equiv_{\mathbb{A}})$ と定義する. 剰余構造 $\mathcal{A}/\equiv_{\mathbb{A}}$ が理論 T のモデルであるとき, $\mathbb{A}$ を**理論 T の計算可能前モデル**と言う.

計算可能前構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ の定義において, 合同関係 $\equiv_{\mathbb{A}}$ は計算可能でなくてもよいことを注意しておく. $\equiv_{\mathbb{A}}$ が計算可能であるとき, $\mathbb{A}$ は**決定可能**と言う.

例 2.2. 集合を空言語の構造とみなす. 自然数全体の集合 ω の上の同値関係 $\equiv_{\mathrm{comp}}$ を

$$e \equiv_{\mathrm{comp}} k \iff \varphi_e = \varphi_k$$

と定義する. 但し, φ_e は e 番目の計算可能部分関数を表すものとする. このとき, $(\omega, \equiv_{\mathrm{comp}})$ は計算可能前集合である.

例 2.3. 自然数全体の集合 ω の上の同値関係 $\equiv_{\mathrm{ce}}$ を

$$e \equiv_{\mathrm{ce}} k \iff W_e \equiv_{\mathrm{Turing}} W_k$$

と定義する. 但し, W_e は e 番目の計算的枚挙可能集合 (r.e. 集合, c.e. 集合, 又は, Σ^0_1 集合とも言う) を表し, $\equiv_{\mathrm{Turing}}$ はチューリング同値性を表す. このとき, $((\omega; \oplus), \equiv_{\mathrm{ce}})$ は, チューリング次数全体のなす上半束構造の計算可能前部分構造である.

計算可能性理論での次数構造の研究は, チューリング次数構造だけではなく, Medvedev 次数構造や Muchnik 次数構造 ([14] を見よ) や Weihrauch 次数構造 ([7] を見よ) など, 様々な次数構造が研究されている. 上記の例の他にも, これらの次数構造の幾つもの興味深い部分構造は, 自然に計算可能前構造とみなすことができ, その多くは束構造の計算可能前構造となる.

例 2.4. 1 階古典述語論理において, 言語 L の計算可能な理論 T に対し, L の文全体の計算可能 $\{\wedge, \vee, \neg, \top, \bot\}$ 構造 $\mathrm{Sent}(L)$ の上の同値関係 $\equiv_T$ を

$$\varphi \equiv_T \psi \iff T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

と定義する. このとき, $\mathbb{L}_T = (\mathrm{Sent}(L), \equiv_T)$ は理論 T のリンデンバウム代数の計算可能前ブール代数である.

この例に関しては, 古典論理に限る必要はなく, 非古典論についてもリンデンバウム代数の計算可能前構造を考えることができる.

計算可能構造の分野において, 計算可能前構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ に対し, $\equiv_{\mathbb{A}}$ が r.e. 関係であるとき, $\mathcal{A}/\equiv_{\mathbb{A}}$ は**半計算可能構造**と呼ばれ, このような対象についてはよく研究されてきた. (文献 [10, 18] を見よ.) 例 2.4 でのリンデンバウム代数は半計算可能構造の前構造である. しかし, 例 2.2, 例 2.3 に現れる計算不可能構造は, 半計算可能な構造ではない.

[1]著者は, 以前, この概念を computably represented structure(計算的に表現可能な構造) と呼んでいたが, この名称は別の概念に用いられていることを Bakhadyr Khoussainov 先生に指摘された. そこで名称を上記の如く変更した. ここに同氏への謝意を表します.

定義 2.5 (前関係, 前関数). 計算可能前 L 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ について, $\equiv_{\mathbb{A}}$ を保存する $\mathcal{A}$ 上の関係 R や関数 F は, 剰余構造 $\mathcal{A}/\equiv_{\mathbb{A}}$ 上に, 自然に関係 $R/\equiv_{\mathbb{A}}$ や関数 $F/\equiv_{\mathbb{A}}$ を定めるが, このとき, 前関係 R や前関数 F は, 関係 $R/\equiv_{\mathbb{A}}$ や関数 $F/\equiv_{\mathbb{A}}$ の**前関係, 前関数**であると言う. 1 項関係を集合と同一視して, 前 1 項関係を**前集合**と言い, また, これを**インデックス集合**とも言う. 幾つかの計算可能前 L 構造の間の関係や, 二つの計算可能前 L 構造の間の関数についても, 前関係, 前関数を同様に定義する. 二つの計算可能前 L 構造 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ の間の前関数 φ が, 前 L 準同型であるとき, $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ と書く.

関数 $f : |\mathcal{A}/\equiv_{\mathbb{A}}| \to |\mathcal{B}/\equiv_{\mathbb{B}}|$ の前関数 $\varphi : |\mathcal{A}| \to |\mathcal{B}|$ とは, $\pi_{\mathbb{A}}, \pi_{\mathbb{B}}$ をそれぞれ $\equiv_{\mathbb{A}}, \equiv_{\mathbb{B}}$ から定まる自然な射影として, $f \circ \pi_{\mathbb{A}} = \pi_{\mathbb{B}} \circ \varphi$ を満たす関数であることと同値である. 前 L 準同型 $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への L 準同型であることを必ずしも意味しない.

定義 2.6 (計算的同型性). 二つの計算可能前 L 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}}), \mathbb{B} = (\mathcal{B}, \equiv_{\mathbb{B}})$ が**計算的に同型**であるとは, 二つの計算可能前 L 準同型 $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}, \psi : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ が存在して, $\varphi \circ \psi, \psi \circ \varphi$ が共に恒等関数の前関数となることを言う. このとき, $\mathbb{A} \simeq_{\mathrm{comp}} \mathbb{B}$ と書く.

計算的に同型であることは, 前同型写像が計算可能であるのみならず, その前逆写像も計算可能であることに注意しておく. 以下において, 我々は様々な計算可能前構造の性質を研究するが, いずれも計算的に同型な前構造で保たれる性質であることが, 定義から簡単に調べられる. 従って, この論文において, 我々は二つの計算的に同型な計算可能前構造を区別する必要はない. 決定可能な計算可能前構造は $\mathbb{B} = (\mathcal{B}, =)$ という形の計算可能前構造 $\mathbb{B}$ に計算的に同型となる. 従って, 決定可能な計算可能前構造は, 計算可能構造と本質的に同じことになる. 計算可能構造の理論についての参考文献として [13] を挙げておく. また, 決定可能でなくても, 任意の計算可能前 L 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ は, 項のモデル $\mathcal{B}$ による計算可能前 L 構造 $\mathbb{B} = (\mathcal{B}, \equiv_{\mathbb{B}})$ に計算的に同型になる. $\mathbb{B} = (\mathcal{B}, \equiv_{\mathbb{B}})$ として, 言語 $L(\mathcal{A})$ の閉項, つまり, 自由変数を含まない項全体がなす L 構造を $\mathcal{B}$ として, $\mathcal{B}$ の要素を $\mathcal{A}$ で解釈したときに $\equiv_{\mathbb{A}}$ 同値であることを $\equiv_{\mathbb{B}}$ 同値であると定めれば良い. よって, 次の定理が示された.

定理 2.7. 任意の計算可能前 L 構造に対し, それと計算的に同型となるような項のモデル $\mathcal{A}$ による計算可能前 L 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ が存在する. □

この定理において, 重要なことは, L に含まれる任意の関数記号 F について, $|\mathcal{A}|$ の計算可能な部分集合の $F^{\mathcal{A}}$ の像や逆像が, どちらも計算可能となることである. これは幾つかの定理の証明において使われる事実である.

3 Rice 性と本質的決定不可能性

例 2.2, 例 2.3 など, 次数構造の理論において現れる計算可能前構造においては, そのインデックス集合の計算的な複雑さの分析がよく行われる. また, 例 2.4 のリンデンバウム代数の計算可能前構造においては, 決定可能な (完全) 拡大の存在や非存在を調べることがよく行われる. これらは, 与えられた計算可能前構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ において, $\equiv_{\mathbb{A}}$ を拡大するような同値関係, 合同関係にどのようなものが存在するか, ということを調べる研究だとみなすことができる.

