数理解析研究所講究録
第2050巻 2017年 100-122

Barwise のモデル論的意味論の周辺と抽象設計学
Relating the abstract design theory to Barwise's model theoretic semantics

慶應義塾大学名誉教授 向井 国昭
Kuniaki Mukai
Keio University, Professor Emeritus

要旨

角田譲追悼研究集会[*1]における同タイトルの口頭発表の内容を記録・補足する．抽象モデル理論としてのチャンネル理論を振り返り，角田が提唱した抽象設計論を契機とするチャンネル理論の新たな可能性を考察する．付録として，チャンネル理論とトポスに関連する命題を追加した：分類と情報射全体の成す圏 $\mathscr{C}$ の部分圏として，自然なタイプ演算を持つ分類とその間の情報射全体のなす elementary トポス $\mathscr{T}$ を構成し，さらに $\mathscr{T}$ から $\mathscr{C}$ への忘却関手が左随伴関手を持つことを示す．

1 はじめに

本稿は，角田譲先生（以下「先生」は省略）の追悼研究集会における筆者の口頭発表の記録と補足である．まず，角田の研究に関連する研究者から3人，筆者の個人的興味と関わりの視点から J. Barwise, P. Aczel, A. Colmerauer を選び，その研究を簡単に紹介する．次に，抽象モデル理論としてのチャンネル理論を振り返り，いくつか再考察する．最後に分類圏とトポスに関連する命題を立て，詳細に証明する．用語や記号の定義はあとまわし（節4）にして述べると，まず分類の間の情報射をトークンとして扱うために適切な'情報射'タイプを導入する．ふたつの位相空間の間の写像全体に位相をいれる手法 [52] を参考にした．さらに情報射のタイプを増やして，情報射適用 (apply) が情報射として構成できることを示す．すなわち巾対象の存在を示す．巾の存在から次の命題が得られる．分類圏 $\mathscr{C}$ の部分圏としてトポス $\mathscr{T}$ を構成し，さらに忘却関手の左随伴関手となるように $\mathscr{C}$ から $\mathscr{T}$ への関手を構成する．トポスは集合と関数の圏 **Set** の一般化であるから，この命題は，分類圏が **Set** のように自然であり，豊かな記述力を持つことを示唆すると考えられる．

数学用語は数学辞典 [54] による．圏論については Mac Lane[26] に従う．圏論は [46, 72,

[*1] 数学基礎論とその応用研究集会 2016/09/26～29 京都大学数理解析研究所

41, 27, 47] を参照した.「圏論の歩き方」[46] は, 異分野の概念を機能的に統合する圏論の様子などが興味深く解説されている. 数学において, 集合と関数のなす有向ネットワークの帰納的極限および逆極限の存在は基本的である [51]. 圏論ではそれぞれ余極限 (colimit), 極限 (limit) という. 余極限は 節 3.4 でも述べるように, チャンネル理論でも使われる. トポスについては [23, 47] を参照する. 分類と情報射などのチャンネル理論 [12] の基本定義を節 4.2 にまとめる.

圏論とトポロジーが工学上の応用にも使える技術であることが玉木 [48] に平易に解説されている. 必要となるホモトピー計算の基礎のひとつに胞体分割がある. 胞体分割にはモース理論 [56, 57, 39, 50] が使われる. ホモトピー計算のこれら一連の仕組みは, 分類を特徴付ける指標, いわば「分類圏上のホモロジー論」の構築の雛形として注目される. 分類圏のホモロジー論の構築に向けて, 幾何学的な考え方は大森 [66, 65] が参考になる. たとえば, 群作用の軌道の解釈がおもしろい. 群の既約表現がなぜ素粒子論と対応するのかを, 同一視の認知行為まで掘り下げて分析している.「無為 (何もしない)」の意味付けの難しさの指摘もある. ベクトル空間と線形写像からなるネットワークは線形写像の向きを形式的に逆向きにすると, 分類と情報射のネットワークである. 微分幾何学におけるファイバー束および接続 ([55]) などの幾何学的な概念構成は, 分類圏上のホモロジー論構築のヒントになるだろう.