定義 3.1 (Eq, Cg, MaxEq, MaxCg). $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ を計算可能前 L 構造とする. $\mathrm{Eq}(\mathbb{A})$ (resp. $\mathrm{Cg}(\mathbb{A})$) を $\equiv_{\mathbb{A}}$ を拡張するproper な(i.e., $\neq |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$) 同値関係 (resp. L 合同関係) 全体の集合とする. また, $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$, $\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ はそれらの極大な要素全体の集合とする.

定義から

$$\mathrm{Cg}(\mathbb{A}) \subset \mathrm{Eq}(\mathbb{A}), \qquad \mathrm{MaxEq}(\mathbb{A}) \subset \mathrm{Eq}(\mathbb{A}), \qquad \mathrm{MaxCg}(\mathbb{A}) \subset \mathrm{Cg}(\mathbb{A}) \tag{3.1}$$

が分かる. $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ の要素は, $\equiv_{\mathbb{A}}$ を拡張する同値関係のうちその同値類がちょうど二つであるような同値関係であることとして特徴付けられる. 一方, $\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ の要素は, 必ずしも同値類がちょうど二つであるわけではないが, ちょうど二つの同値類を持つ合同関係は極大である. すなわち,

$$\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A}) \cap \mathrm{Cg}(\mathbb{A}) \subset \mathrm{MaxCg}(\mathbb{A}) \tag{3.2}$$

が成り立つ.

$\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ の要素の同値類は**非自明な前集合**, つまり空集合でも $|\mathcal{A}|$ でもない前集合となっている. 逆に, このような非自明な前集合 S は, S と $|\mathcal{A}| \setminus S$ を二つの同値類とする $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ の要素を決定する. この対応関係を念頭において, $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ の要素は, 剰余構造 $\mathcal{A}/\equiv_{\mathbb{A}}$ の非自明な 1 項関係, つまり, 何らかの非自明な性質を表していると考えられる.

定義 3.2 (Rice 性, 本質的決定不可能性). 計算可能前 L 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ について, $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ が計算可能要素を持たないとき, $\mathbb{A}$ は **Rice 性を持つ**という. $\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ が計算可能要素を持たないとき, $\mathbb{A}$ は**本質的に決定不可能である**という. また, $\mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ が計算可能要素を持たないとき, $\mathbb{A}$ は**強い意味で本質的に決定不可能である**という.

Rice 性の定義において MaxEq を Eq で置き換えても, 定義は同値であることが簡単に示される. また, (3.1) より, Rice 性が本質的決定不可能性を導くこと, 強い意味の本質的決定不可能性が本質的決定不可能性を導くことが分かる.

計算可能前構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ が Rice 性を持つということは, 剰余構造 $\mathcal{A}/\equiv_{\mathbb{A}}$ の如何なる非自明な性質も計算不可能であることを意味している. [17] において示された Rice の定理は, 計算可能部分関数についてのどんな非自明な性質も計算不可能であることを意味するが, 我々の用語法では, 例 2.2 の計算可能前構造は Rice 性を持つ, という形で述べることができる.

実は, 非代数的な計算可能前構造, すなわち, 関係記号を含む言語 L についての計算可能前 L 構造 $\mathbb{A}$ は, 関係記号の解釈が自明な場合を除いて, Rice 性を持たないことが示される.

定理 3.3. n 変数の関係記号 R $(n \geq 1)$ を含む言語 L の計算可能前構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ について, $R^{\mathcal{A}}$ が非自明な関係 (i.e., $\neq \emptyset, |\mathcal{A}|^n$) であれば, $\mathbb{A}$ は Rice 性を持たない.

証明. 非自明な前集合から $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ が計算できるので, 計算可能な非自明前集合を見つければ良い. これを $n \geq 1$ についての帰納法で示す. $n = 1$ のときは, $R^{\mathcal{A}}$ 自身が計算可能な非自明前集合を与える. $n > 1$ のときを考える. もしも $x_0, x_1, \cdots, x_{n-2} \in |\mathcal{A}|^{n-1}$ が存在して, y についての関係 $R^{\mathcal{A}}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, y)$ が非自明となるなら, この 1 項関係が計算

可能な非自明前集合を与える. そうでないとき, すなわち, どの $x_0, x_1, \cdots, x_{n-2} \in |\mathcal{A}|^{n-1}$ について定まる y についての関係 $R^{\mathcal{A}}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, y)$ も自明な関係となる, すなわち, 空集合か全体集合 $|\mathcal{A}|$ を与えるなら, $n-1$ 変数 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}$ の関係

$$\exists y R^{\mathcal{A}}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}, y)$$

が計算可能な非自明関係となる. 帰納法の仮定から, この場合も計算可能非自明集合が存在する. □

定義 3.2 での本質的決定不可能という名前は, 例 2.4 を念頭に置いた名称である. 例 2.4 から色々な用語法を輸入して説明を加えよう. $\equiv_{\mathbb{A}'} \in \mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ に対し, $\mathbb{A}' = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}'})$ を $\mathbb{A}$ の**無矛盾拡大**と呼び, さらに $\equiv_{\mathbb{A}'} \in \mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ であるとき, $\mathbb{A}'$ を $\mathbb{A}$ の**無矛盾完全拡大**と呼ぶ. すると, $\mathbb{A}$ が本質的に決定不可能であることは, $\mathbb{A}$ の決定可能な無矛盾完全拡大が存在しないことを意味する. また, 強い意味での本質的決定不可能性は, 決定可能な無矛盾拡大が存在しないことを意味する.

次の事実は, 実質的に文献 [5] において与えられた.

事実 3.4 (横山・吉川 [5]). 例 2.4 の計算可能前構造 $\mathbb{L}_T$ について, $\mathbb{L}_T$ が Rice 性を持つことと, $\mathbb{L}_T$ が本質的決定不可能であること, つまり, 理論 T が本質的決定不可能であることとは同値である.

上記の事実は, 理論 T が本質的決定不可能であることが, T 上での真偽についての非自明な性質はすべて決定不可能であることを意味している.

4 横山吉川の性質

(強い意味での) 本質的決定不可能性と Rice 性との同値性を導く性質, すなわち, 横山吉川の (弱) 性質を定義し, 基本的な性質を探求しよう.

定義 4.1 (横山吉川の性質). 計算可能前 L 構造 $\mathbb{A}$ が**横山吉川の性質**, 又は, **YY 性**を持つとは, $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ の任意の要素が $\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ の要素を計算することを言う. また, $\mathbb{A}$ が**横山吉川の弱性質**, 又は, **弱 YY 性**を持つとは, $\mathrm{Eq}(\mathbb{A})$ の任意の要素が $\mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ の要素を計算することを言う. また, L 構造の集合 $\mathcal{M}$ や理論 T が **(弱)YY 性**を持つとは, $\mathcal{M}$ に属する構造の計算可能前 L 構造, 或いは, T の計算可能前 L モデルが必ず (弱)YY 性を持つことを言う.

合同関係は同値関係なので, YY 性は $\equiv_{\mathbb{A}}$ を拡張する極大な同値関係や極大な合同関係の存在が, 計算的な意味で同値であることを意味する. 弱 YY 性についても同様である. 従って, (弱)YY 性を持つ理論 T では, (強い意味で) 本質的決定不可能であることと Rice 性が同値になり, T の計算可能前モデル $\mathbb{A}$ が, (強い意味で) 本質的決定不可能であれば, 剰余構造 $\mathcal{A}/\equiv_{\mathbb{A}}$ の如何なる非自明な性質も計算不可能であることになる.

YY 性はマス・プロブレムの還元可能性の用語 ([14] を見よ) を用いて, $\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ が $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ に Muchnik 還元可能である, と言い換えることができる. 弱 YY 性についても

同様である. 計算手続きに一様性を加味して, すなわち, Muchnik 還元可能性を Medvedev 還元可能性に変えた性質も興味深いが, この論文では計算の一様性については考慮しない.

$\mathrm{Eq}(\mathbb{A})$ の要素は, それの同値類の一つと補集合による分割を考えれば, $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ の要素を計算することが分かる. 従って, YY 性は弱 YY 性を導く.

一方, 弱 YY 性から YY 性は, 一般には導かれない. これは例えば次のことから分かる: $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, =)$ を本質的決定不可能な計算可能前 L 代数とすると, $=$ が計算可能なので弱 YY 性を持つが, この同値関係 $=$ から $\mathrm{MaxEg}(\mathbb{A})$ の要素は計算できない. (上記のような $\mathbb{A}$ の存在は, [3] の第 II 部にもある通り, 可算可換環の極大イデアルの存在と ACA_0 とが RCA_0 上同値であり, しかも, 計算可能集合全体は RCA_0 のモデルであり ACA_0 のモデルでないことから, 計算可能な可換環で計算可能な極大イデアルが存在しないものがあることから分かる. 極大な合同関係から極大イデアルが計算されるからである.)

弱 YY 性だけでは YY 性は導かれないが, 次で定義する極大拡張性を合わせると, YY 性が導かれる.

定義 4.2 (極大拡張性). 計算可能前 L 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ が**極大拡張性**を持つとは, $\mathrm{Cg}(\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}}$) の任意の要素 E が $\mathrm{MaxCg}(\mathcal{A}, E)$ の要素を計算することを言う. また, L 構造の集合 $\mathcal{M}$ や理論 T が**極大拡張性**を持つとは, $\mathcal{M}$ に属する構造の計算可能前 L 構造, 或いは, T の計算可能前 L モデルが必ず極大拡張性を持つことを言う.

極大拡張性を持てば, $\mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ の任意の要素が $\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ の要素への拡張を計算できることになるので, 弱 YY 性と合わせると, YY 性が導かれる. 従って, 次が成り立つ.

命題 4.3. 弱 YY 性 + 極大拡張性 $\Longrightarrow$ YY 性 $\Longrightarrow$ 弱 YY 性

(弱)YY 性や極大拡張性の定義から, L 構造の集合 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ や理論 T, S について,

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \text{ かつ } \mathcal{N} \text{ は (弱)YY 性/極大拡張性を持つ} \Longrightarrow \mathcal{M} \text{ は (弱)YY 性/極大拡張性を持つ} \tag{4.1}$$

$$T \subset S \text{ かつ } T \text{ は (弱)YY 性/極大拡張性を持つ} \Longrightarrow S \text{ は (弱)YY 性/極大拡張性を持つ} \tag{4.2}$$

が成り立つ.

一般に, 命題 4.3 の前半の逆も成り立たない. つまり, YY 性から極大拡張性を導かない. これは次の例から分かる.

例 4.4. $\mathbb{A}_0 = (\mathcal{A}_0, =)$ を本質的決定不可能な計算可能前 L 代数とする. $\mathcal{A}_1$ を $\mathcal{A}_0$ のコピーで $|\mathcal{A}_0| \cap |\mathcal{A}_1| = \emptyset$ を満たすものとし, $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_0$ を計算可能な L 同型写像とする.

計算可能前 L 代数 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, =)$ を次で定める: $|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| \cup |\mathcal{A}_1|$, かつ, 任意の $f \in L$ と $\vec{a} \in |\mathcal{A}|$ に対し $f^{\mathcal{A}}(\vec{a}) = f^{\mathcal{A}_0}(\vec{a'})$, 但し a' は $a \in |\mathcal{A}|_0$ か $a \in |\mathcal{A}|_1$ に応じて $a' = a$ か $a' = \varphi(a)$ とする. これで $\mathcal{A}$ が, 従って $\mathbb{A}$ が定義された.

$\mathbb{A}$ は YY 性を持つ. 何故なら, $\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ が計算可能な要素を持てば YY 性が成り立つが, $\equiv_0$ を

$$a \equiv_0 b \iff a, b \in |\mathcal{A}_0| \text{ or } a, b \in |\mathcal{A}_1|$$

と定めると, これがそのような計算可能要素となる.

$\mathbb{A}$ は極大拡張性を持たない. 何故なら, $\equiv_1$ を, 先の a' の表記を用いて, $a \equiv_1 b$ を $a' = b'$ であることとして定めると, $\equiv_1$ は計算可能かつ $\equiv_1 \in \mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ であるが, $(\mathcal{A}, \equiv_1) \simeq_{\mathrm{comp}} \mathbb{A}_0$ なので, $(\mathcal{A}, \equiv_1)$ は本質的決定不可能であるから $\equiv_1$ 計算可能な要素を持たない.

この例で示された通り, 一般に, YY 性は, 弱 YY 性と極大拡張性に分解されないが, 構造の集合 $\mathcal{M}$ については, それが同型と剰余構造に閉じていれば, $\mathcal{M}$ の YY 性は, 弱 YY 性と極大拡張性とに分解される.

定理 4.5. L 構造の集合 $\mathcal{M}$ が同型と剰余構造について閉じているとき, $\mathcal{M}$ について

$$\text{弱 YY 性} + \text{極大拡張性} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{YY 性}$$

証明. 示すべきは YY 性が極大拡張性を導くことだけである. $\mathcal{M}$ は YY 性を持つとする. $\mathcal{M}$ に属するある L 構造の計算可能前 L 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ を固定する. $\mathbb{A}$ が極大拡張性を持つことを示したい. それには, $\mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ の要素 $\equiv_0$ を任意に固定して, $\mathrm{MaxCg}(\mathcal{A}, \equiv_0)$ の $\equiv_0$ 計算可能な要素を見つければ良い. $\mathcal{M}$ は同型と剰余構造について閉じていることから, $(\mathcal{A}, \equiv_0)$ も $\mathcal{M}$ に属する構造の計算可能前構造となる. $(\mathcal{A}, \equiv_0)$ は YY 性を持つので, $\equiv_0$ は $\mathrm{MaxCg}(\mathcal{A}, \equiv_0)$ の要素を計算する. □

同型と剰余構造に閉じた構造のクラスの重要な例は, 有限構造全体のクラス $\mathcal{F}$ である. $\mathcal{F}$ が極大拡張性を持つことは明らかであろう. 従って, $\mathcal{F}$ が弱 YY 性を持てば, $\mathcal{F}$ が YY 性をも持つことになる. そして, これは成り立つが, 証明は存外複雑である.

定理 4.6. 任意の計算可能前有限 L 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ は YY 性を持つ.

証明. $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ の弱 YY 性を示せば良い. この証明のため, 次の言葉を定め, その性質を調べておく. $|\mathcal{A}|$ 上の二項関係 R に対し, R^{tr} で関係 R の推移閉包を表し, 関係 R^* を, $a_0 R^* a_1$ が成り立つとは, x のみを変数に持つ $L(\mathcal{A})$ 項 $t(x)$ と $b_0, b_1 \in |\mathcal{A}|$ が存在して, $b_0 R b_1$ かつ $a_i = t^{\mathcal{A}}(b_i)$, $i = 0, 1$, が成り立つこととして定める. L' を言語 L から関係記号を除いた集合とし, $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \upharpoonright L'$ とする. このとき, $|\mathcal{A}|$ 上の任意の二項関係 S が反射的かつ対称的であれば,

$$(S^*)^{\mathrm{tr}} \text{は}\ S\ \text{を含む}\ \mathcal{A}'\text{上の合同関係} \tag{4.3}$$

が成り立つ. $(\cdot)^{\mathrm{tr}}$ や $(\cdot)^*$ は反射性, 対称性を保つことは明らかだから, $(S^*)^{\mathrm{tr}}$ は同値関係である. また, $(S^*)^{\mathrm{tr}}$ が S を含むことも明らかであろう. 従って, (4.3) を示すには, 任意の $f \in L'$ について $(S^*)^{\mathrm{tr}}$ が関数 $f^{\mathcal{A}}$ と両立すること, それには, 任意の $a_0, a_1, \vec{c}, \vec{d} \in |\mathcal{A}|$ に対し,

$$a_0 S^* a_1 \quad \Longrightarrow \quad f^{\mathcal{A}}(\vec{c}, a_0, \vec{d}) S^* f^{\mathcal{A}}(\vec{c}, a_1, \vec{d}) \tag{4.4}$$

であることを示せば十分である. $a_0 S^* a_1$ が成り立てば, S^* の定義から 1 変数の $L'(\mathcal{A}')$ 項 $t(x)$ と $b_0, b_1 \in |\mathcal{A}|$ が存在して, $b_0 S b_1$ かつ $a_i = t^{\mathcal{A}}(b_i)$, $i = 0, 1$, が成り立つ. 従って, $L(\mathcal{A})$ 項 $s(x)$ を $f(\vec{c}, t(x), \vec{d})$ で定義すれば, $b_0 S b_1$ かつ $f^{\mathcal{A}}(\vec{c}, a_i, \vec{d}) = s^{\mathcal{A}}(b_i)$, $i = 0, 1$, より, (4.4) の結論が成り立つ. 以上で, (4.3) の成立が示された.