確率論を使う分野への適用がチャンネル理論の試金石になると考えられる. たとえば, 機械学習への応用である. 機械学習については [53, 44] を, 深層学習については [68] が詳しい. 量子力学も確率論と密接である [60]. [70] など量子コンピュータの考え方がよくわかる入門書も身近にある. 量子情報の数理については [59, 58] を基本文献とする. 圏論と量子力学への量子力学への応用については, 淡中双対定理に基づくミクロ・マクロ双対性などの詳しい解説が [61, 46] にある. Effectus[22] は, 圏論による量子計算と確率の統一の最新の理論である. BS(以下 BS)[12] も量子論理に一章を割いている. ニューラルネットモデルなどの分類器も広い意味で確率と関係している. 脳を分類器あるいは分類器のネットワークとみなせば, 節 3.9 の選好でふれるように, チャンネル理論による脳モデルは取り組むべき自然な研究テーマにみえる. [40] にはエピソード記憶の驚くべき数学モデルの解説がある. しかも解剖学的に裏付けられているという. 現実の脳内に, コッホ曲線のような純粋数学にしか現われないと思われていた至る所ところ微分不可能な連続関数が登場するということだ. チャンネル理論による脳のモデルは, このエピソード記憶をうまく記述および説明できるか, 具体的な試金石として興味深い.

本稿の構成は次のとおりである. 節 2 では 4 人の研究者, 抽象設計論の角田譲 (2.1), チャンネル理論の J. Barwise (2.2), 反基礎集合論の P. Aczel (2.3), 論理プログラミング Prolog を発明した A. Colmerauer (2.4) を選び, 筆者の視点から研究内容を簡単に紹介し, 若干の思い出を加える.

節 3 は, チャンネル理論の基本概念ををさまざまな視点からコメントする. とりあげたトピックスは次のとおりである. 括弧内は節番号である. 遠隔推論 (3.1), 関係とチャンネル (3.2), 制約 (3.3), 普遍被覆 (=余極限) 計算 (3.4),「数学の大統一」から (3.5), データベース (3.6), 分類と Chu 空間 (3.7), 学習 (3.8), 選好 (3.9), 分類圏のホモロジー論 (3.10), 正則論理 (3.11).

第 4 節は, 分類圏の中にトポスを構成する命題とその証明である. 分類圏が集合圏 **Set** のように自然かつ良い性質を持っていることを示していると考えられる. 節 4 の構成は次のとおり

である. 証明の概略 (4.1), 分類と情報射 (4.2), 分類の和 (4.3), 完備分類と完備化 (4.4), 商分類と外延化 (4.5), 完備分類の和 (4.6), 巾分類の構成 (4.7), 情報射適用 (4.8), 情報射のカリー化 (4.9), 情報射適用 (apply) の性質 (4.10), 分類圏のトポス性について (4.11), 惑星系メタファによる分類圏の位置付け (4.12).

2 チャンネル理論と 4 人の研究者

抽象モデル理論としてのチャンネル理論ゆかりの研究者から, 筆者の視点で 4 人を選びその研究の一部を紹介する.

2.1 角田 譲

1980 年前後, ある雑誌の集合論関連の記事の中で, 内包的オブジェクトを添加した集合の世界を提唱している研究者として, 角田譲が紹介されていた. 当時筆者はモンタギュの言語意味論 [32] を勉強中であった. たとえば, 「明けの明星」と「宵の明星」は外延 (Bedeutung) は等しいが内包 (Sinn) は異る, と説明されるような言語の意味論である. 集合論に内包を添加するというのは, Kripke 流の可能世界と関係しているのだろうかと興味を覚えた. その後 1990 年代半ばに知己を得て, 論理の教科書 [71] など著していることを知った. ロジックに興味はあるが専門家ではない筆者にとっては, 別格のロジシャンであった.