$\mathbb{A}$ の弱 YY 性を示すために $\equiv_0 \in \mathrm{Eq}(\mathbb{A})$ を任意に固定する. $\mathbb{A}$ は前有限構造であるから, $\mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ は有限集合である. $\equiv_{\mathbb{A}}$ は $\equiv_{\mathbb{A}} \subset \equiv_0$ を満たす $\mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ の要素だから, $\equiv_1 \subset \equiv_0$ を満たす

$\mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ の極大な要素 $\equiv_1$ を選ぶことができる. $\equiv_1$ が $\equiv_0$ 計算可能であることを示せば, 弱YY 性が示されたことになる. $\mathbb{A}$ は前有限構造だから, これには, 任意の二つの異なる $\equiv_1$ 同値類が, $\equiv_0$ 計算可能な集合によって分離できること, つまり一方の $\equiv_1$ 同値類を含み, 他方の $\equiv_1$ 同値類と交わりを持たない $\equiv_0$ 計算可能な集合の存在を示せば十分である.

そこで, $a, b \in |\mathcal{A}|$ は $a \not\equiv_1 b$ を固定する. a, b の $\equiv_1$ 同値類を分離する $\equiv_0$ 計算可能な集合を見つけたい. $a \not\equiv_0 b$ であれば, a の $\equiv_0$ 同値類がそのような集合となる. $a \equiv_0 b$ であるときを考える. 反射的かつ対称的な関係 S を $\equiv_1 \cup \{(a,b),(b,a)\}$ で定める. (4.3) より $(S^*)^{\mathrm{tr}}$ は $\equiv_1$ を真に含む同値関係である.

(i) もしも $(S^*)^{\mathrm{tr}}$ が $\mathcal{A}$ 上の合同関係であれば, $\equiv_1$ の極大性より $(S^*)^{\mathrm{tr}} \not\subset \equiv_0$, 従って, $S^* \not\subset \equiv_0$ である. つまり, 1 変数の $L(\mathcal{A})$ 項 $t(x)$ と $c_0, c_1 \in |\mathcal{A}|$ が存在して, $c_0 S c_1$ かつ $t^{\mathcal{A}}(c_0) \not\equiv_0 t^{\mathcal{A}}(c_1)$ が成り立つ. 後者の条件と $\equiv_1 \subset \equiv_0$ から $c_0 \not\equiv_1 c_1$ である. S の定義から, $c_0 = a$, $c_1 = b$ としてよい. よって, $\equiv_0$ 計算可能な集合 $\{d \in |\mathcal{A}| : t^{\mathcal{A}}(d) \equiv_0 t^{\mathcal{A}}(a)\}$ は a の $\equiv_1$ 同値類を含み, b の $\equiv_1$ 同値類と交わりを持たない.

(ii) $(S^*)^{\mathrm{tr}}$ が $\mathcal{A}$ 上の合同関係でなければ, (4.3) より, 関係記号 $R \in L$ が存在して, $R^{\mathcal{A}}$ は $(S^*)^{\mathrm{tr}}$ を, 従って S^* を保存しない. よって, 1 変数の $L(\mathcal{A})$ 項 $t(x)$ と $c_0, c_1, \vec{e}, \vec{f} \in |\mathcal{A}|$ が存在して, $c_0 S c_1$ かつ

$$\neg[R^{\mathcal{A}}(\vec{e}, t(c_0), \vec{f}) \iff R^{\mathcal{A}}(\vec{e}, t(c_1), \vec{f})]$$

が成り立つ. この条件と $\equiv_1$ が合同関係であることと S の定義から, $c_0 = a$, $c_1 = b$ としてよい. よって, $\equiv_0$ 計算可能な集合 $\{d \in |\mathcal{A}| : R^{\mathcal{A}}(\vec{e}, t(d), \vec{f}) \iff R^{\mathcal{A}}(\vec{e}, t(a), \vec{f})\}$ は a の $\equiv_1$ 同値類を含み, b の $\equiv_1$ 同値類と交わりを持たない. □

5 正論と言語と合同関係

否定 $\neg$ と含意 $\rightarrow$ なしで書かれた文を**正文**と言い (より一般に $\neg$ と $\rightarrow$ なしで書かれた論理式を**正論理式**と言う), 正文による公理化を持つ理論を**正論**と呼ぶ. 次の節では様々な理論が YY 性を持つかどうかを探求するが, そこで扱うほとんど全ての理論が正論である. この節では正論が一般に持つ性質をまとめる. まず, 定理 4.5 に関連して次の重要な事実がある.

事実 5.1 (Lyndon [16], Chang/Keisler [8] の定理 3.2.4 を見よ)**.** 言語 L の理論 T が正論であることと, T のモデル全体の集合が L 準同型像に閉じていることとは同値である.

T のモデル $\mathcal{A}$ の剰余構造は, $\mathcal{A}$ の L 準同型像である. もしも言語 L が関係記号を含まなければ, すなわち, T が代数理論であれば, $\mathcal{A}$ からの L 準同型は, $\mathcal{A}$ の上に合同関係, すなわち, L 準同型の核を定め, 準同型定理が成り立つ. つまり, $\mathcal{A}$ からの L 準同型が, $\mathcal{A}$ の剰余構造への射影と, それからの同型写像に分解される. 理論 T のモデル全体の集合が同型性に閉じていることは自明であるから, 上の事実と定理 4.5 から, 代数正論に関して, YY 性は, 弱 YY 性と極大拡張性とに分解される.

例えば群論を考えると, 言語が 2 項関数 $\cdot$ のみか, また, 逆元を与える 1 項関数 $^{-1}$ や単位元 e を言語に含むかで, 理論の記述が変わる. 一般に, ある理論が正論となるかどうかは, その理論を記述する言語に依存する. また, その理論のモデルでの合同関係も言語に

依存した概念である．ある理論を如何なる言語で記述すべきか，という大変魅力的な問題もここに論じたいところではあるが，紙面の制約上，別の機会に譲ることにして，これに関連する話題としては，正論の言語に関数を加えても，合同関係であることが保たれる場合を述べるに止めておこう．

定理 5.2. 言語 L の正論 T とそのモデル $\mathcal{A}$ とその上の L 合同関係 $\equiv$ について，正論 T 上で正論理式により定義可能な関数に対する関数記号を F とすれば，$\equiv$ は $L \cup \{F\}$ 合同関係でもある．

証明. 議論を簡単にするため，F は 1 項関数とする．$c \equiv d$ を満たす任意の $c, d \in |\mathcal{A}|$ を固定する．示すべきは $F(c) \equiv F(d)$ である．F を定義する正論理式を $\psi(x, y)$ とする．新しい定数記号 c, d, e, f を用意して，正文による T の公理に $\psi(c, e)$, $\psi(d, f)$ という正文を公理として付け加えた正論を T' とする．$e^{\mathcal{A}} = F^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}} = F^{\mathcal{A}}(d)$ とすれば，$\mathcal{A}$ は T' のモデルだから，事実 5.1 より，剰余構造 $\mathcal{A}/\equiv$ も T' のモデルであり，従って，剰余構造 $\mathcal{A}/\equiv$ で $c = d$ であり，$\psi(c, e)$, $\psi(d, f)$ と ψ が T 上で関数となっていることから，$e = f$ が成り立つ．これは，構造 $\mathcal{A}$ で $e \equiv f$ が成り立つことを意味する．$e^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}$ はそれぞれ $F(c), F(d)$ だから $F(c) \equiv F(d)$ が成り立つ． □