そのような碩学が始めたのがチャンネル理論を使った抽象設計学である. 抽象設計学とはなにか? たとえば, ソフトウェア設計にも概念設計, 機能設計, 論理設計など, さまざま設計がある. それらの設計を文字どおり抽象化したものだろうか? また, 造船や航空機の設計のような, 制約充足問題 [69] としての設計と角田の抽象設計とはどうつながるのか? あるいは, 節 3.4 および節 3.9 で述べる「分類圏上の分散ネットワークの普遍被覆 (=余極限)」が, どう使われているのだろうか? いずれにせよ, 設計という広く異分野にまたがある基本的な概念をきちんと定式化しようという精神こそ大事であり, 受け継がなければならない. なお, 抽象設計学の共同研究者の菊池が一般設計学と抽象設計論に関して, 哲学および数学の両方から詳細に考察している [74]. 今後の設計学に欠かせない貴重な考察が記述されている.

非整礎集合論について, urelement に関する技術的な筆者の勘違いを, 角田に, 親切に訂正していただいたことがある. はっとすると同時に敬意を覚えた. 非整礎集合論や, 固有クラスの使用については, 数学基礎論の研究者は, 安全衛生的な傾向が強いのか, だいたいは消極的あるいは否定的であるように感じる. しかしすぐあとに続く三人の紹介でもふれるように, どちらも応用上は大変便利である. 角田は数学基礎論の応用に積極的であったようだ. 抽象設計論のような新分野を始めたこともうなずける. また, 開放的・民主的であった. ある会食での談笑の折, 循環集合を認める集合論の応用にはなしが及んだとき, 「モデル論は民主的である」として喜んでいた. 集合論のいろいろな宇宙を研究してきた実践からくる本音の感想だろう. 数学基礎論の応用について, 角田精神は将来に引き継がれてほしい.

2.2 J. Barwise

Barwise は抽象モデル論, 無限論理, 弱い集合論の上での計算論, モンタギュ意味論, 状況意味論, 状況理論, チャンネル理論などの研究で知られる. 数理論理学のハンドブック [14] を編集し, また, モデル論的ロジックのハンドブック [11] を Feferman と共同編集している. 自然言語の意味論にも強い関心があり, Mostowski の一般限量子理論 [33] を自然言語へ応用した, Robin Cooper と共著の一般限量子理論などがある. 解釈おける割り当て (assignment) の拡張可能性に基づく, 照応に関する研究もある [8]. 動的意味論や可能世界意味論とも関連性が深い研究である.

哲学者 J.Perry と「状況と態度 (Situations and Attitude)」[38] を著し, 「文の意味は状況の間の関係である」のスローガンを掲げ関係意味論を提唱した. 対象の同一性の信念や矛盾した信念を抱くこと, いわゆる「明けの明星・宵の明星」問題に Austine 命題を使って取り組んでいる. 状況意味論の Complex Indeterminate(CI, 構造化不定元) は H. Kamp の談話表現構造 (DRS) と似ている. 筆者はこのことに興味を持ち, CI を組み込んだプログラミング言語 CIL を論理プログラミング言語 Prolog の上に試作した [34].

その後, 状況意味論のメタ理論としての状況理論を始めた. 命題, 事態, 状況, 型, パラメータ, 不定元, 制約, 意味論の宇宙, などの自然言語の意味を構成する部品のモデルを構成している [6]. 状況理論自身は, P.Aczel の反基礎公理 (AFA) 集合論で記述されている. 状況理論の成果は, 研究集会報告集 [2, 29, 6] に収められている.

Barwise は, 共有知識の循環構造など非整礎構造の観察から, 現実世界に P.Aczel の非整礎 (non-well-founded) な状況が実在していると主張した. そして非整礎な状況の直接的なモデル化のため, 状況意味論のメタ理論として, 状況理論を作った. 「悪循環」[10] で「嘘つき文」のような循環命題に対する Austin モデルと Russel モデルが, AFA 集合論に基き比較されている. 前者は文の内容をタイプとトークンを一体化する. Ausutin モデルの優位性が結論されている. このように, Barwise にとって Aczel の反基礎 (AFA) 集合論は, 超 (hyper) 集合論と命名したように, 特別であった.