上記の定理において，L 合同関係の代わりに，L 準同型写像を考えても同様の定理が成り立つ．この場合，特に正論理式で定義可能な定数記号を L に付け加えても，準同型性が保たれるが，合同関係を考える場合には，もっと強く，任意に定数記号を言語に追加しても，合同関係であることが当たり前に保たれることを注意しておこう．

命題 5.3. L 構造 $\mathcal{A}$ とその上の L 合同関係 $\equiv$ について，新しい定数記号 c を言語に加え，それにどんな解釈 $c^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$ を与えても，$\equiv$ は $L \cup \{c\}$ 合同関係である． □

6 横山吉川理論

この節では，半束，pseudo-complemented な半束，分配束，ハイティング代数，ブール代数の理論，群，環，体の理論 (但し $0 \neq 1$ を公理に含めない) に関して，YY 性を持つか否かを明らかにする．これらの理論は全て代数正論となる．従って，これらの YY 性は，弱 YY 性と極大拡張性とに分解される．束に関する理論は全て YY 性を持つことがこの節で示される．[2] 従って，極大拡張性が成り立つことも系として分かる．また，群，環，体については，[3] 逆数学の研究などから，極大拡張性を持たないこと，従って，YY 性も持たないことが簡単に分かるが，弱 YY 性を持つかどうかは自明ではない．しかし，どれも弱 YY 性を持たないことがこの節で示される．一方で，整数環 $\mathbb{Z}$ のように可逆元が有限個の単項イデアル整域の計算可能前構造については，YY 性や極大拡張性を持つことも示される．

まず，第一に半束 (上半束，又は，下半束) の代数正論を取り扱う．この理論は 1 つの 2 項関数だけを言語に持ち，この演算が，結合性，可換性，冪等性を持つ，という公理からなる正論 T である．場合によっては，言語に定数記号 $0, 1$ を (場合によっては一部を) 加え，そ

[2] 束についての基本事実は [6, 12] に詳しい．必要あれば参照されたい．
[3] これらの理論については [15] を参照されたい．

れぞれが零元と単位元であることにする公理を加えた正論 T' とすることもあるが, T が YY 性を持てば, 命題 5.3 より, T' も YY 性を持つので, ここでは, T の YY 性を示す.

定理 6.1. 言語 $\{\vee\}$ の上半束の理論は YY 性を持つ. 下半束の理論についても同様である.

証明. $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ を言語 $\{\vee\}$ の計算可能前上半束とする. $\equiv_0 \in \mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ を任意に固定する. $\equiv_0$ 計算可能な $\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ の要素の存在を示したい. これには, 上半束の任意の非自明なイデアルが, それとそれの補集合のちょうど二つの同値類を持つ極大な合同関係を計算することから, $\equiv_0$ 計算可能な $\mathbb{A}$ の非自明な前イデアル $\mathcal{I}$ を見つければ十分である.

以下, $x, y \in |\mathcal{A}|$ に対し, $x \leqq_{\mathbb{A}} y$ を $x \vee^{\mathcal{A}} y \equiv_{\mathbb{A}} y$ と定める. $a, b \in |\mathcal{A}|$ で $a \not\equiv_0 b \geqq_{\mathbb{A}} a$ を満たすものがある. と言うのも, $\equiv_0$ は proper なので $x \not\equiv_0 y$ を満たす $x, y \in |\mathcal{A}|$ が存在するから, $x \vee^{\mathcal{A}} y$ を b とし, x, y のどちらかを a とできる.

$\{x_n\}_{n\in\omega}$ を計算可能構造 $\mathcal{A}$ の要素全体を枚挙する計算可能列とする. $|\mathcal{A}|$ の有限部分集合の列 $\{F_n\}_{n\in\omega}$ と $\mathcal{I} \subset |\mathcal{A}|$ を, $F_0 \overset{\text{def}}{=} \{a, b\}$,

$$F_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \{u \vee^{\mathcal{A}} x_n : u \in F_n\} & \text{if } (\forall u \in F_n) u \equiv_0 u \vee^{\mathcal{A}} x_n, \\ F_n \cup \{u \vee^{\mathcal{A}} x_n : u \in F_n\} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=} \{x_n : (\forall u \in F_n) u \equiv_0 u \vee^{\mathcal{A}} x_n\}$$

と定める. $\mathcal{I}$ が $\equiv_0$ 計算可能であることは明らかである. $\mathcal{I}$ が $\mathbb{A}$ の非自明な前イデアルであることを以下で示す.

F_n の定義から, 任意の $z \in |\mathcal{A}|$ と任意の $n \in \omega$ について,

$$[(\forall u \in F_n) z \leqq_{\mathbb{A}} u] \implies [(\forall u \in F_{n+1}) z \leqq_{\mathbb{A}} u] \tag{6.2}$$

$$[(\exists u, v \in F_n) u \not\equiv_0 v \equiv_{\mathbb{A}} u \vee^{\mathcal{A}} z] \implies [(\exists u, v \in F_{n+1}) u \not\equiv_0 v \equiv_{\mathbb{A}} u \vee^{\mathcal{A}} z] \tag{6.3}$$

が成り立つ. (6.2) の成立は明らかであろう. (6.3) を示す. (i) もしも F_{n+1} の定義 (6.1) での条件 $(\forall u \in F_n) u \equiv_0 u \vee^{\mathcal{A}} x_n$ が成り立たなければ, $F_n \subset F_{n+1}$ であるから, この場合は良い. (ii) 次に $(\forall u \in F_n) u \equiv_0 u \vee^{\mathcal{A}} x_n$ が成り立つときを考える. (6.3) の仮定から, $u', v' \in F_n$ で $u' \not\equiv_0 v' \equiv_{\mathbb{A}} u' \vee^{\mathcal{A}} z$ を満たすものが存在する. F_{n+1} の定義から $u' \vee^{\mathcal{A}} x_n, v' \vee^{\mathcal{A}} x_n \in F_{n+1}$ であるが, これらを u, v とすれば (6.3) の結論が成立する.

$n \in \omega$ と $z \in |\mathcal{A}|$ についての関係 $\varphi(n, z)$, $\psi(n, z)$ を, (6.2),(6.3) に現れる性質, すなわち,

$$\varphi(n, z) \overset{\text{def}}{\iff} (\forall u \in F_n) z \leqq_{\mathbb{A}} u, \quad \psi(n, z) \overset{\text{def}}{\iff} (\exists u, v \in F_n) u \not\equiv_0 v \equiv_{\mathbb{A}} u \vee^{\mathcal{A}} z \tag{6.4}$$

と定義する. 明らかに $\varphi(n, z)$ と $\psi(n, z)$ が共に成立することはない. また, (6.1) での F_{n+1} の定義から $\varphi(n + 1, x_n)$, 又は, $\psi(n + 1, x_n)$ の成立も明らかなので, (6.2) と (6.3) より, 任意の $z \in |\mathcal{A}|$ に対し,

$$z \in \mathcal{I} \iff (\exists k)(\forall n \geq k) \varphi(n, z), \qquad z \notin \mathcal{I} \iff (\exists k)(\forall n \geq k) \psi(n, z) \tag{6.5}$$

である. また, $\varphi(0, a)$, $\psi(0, b)$ だから, $\mathcal{I}$ は a を含み, b を含まない非自明な集合である. さらに, (6.4) と (6.5) から

$$x \equiv_{\mathbb{A}} y \in \mathcal{I} \Longrightarrow x \in \mathcal{I}, \qquad [x, y \in \mathcal{I} \iff x \vee^{\mathcal{A}} y \in \mathcal{I}] \tag{6.6}$$

が成り立つから, $\mathcal{I}$ は前イデアルであることも分かる. □

この定理の応用として，例 2.3 の任意のインデックス集合，すなわち，$\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ の要素の同値類が，proper なチューリングイデアルの前集合を計算することが導かれる．例 2.3 に限らず，チューリング次数構造の部分上半束構造の任意の計算可能前構造について同様のことが成り立つ．計算可能性理論では，色々な特殊なインデックス集合について，それらの計算的な複雑さの研究がされてきたが，ここで述べたことは，インデックス集合の計算的な複雑さに関する一般的な性質である．