状況意味論の状況, 事態, 制約という枠組みを, トークン, タイプ, 情報射, 局所論理という形に整理し再構成したのがチャンネル理論 [12] である. 状況意味論がチャンネル理論の背景理論である. 状況とは世界の一断片である [38] という部分性の視点も引き継がれている. 1997 年インディアナ大学のあるセミナーで, この本を手に, いい本が書けたとほほずりしながらうれしそうに紹介していた. そのときの講義で, 分類の構成要素は, トークンとはセンサーのようなもの, あるいはセンサーと接続するポートのようなものであるというイメージの説明があった. この説明によれば, センサーが分類であることなど, 身のまわりの多くのものが自然に分類とみなせることがわかる. 分類について, 節 3 でもふれる.

Institution 理論 [20] の Goguen によれば, チャンネル理論は, Institution 理論と同じく, モデルの間の関係を論ずる抽象モデル論の一種であるという. 「チャンネル理論は易しくてありがたい」と, 角田から筆者への私信の中にあった. フォーマルに書けば短かく気持良く書けるのに, ロジックに詳しくはない読者層のために, 平易に書いている. その力量と態度に敬意を払ってのことだろう. 一流の人は一流の人の作品の価値を理解できるのだと思った.

なお, チャンネル理論の分類は集合と所属関係の一般化でもある. 分類圏は, 状態空間と射影

の圏と随伴の関係にある ([12] の第 8 章状態空間). この対応で, 情報射はプロセス理論でいう模倣関係 (simulation) であることもわかる. 分類圏は隠れたプロセス理論でもある. なお, 山田 [49] は状態空間圏と分類圏のこの双対性に着目し, 言語行為論の記述に同双対性を適用する構想を発表している.

Barwise は, 構文論は意味論の一部であると考えていたと思われる. 文法は記号列の集合を規定するが, 集合のような構造を持つものの集まりを規定するものを文法であると考えた. 実際, 弱い集合論 (KPU) 上の計算論を研究している [7]. 文法は集合上の計算可能関数であるからには, 2 次元の視覚情報にも構文がある, としてベン図など視覚情報についての構文論として提唱した. このように, Barwise や Aczel の研究をふりかえると, 集合を構造化オブジェクトとみる考えがみえてくる. 数学基礎論がもっと注目してよい応用の方向だと思う.

ところでチャンネル理論には, ところどころ圏論的構成が暗黙的に使われている. チャンネル理論出版の何年か前に, カリフォルニアで, 彼に「圏論は好きか」とたづねたことがある. デザートとしては好きだがメインディッシュとしての圏論はあまり好きではない, という返事であった. 私見であるが, 圏論のことばで表現しなおせば, チャンネル理論はもっと分りやすくなり, 他の関連する基礎理論たちとの建設的な比較ができるだろう.

2.3 P. Aczel

Aczel[1] は Milner の非同期プロセス理論 [31, 19] の状態遷移関係を集合論のメンバシップ関係 ($\in$) として解釈した. しかし, ZFC では循環集合は許されないので, 状態遷移を永遠に続けるプロセスを集合で表わすことができない. これを克服するために, ZFC の基礎公理 (FA) を捨てて, ある種の集合等式系が常に解をユニークに持つという反基礎公理 AFA を導入する. AFA により例えば $x = \{x\}$ なる循環集合も存在する. なお, 例 4.1 で述べるように, Aczel[1] は, 集合全体のクラス V など, 固有クラスも扱う. たとえば, 巾クラス関数 pow の引数はクラスであり, $\mathrm{pow}(V) = V$ である. クラス関数が set-based で単調ならば最大および最小不動点クラスが存在することを示す. Aczel と Mendler は, その後, set-based で単調な V 上のクラス操作 F に関する終余代数定理を証明した [3]. 終余代数定理は述語論理の項のようなさまざまデータ構造を集合論で議論することを可能にする.