次に分配束の代数正論が YY 性を持つことを示す．言語が二つの 2 項演算からなる集合 $\{\vee,\wedge\}$ で，$\vee$ と $\wedge$ のそれぞれについての半束の公理に，吸収律 $x\vee(x\wedge y)=x$, $x\wedge(x\vee y)=x$ を加えると，これは束の理論である．[4] 分配束の理論 T はさらに，さらに $\vee$ と $\wedge$ の分配性を加えたもので，これは正論である．やはり，場合によっては，言語に定数記号 $0,1$ を (場合によっては一部を) 加え，それぞれが零元と単位元であることにする公理を加えた正論 T' とすることもあるが，T が YY 性を持てば，命題 5.3 より，T' も YY 性を持つので，ここでは，T の YY 性を示す．

定理 6.2. 言語 $\{\vee,\wedge\}$ についての分配束の理論は YY 性を持つ．

証明． $\mathbb{A}=(\mathcal{A},\equiv_{\mathbb{A}})$ を言語 $\{\vee,\wedge\}$ の計算可能前分配束とする．$\equiv_0\in\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ を任意に固定する．$\equiv_0$ 計算可能な $\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ の要素の存在を示したい．これには，分配束の任意のイデアルとフィルターの非自明な分割が，それらをちょうど二つの同値類とする極大な合同関係を計算することから，$\equiv_0$ 計算可能な $|\mathbb{A}|$ の前イデアル $\mathcal{I}$ と前フィルター $\mathcal{F}$ による非自明な分割を見つければ十分である．

以下，$x\leqq_{\mathbb{A}} y$ は $x\vee^{\mathcal{A}} y\equiv_{\mathbb{A}} y$ を表すものとする．定理 6.1 の証明の第 2 段落の議論から，$a,b\in|\mathcal{A}|$ で $a\not\equiv_0 b\geqq_{\mathbb{A}} a$ を満たすものが存在する．

$\{x_n\}_{n\in\omega}$ を計算可能構造 $\mathcal{A}$ の要素全体を枚挙する計算可能列とする．$|\mathcal{A}|$ 上の前準同型の列 $\{p_n\}_{n\in\omega}$ と $|\mathcal{A}|$ 上の関係 $\equiv_1$ を，$p_0(z)\overset{\mathrm{def}}{=}a\vee^{\mathcal{A}}(z\wedge^{\mathcal{A}} b)$,

$$p_{n+1}(z)\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{cases}p_n(z)\vee^{\mathcal{A}}p_n(x_n) & \text{if } p_n(x_n)\equiv_0 p_n(a),\\ p_n(z)\wedge^{\mathcal{A}}p_n(x_n) & \text{if } p_n(x_n)\equiv_0 p_n(b),\end{cases}\tag{6.7}$$

$$\mathcal{I}\overset{\mathrm{def}}{=}\{x_n:p_n(x_n)\equiv_0 p_n(a)\},\qquad \mathcal{F}\overset{\mathrm{def}}{=}\{x_n:p_n(x_n)\equiv_0 p_n(b)\}\tag{6.8}$$

と定める．$\mathcal{I},\mathcal{F}$ が $\equiv_0$ 計算可能であることは明らかである．$\mathcal{I},\mathcal{F}$ が $\mathbb{A}$ の前イデアル，前フィルターとして非自明な分割を与えていることを以下で示す．

(6.7) より，n についての帰納法で，任意の $z\in|\mathcal{A}|$ と $n\in\omega$ について，

$$p_n(a)\leqq_{\mathbb{A}}p_n(z)\leqq_{\mathbb{A}}p_n(b)\quad\text{and}\quad p_n(a)\not\equiv_0 p_n(b),\tag{6.9}$$

$$p_{n+1}(x_n)\equiv_{\mathbb{A}}p_{n+1}(a)\quad\text{or}\quad p_{n+1}(x_n)\equiv_{\mathbb{A}}p_{n+1}(b),\tag{6.10}$$

$$p_n(z)\equiv_{\mathbb{A}}p_n(a)\Longrightarrow p_{n+1}(z)\equiv_{\mathbb{A}}p_{n+1}(a),\quad p_n(z)\equiv_{\mathbb{A}}p_n(b)\Longrightarrow p_{n+1}(z)\equiv_{\mathbb{A}}p_{n+1}(b)\tag{6.11}$$

[4] 束の代数正論については，YY 性が成り立つかどうかは未解決問題である．

の成立が分かる. 従って, $\mathcal{I},\mathcal{F}$ はそれぞれ a,b を含む $|\mathcal{A}|$ の非自明な分割を与えている. また, (6.8),(6.10),(6.11) より

$$z \in \mathcal{I} \iff (\exists k)(\forall n \geq k)p_n(z) \equiv_{\mathbb{A}} p_n(a), \quad z \in \mathcal{F} \iff (\exists k)(\forall n \geq k)p_n(z) \equiv_{\mathbb{A}} p_n(b) \tag{6.12}$$

である. p_n の定義 (6.7) から p_n は前 $\{\vee,\wedge\}$ 準同型なので, (6.12) から

$$x \equiv_{\mathbb{A}} y \in \mathcal{I} \Longrightarrow x \in \mathcal{I}, \qquad [x,y \in \mathcal{I} \iff x \vee^{\mathcal{A}} y \in \mathcal{I}] \tag{6.13}$$

$$x \equiv_{\mathbb{A}} y \in \mathcal{F} \Longrightarrow x \in \mathcal{F}, \qquad [x,y \in \mathcal{F} \iff x \wedge^{\mathcal{A}} y \in \mathcal{F}] \tag{6.14}$$

が成り立ち, $\mathcal{I},\mathcal{F}$ はそれぞれ前イデアル, 前フィルターであることも分かる. □

上半束のYY性の応用として, チューリング次数の計算可能前部分上半束構造についてのインデックス集合の計算的な複雑さの話をしたが, 分配束のYY性についても同様に, Muchnik 次数や Medvedev 次数の計算可能前部分分配束に応用することができる.

上記の結果はブール代数のYY性を導く. ブール代数は $0,1$ を含む分配束で, さらに, 補元に関する公理 $x \vee (\neg x) = 1$, $x \wedge (\neg x) = 0$ を含めた代数理論で, 正論である. 否定 $\neg$ 演算は言語 $\{\wedge,\vee\}$ による正文で定義可能な演算である. 定理 5.2 や命題 5.3 より, $\{\wedge,\vee\}$ 合同関係は言語に記号 $0,1,\neg$ を加えても, その言語の合同関係になっている. ブール代数は分配束の拡張であるから, 分配束のYY性からブール代数のYY性が分かる. [5]

系 6.3 (横山/吉川)**.** 言語 $\{\vee,\wedge\}$ のブール代数の理論はYY性を持つ. □

これの系として, pseudo-complemented な下半束やハイティング代数がYY性を持つことが導かれる. まず, **pseudo-complemented** な下半束とは, 零元 0(=最小元) を持つ下半束であって, 任意の x に対し, $x \wedge y = 0$ を満たす最大の y (これを $\neg x$ と書く) が存在することを言う. このとき, $\neg 0$ は単位元 1 (=最大元) となる. また, **ハイティング代数**とは, 零元 0 と単位元 1 を持つ分配束であって, 任意の要素 a,b に対し, $a \wedge c \leq b$ を満たす最大の c (これを $a \to b$ と書く) が存在することを言う. ハイティング代数では $\neg a$ を $a \to 0$ で解釈することで, $\wedge,\neg$ について pseudo-complemented な下半束をなす. pseudo-complemented な下半束は言語 $\{\wedge,\neg\}$ の理論として代数正論であり, ハイティング代数は言語 $\{\vee,\wedge,\to\}$ の理論として代数正論である (例えば [12] の I.6 の演習 23 や [6] の 9 章 4 節の定理 1 を見よ). また, Frink[9] や Glivenko[11] は, それぞれ, pseudo-complemented な下半束やハイティング代数において, 写像 $x \mapsto \neg\neg x$ による像が, 同じ演算 $\wedge,\neg$ と $0,1$ によってブール代数になることを示した. これと先のブール代数のYY性から, pseudo-complemented な下半束やハイティング代数のYY性を導こう.