Aczel はクラスのクラスなど巨大な圏の扱いについては Adámek[4] を参照している. Aczel は巨大クラスの使用の危険性を心配していない. 集合論では, ある到達不能順序数までのランクの集合でモデルが作れるからである. みかけの危険性よりも, アイデアの明晰性を重視している.

AFA を特別視せず集合論のいろいろなモデルを許容する Aczel の姿勢は, モデル論は民主的とよろこぶ角田と通じるものがある. AFA を満たす集合論を Barwise は超集合 (Hypersets) 呼称した. しかし, Aczel は, その名前は好きではないと筆者に言っていた. Aczel 自身にとっては終余代数定理がより大事な結果であるとのこと. 同定理は, AFA を仮定せずとも, 標準の ZFC 内で集合の多様な世界を一挙に保証することができるからであろう. 集合の多宇宙を認めるという精神において, Aczel は '角田民主主義' 的である.

2.4 A. Colmerauer

Colmerauer は論理プログラミング言語 Prolog を作った [28]. Colmerauer の Prolog の単一化は, 定理証明論における伝統的なロビンソン流の最汎単一化子ではなく, 解形式から出発点している [16, 15]. 解形式と, Aczel の公理 AFA の定義に用いる等式系とは, 形式が驚くほど似ている. 適切なオペレーションに関する余代数であることを知ったのは Aczel[1] からである. 筆者は長年論理プログラミングに関ってきたが, 余代数を知ったときのその便利さに驚いた. あれから約 20 年後, オープンソース SWI-Prolog の C 言語組み述語 variant (=@=) の改良という貢献をした. それまでの変数の出現に関する制限を排し, 効率のよい, しかも正当性は余代数の一般論で保証されている. SWI-Prolog[37] のコンパイラーの裏方として動作している. 次は述語 =@= の使用例である.

```
?- f(X,X,Y) =@= f(Y,Y,X).
true.
?- X=f(Y, A), Y=f(X, A), X =@= Y.
true.
?- X=f(Y, A), Y=f(X, B), X =@= Y.
true.
```

Colmerauer, Aczel, Barwise の三人は, 筆者の中では, 余代数の糸でしっかりつながっている. 実際これら三者の理論を借りて, 筆者は博士論文 [34] を書いた.

3 チャンネル理論再訪

数学では, 論理学・圏論と一体化した集合論が, 数学全分野の共通の記述言語となっている. 一方, インタネット, ユビキタス, データベース, マルティメディア, ビッグデータ, セキュリティ, 論理プログラミングなど, 情報処理技術はますます拡散発展している. 情報処理に深く関わる隣接分野の 脳科学, 心理学, 言語学, 自然言語も同様であろう. さらに, 量子情報通信 [30] などの新らしい分野も現われている. 集合論が数学を効果的に束ねてきたように, チャンネル理論 (BS[12]) が, 拡散発展する情報系分野の共通言語として使えないだろうか? チャンネル理論は, 情報系のメタ言語としてバランスがとれているのではないだろうか? このような予想と期待をこめて, チャンネル理論と関連理論からいくつかトピックスを選び解説する.

3.1 遠隔推論

チャネル理論は,「風が吹けば桶屋が儲かる」のような文の意味を説明するためのモデルである. 時空的に離れた状況の間の情報の流れの枠組みである. 集合論が $\in$ および $=$ を基本関係とするように, チャンネル理論の基本関係は, 支持関係 $\models$ である. 状況意味論の $x \models a$ (状況 x が事態 a を支持する) を一般化した関係である. 「情報を運ぶ」,「情報が流れる」などはすべてこの基本関係から組み立てられる. とくに, Dretske の情報の意味 [17] に強く影響されており, 情報の流れの基本型を, $x \models a$ carries the information that $y \models b$ とする. つまり,

$x \models a \Longrightarrow y \models b$ を, 証明論でいうところの判断 (judgment) 形式とする. 角田の抽象設計論も, 遠隔の状況間の推論を伝統的な一階述語論理による定式化から出発している.