系 6.4. 言語 $\{\wedge,\neg\}$ の pseudo-complemented な下半束の理論はYY性を持つ. また, 言語 $\{\wedge,\neg\}$ のハイティング代数の理論はYY性を持つ.

[5]横山吉川 [5] においては, 実質, 言語 $\{\wedge,\neg\}$ についてのブール代数の理論のYY性が示されている. 言語 $\{\wedge,\neg\}$ でのYY性は $x \vee y$ を $\neg(\neg x \wedge \neg y)$ と解釈できることから, 言語 $\{\wedge,\vee\}$ のYY性に帰着される. 一方で, 言語 $\{\wedge,\vee\}$ の前ブール代数 $(\mathcal{A},\equiv_{\mathbb{A}})$ において, $\neg$ が計算可能な前否定演算となるような $\mathcal{A}$ での解釈を与えることは一般にできないので, 言語 $\{\wedge,\neg\}$ のYY性から言語 $\{\wedge,\vee\}$ のYY性を導くことができない. 従って, 我々の系 6.3 での主張は, 横山吉川の定理をより強めたものになっている.

証明. 計算可能前 L 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ を下半束, 又は, ハイティング代数の前構造とする. 定理 2.7 より, YY 性を論じる場合には, 計算可能前構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ において, $\neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}}$ による計算可能構造 $\mathcal{A}$ の像 $\neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ は計算可能構造と考えて良い. また, 命題 5.3 より, 言語に $0, 1$ が含まれているとしても, YY 性の成立, 不成立に影響しないので, $0, 1 \in L$ とする. $\mathbb{A}$ の YY 性を示すために, $\equiv_0 \in \mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ を任意に固定する. $\equiv_0$ は proper なので, $a \not\equiv_0 0^{\mathcal{A}}$ を満たす $a \in |\mathcal{A}|$ が存在する. $\equiv_1$ を, x, y についての関係 $x \wedge^{\mathcal{A}} a \equiv_0 y \wedge^{\mathcal{A}} a$ で定めると, これは $\equiv_0$ 計算可能な $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ の要素で $0^{\mathcal{A}} \not\equiv_1 1^{\mathcal{A}}$ を満たす. $\neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}}0^{\mathcal{A}} \equiv_{\mathbb{A}} 0^{\mathcal{A}}$ かつ $\neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}}1^{\mathcal{A}} \equiv_{\mathbb{A}} 1^{\mathcal{A}}$ だから $\neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}}0^{\mathcal{A}} \not\equiv_1 \neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}}1^{\mathcal{A}}$ である. 従って, $\equiv_1$ は $\neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ 上に制限した同値関係としても proper である. ブール代数での極大な合同関係は極大フィルターを計算するから, ブール代数の YY 性から $\equiv_0$ 計算可能な $(\neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}}\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ の前極大フィルター $\mathcal{F}$ が存在する. この $\mathcal{F}$ の $\neg^{\mathcal{A}}\neg^{\mathcal{A}}$ での逆像 $\mathcal{F}'$ は $\equiv_0$ 計算可能で, これも $\mathbb{A}$ の前極大フィルターになることが容易に確かめられる. これから $\mathcal{F}'$ とその補集合を同値類とする $\equiv_0$ 計算可能な同値関係は, pseudo-complemented な上半束についても, また, ハイティング代数についても合同関係になる. □

次に群, 環, 体について考えていこう. これらは正論になる. (但し, 環や体の理論では $0 \neq 1$ の公理を入れないものとする.) 系 6.3 より, 言語 $\{+, \cdot\}$ のブール環については YY 性が成り立つ. これは, $\cdot$ は $\wedge$ で解釈し, $a + b$ は $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ と解釈でき, $\neg$ は正論理式で定義可能なので, 定理 5.2 から分かる.

系 6.5. 言語 $\{+, \cdot\}$ のブール環は YY 性を持つ. □

しかし, 以下で示すように, 一般には, 群, 環, 体の理論はいずれも弱 YY 性を持たない. (4.2) より, 言語 L のある理論 T が弱 YY 性を持たなければ, 同じ言語 L の任意の部分理論は弱 YY 性を持たない. だから, 例えば群や体での弱 YY 性の不成立は, それぞれ半群や環での弱 YY 性の不成立を導く. また, 言語 L, L' について $L \subset L'$ であるとき, 計算可能前 L' 構造 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ の L への縮約 $\mathbb{A} \upharpoonright L$ が弱 YY 性を持たないとき, $\mathbb{A}$ も弱 YY 性を持たない. 従ってまた, $\mathbb{A}$ や $\mathbb{A} \upharpoonright L$ が前モデルとなるような如何なる言語 L, L' の理論も弱 YY 性を持たない. よって, 以下の定理の系として, 群や体で弱 YY 性が成り立たないことが示される.

定理 6.6. 言語 $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ の計算可能前体 $\mathbb{A} = (\mathcal{A}, \equiv_{\mathbb{A}})$ で, $\mathbb{A} \upharpoonright \{+\}$ が弱 YY 性を持たないものが存在する.

証明. $\mathcal{A}$ を, 変数 $X_{e,n}$ $(e, n \in \omega)$ の整数係数の多項式全体についての計算可能な可換環 L 構造とする. $\mathcal{A}$ 上の合同関係 $\equiv_{\mathbb{A}}$ を以下で定める実数値の L 準同型 $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ の核 $\mathrm{Ker}(F)$ として定める.[6] $\{T_n\}_{n \in \omega}$ を $|\mathcal{A}|$ の要素全体を枚挙する計算可能列で, 多項式 T_n に現れる変数 $X_{e,m}$ の添字が $e, m < n$ を満たすものとする. $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ は次を満たす L 準同型写像とする:

$$
\begin{aligned}
F(m) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} m && \text{for } m \in \mathbb{Z}, \\
F(X_{e,n}) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{if } \varphi_e(X_{e,n}) \neq 1, \\ 3^{-k} F(T_n) & \text{if } \varphi_e(X_{e,n}) \downarrow = 1 \text{ at } k, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

[6] つまり, $T \equiv_{\mathbb{A}} S$ を $F(T) = F(S)$ が成り立つこととして定義する.

但し, φ_e は e 番目の計算可能部分関数とし, "$\varphi_e(a)\downarrow$ at k" とは $\varphi_e(a)$ の計算がちょうど k 回のステップで停止することを表す e,a,k についての計算可能な関係とする. 定義から F は計算可能な関数, つまり, $F(T)$ は (T について一様に) 計算可能な実数となっていることが分かる.

これで計算可能前 L 構造 $\mathbb{A}=(\mathcal{A},\equiv_{\mathbb{A}})$ が定まった. $\mathcal{A}/\equiv_{\mathbb{A}}$ は $\mathbb{R}$ の部分体 $\{m\cdot 3^{-k}: m\in\mathbb{Z}, k\in\omega\}$ に同型であるから, $\mathbb{A}$ は前体である. 以下, $\mathbb{A}\upharpoonright\{+\}$ が弱 YY 性を持たないこと, すなわち, (i) $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ が計算可能な要素を持ち, (ii) $\mathrm{Cg}(\mathbb{A}\upharpoonright\{+\})$ が計算可能な要素を持たないことを示す.

(i) 関係 $\equiv_0$ を, 任意の $T,S\in|\mathcal{A}|$ について, $T\equiv_0 S$ を $[F(T)<2^{-1}\iff F(S)<2^{-1}]$ であることとして同値関係 $\equiv_0$ として定めると, F が計算可能関数であるから $\equiv_0\in\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ も計算可能である.