Dretske 流の情報の流れの定式化のためには, 位相空間論における連続写像のような写像が必要である. 位相空間には点集合および点を分離するための開集合系が与えられる. ふたつの空間の間の点写像 f は開集合の逆像が開集合であるとき連続と定義される. チャンネル理論の情報射も連続写像とほとんど同じである. 開集合こそタイプに一般化されているが, 情報射の定義はあとで正確に述べるように, 連続写像を随伴的に書き換えただけである. しかし, 随伴的な定義の効果で, 分類間の情報の流れが双方向にバランスよく「流れる」しかけになっている. 意味の関係性を重視する Barwise[38] らしい定式化である.

3.2 関係とチャンネル

集合論では, 関係 R とは集合の直積の部分集合である. a と b が関係 R にあるとは, たんに順序対 (a, b) が集合 R に属すことである. 大変明快な定義である. 集合論の大きな貢献のひとつは, この関係概念を定義したことである, と筆者は思っている. 関係の特別な場合として関数概念が定義される. ジャン・デュドネのことばと記憶するが, 集合と関数があればどんな数学も記述できるし, なければなにもできない.

関係と関数に対応するのは何であろう? 私見であるが, チャンネル理論においては 2 項チャンネルが, 集合論の関係に該当し, 一般には分散ネットあるいは錐が多項関係に該当している. 2 項チャンネルの定義を, 直積の部分集合としての関係を較べてみると, チャネル理論の関係はグラフ理論のリンクのように具体的であることがわかる. 素朴かつ神秘的な'赤い糸'としての関係概念の復活とも考えられる. 一方, 集合論に関数に対応するのは, 状態 (tate space) であろう. ただしチャンネル理論では状態は分類の双対として定義される. つまり異なる圏に棲む対象である. 現時点でこれ以上のことは筆者には分からない.

3.3 制約

タイプの集合 Γ, Δ の順序対をシーケントとい $\Gamma \vdash \Delta$ と書く [12]. $\Gamma \vdash \Delta$ の意味は, 通常のロジックのとおりである. シーケントからなり, ID, Weakening, Global Cut で閉じている集合を正則理論という. 与えられた制約を満たす普遍分類が存在する. その構成はタイプのすべての解釈からなる 2 進意味木を用いる. 定理証明の分解法の完全性の証明にも使われる標準的な構成である. 正則理論は大域カットを許すので, 通常の有限カットを使う証明論との関係が気になる. さいわい正則論理の保守拡大性が成り立つことが証明される (未発表). なお, [12] の中で, 制約を情報射に沿って動かす操作と, その移動操作の完全性および健全性について詳細に記述されている. 正則理論を局所的に与える枠組みは他にはみられない. チャンネル理論独自の特徴であろう.

制約はタイプからなるシーケントの集合であったから, データとしてシーケント上の操作ができる. この特徴を活かすと, 情報の流れの性質についての議論ができる. たとえば, 図を用いると なぜ情報が効率よく伝わるのか, いわゆる, 情報ただのり (free ride) 現象はどういうメカニズムで起こるのか? 下嶋 [36] は分類, 情報射, 局所論理を 使ってこれらの現象を説明するモデルを詳細に展開している. 例えば, 局所論理が'ホーン節論理'(シーケントの右辺がたかだ

か一個のタイプ) なら, 「ただのり」現象が起きるなどの分析が得られる. 局所論理の意義を示すとして, 下嶋の理論は BS[12] の中でも高く評価されている.

3.4 普遍被覆計算

BS[12] は分散システムの意味論の基礎となり得る. ひとつの理由は, 分類と情報射のなすネットワーク D には, 余極限 (colimit) L が常に存在することである. L を問題 D の解, あるいは意味と解釈する.