(ii) $\equiv_1$ を $\equiv_{\mathbb{A}}$ を拡張する $\mathcal{A}\upharpoonright\{+\}$ 上の計算可能な合同関係とする. $\equiv_1$ が proper でないこと, つまり, $\{T_n : T_n\equiv_1 0\}=|\mathcal{A}|$ を示せば良い. φ_e を前部分加法群 $\{T_n : T_n\equiv_1 0\}$ の特性関数とすると, φ_e は $\{T\in|\mathcal{A}| : F(T)=0\}$ を含む $|\mathcal{A}|$ の部分集合の特性関数である. F の定義 (6.15) より, 任意の $n\in\omega$ について,

$$\varphi_e(X_{e,n})=0 \quad\Longrightarrow\quad F(X_{e,n})=0 \quad\Longrightarrow\quad \varphi_e(X_{e,n})=1$$

となるから, $\varphi_e(X_{e,n})=0$ ではない, つまり, $\varphi_e(X_{e,n})=1$ である. F の定義 (6.15) より, $k\in\omega$ が存在して, $F(3^kX_{e,n})=F(T_n)$, つまり, $3^kX_{e,n}\equiv_{\mathbb{A}}T_n$ となる. φ_e は前部分加法群の特性関数だから $\varphi_e(T_n)=1$ である. 従って, $\{T_n : T_n\equiv_1 0\}=|\mathcal{A}|$ である. □

系 6.7. 言語 $\{\cdot\}$ の (半) 群の理論は弱 YY 性を持たない. 言語 $\{+,\cdot,0,1\}$ の環や体の理論は弱 YY 性を持たない. □

特殊な環であれば YY 性や極大拡張性を持ちうる. 例えば, 体は合同関係として等号しか持ち得ないことから, 極大拡張性が成り立つことが分かる. また, 整数環 $\mathbb{Z}$ のように, ある程度性質の良い整域は YY 性や極大拡張性を持つ. これを以下で示そう.

定理 6.8. 言語 $L=\{+,\cdot,\mathrm{GCD}\}$ について, 可逆元が有限個の GCD 整域の計算可能前 L モデル $\mathbb{A}=(\mathcal{A},\equiv_{\mathbb{A}})$ は弱 YY 性を持つ.

証明. $\equiv_0\in\mathrm{MaxEq}(\mathbb{A})$ を固定する. $\equiv_0$ 計算可能な $\mathrm{Cg}(\mathbb{A})$ の要素の存在を示したい. そのためには, $\equiv_0$ 計算可能な前イデアルの存在を示せば十分である.

有限集合 $F\subset|\mathcal{A}|$ で, 任意の前可逆元 $x\in|\mathcal{A}|$ に対し, $x\equiv_{\mathbb{A}}a\in F$ となる a が存在するものを選ぶ.

$$x\equiv_{\mathbb{B}}y \iff (\exists a,b\in F)ax\equiv_{\mathbb{A}}by$$

$$x\equiv_1 y \iff [(\exists a\in F)ax\equiv_0 0 \iff (\exists a\in F)ay\equiv_0 0]$$

と定める. $\equiv_{\mathbb{B}}\in\mathrm{Cg}(\mathbb{A}\upharpoonright\{\mathrm{GCD}\})$ であり, $\mathcal{B}=\mathcal{A}\upharpoonright\{\mathrm{GCD}\}$ とおけば, $\mathbb{B}=(\mathcal{B},\equiv_{\mathbb{B}})$ は計算可能前上半束で, しかも, $\mathbb{B}$ での上半束に対する前イデアルと, $\mathbb{A}$ での環に対する前イデアルとは一致する. また, $\equiv_1$ は $\equiv_0$ 計算可能な $\mathrm{MaxEq}(\mathbb{B})$ の要素であるから, 定理 6.1 での前上半束の YY 性より, $\equiv_1$ 計算可能な $\mathbb{B}$ の前イデアルが存在する. これは, $\mathbb{A}$ の前イデアルでもある. □

上の定理の条件のもとで, さらに $\mathbb{A}=(\mathcal{A},\equiv_{\mathbb{A}})$ が言語 $\{+,\cdot,\mathrm{GCD}\}$ の前単項イデアル整域であれば, 極大拡張性を持ち, 従って, 弱 YY 性と合わせて, YY 性をも持つことが分かる. 極大拡張性を持つことは次のようにして分かる. まず, 単項イデアル整域 $\mathcal{P}$ では, 可逆元でないような素元 $p\in|\mathcal{P}|$ の生成するイデアル $\mathcal{I}_p$ は極大イデアルであり, $a\notin\mathcal{I}_p$ は, 可逆元 r が存在して $r\cdot\mathrm{GCD}(a,p)=1$ となることとして特徴付けられることに注意しよう. $\equiv\in\mathrm{Cg}(\mathbb{A})\setminus\mathrm{MaxCg}(\mathbb{A})$ に対して, 前可逆元でない前素元 $p\in|\mathcal{A}|$ で, $p\not\equiv 0$ となるものを一つ固定すると, 0 の $\equiv$ 同値類を含むような前極大イデアル $\mathcal{I}_p$ が $\equiv$ から計算される. そして, $\mathcal{I}_p$ からよく知られた方法で極大な合同関係 $\equiv'$ が計算できるが, 0 の $\equiv$ 同値類を含むことから $\equiv$ を拡張する合同関係となっている. 従って, 次が示された.

定理 6.9. 言語 $L=\{+,\cdot,\mathrm{GCD}\}$ について, 可逆元が有限個の単項イデアル整域の計算可能前 L モデル $\mathbb{A}=(\mathcal{A},\equiv_{\mathbb{A}})$ は極大拡張性と YY 性を持つ. □

極大拡張性を持つ環のその他の例としてはアルティン環が挙げられる. このことは, アルティン環はネーター環なので, 任意のイデアルは有限生成であり, また, $a_0,a_1,\cdots,a_n$ から生成されるイデアル $\mathcal{I}$ について, 環の元 b が $b\in\mathcal{I}$ であるかどうかの判定問題が $a_0,a_1,\cdots,a_n$ と環の記述から一様に計算可能であることから分かる. (このアルゴリズムは ideal membership algorithm と呼ばれる. 詳しくは文献 [18] の第 4 節を見よ.)

参考文献

[1] 新井敏康, 数学基礎論, 岩波書店, 2011.

[2] 田中一之, 数の体系と超準モデル, 裳華房, 2002.

[3] 田中一之 編, ゲーデルと 20 世紀の論理学, 第 2 巻 完全性定理とモデル理論, 東京大学出版会, 2006.

[4] 田中一之 編, ゲーデルと 20 世紀の論理学, 第 3 巻 不完全性定理と算術の体系, 東京大学出版会, 2007.

[5] 横山啓太, 吉川紘史, ライスの定理のアナロジーについて, 数理解析研究所講究録, 1729:163-166, 2011.

[6] Raymond Balbes and Philip Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1975.

[7] Vasco Brattka and Guido Gherardi, "Weihrauch degrees, omniscience principles and weak computability", *The Journal of Symbolic Logic*, 76(1):143-176, 2011.

[8] Chen Chung Chang and Howard Jerome Keisler, *Model theory, Third Edition*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1990.

[9] Orrin Frink, "Pseudo-complements in semi-lattices", *Duke Mathematical Journal*, 29(4):505-514, 1962.

[10] Alex Gavryushkin, Bakhadyr Khoussainov and Frank Stephan, "Reducibilities among equivalence relations induced by recursively enumerable structures", *Theoretical Computer Science*, 612:137-152, 2016.

[11] Valery Glivenko, "Sur quelques points de la logique de M. Brouwer", *Bulletin Academie des Sciences de Belgique*, 15:183-188, 1929.

[12] George Grätzer et al, *General Lattice Theory, Second Edition*, Birkhäuser, 2003.

[13] Valentina S. Harizanov, "Pure computable model theory", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics: Handbook of Recursive Mathematics — Volume 1: Recursive Model Theory*, 138:3-114, 1998.

[14] Peter G. Hinman, "A survey of Muchnik and Medvedev degrees", *Bulletin of Symbolic Logic*, 18(2):161-229, 2012.

[15] Serge Lang, *Algebra, Revised Third Edition*, Springer, 2002.

[16] Roger Conant Lyndon, "Properties preserved under homomorphism", *Pacific Journal of Mathematics*, 9(1):143-154, 1959.

[17] Henry Gordon Rice, "Classes of recursively enumerable sets and their decision problems", *Transactions of the American Mathematical Society*, 74:358-366, 1953.

[18] V. Stoltenberg-Hansen and J.V. Tucker, "Computable Rings and Fields", *Studies in Login and the Foundations of Mathematics: Handbook of Computability Theory*, 140:363-447, 1999.