数学の地味な定理の一つに, 任意の関数系に対する射影的極限および帰納的極限の存在定理がある. やさしい集合論で容易に証明される定理である. チャンネル理論でも, 分類と情報射からなる系に対して普遍被覆 (=帰納的極限=余極限) の存在が証明される. この普遍被覆定理の証明は, 関数系の場合とまったく同様である. 極限/余極限は実数順序に関する最大元/最小元の一般化であるから, チャンネル理論では最大/最小原理が使えるともいえる. この「普遍被覆定理」を用いて, たとえば, 論理プログラミングやデータベースなどの意味論を再構成できる.

普遍被覆は 分散システムと制約の意味つまり解空間と解釈できる. 分散システムと制約から それらの 普遍被覆をを構成するプログラミングは難しくない. 実際次の実験的 CGI `http://web.sfc.keio.ac.jp/~mukai/paccgi7/ds-cover.html` は, 分類と情報射からなる規模の小さなネットワークの普遍被覆を計算して表示する. 普遍被覆の計算は, まずトークン集合の直積を構築し, 制約を適用してフィルタリングする. 磨けばチャンネル理論のための小規模実験道具としては使えるだろう. ソースコードは SWI-Prolog のパッケージ (名前=pac) としてすでにオンライン公開している.

3.5 「数学の大統一」から

情報系の分野の統一言語の有力候補としてチャンネル理論に期待していることは既に述べた. 参考に, 「数学の大統一」[73] をみてみよう. 内容は, 異分野の思わぬ統一のパターンが分かり易く解説されている. ラングランズ・プログラムとも呼ばれているものであり, 数学のみならず数学と物理の '超統一' までも視野に入れている. 黒川 [77] にもガロア群とその表現の視点から, ラングランズ・プログラムが解説されている. その中で群 SU(3) の既約表現が, Witten のゼータ関数を通じて, 物理の素粒子の系列と見事に対応していることが, ひとつの練習問題とその解答の形で示されている. 素粒子論の難解な理論の帰結が, 群の表現理論を使うと, 数頁でスラスラ導出されるのは驚きである. おなじく黒川 [77] は, 群そのものでなく, 群のはたらきすなわち群の表現論に視点を移す重要性を説いている.

数学および物理の統一で, 群の表現あるいは双対性原理が指針となっているように, チャンネル理論に情報系の統一の指針になるような原理はあるだろうか?

まったくの私見であるが, 情報系の問題を分類圏で考えることが情報系の原理となるのではないだろうか? 分類圏では普遍被覆定理, すなわち最小原理で問題の意味を定義し, 解を情報射とする原理である. 「選好」の節 3.9 は原理のひとつの雛形の考察である.

3.6 データベース

関係データベースのスキーマ, 統合制約チャンネルは関係概念の一般化であり, かつリンクの集合でもある. タイプや制約や論理もチャンネル理論の基本である. 関係データベース [64] のスキーマ, 統合制約 あるいは, entity-relation の記述には十分の表現力を持っている. 論理プログラミング言語に対しても同様である.

3.7 分類と Chu 空間

Chu 空間 [21] は行列である. 行列の要素は与えられた体の元である. したがって, 行列どうしの足し算や掛け算ができる. テンソル積など豊富な空間演算を持っている. Chu 空間は数学の双対性 (duality) 探求に発する. 計算機科学者 V. Pratt[35] らにより, 並列計算モデルに応用・開発されている. チャンネル理論の分類は, 形式的には Chu 空間の行列要素が真偽値 $(0, 1)$ に退化したものである.

Gupta[21] は, Chu 空間を非同期プロセスのモデルとして考察している. Chu 空間と Chu 写像の概念は, 射の向きが逆であることを除けば, 分類と情報射のそれとほぼ同じである. プロセス理論を背景に持つ Chu 空間論と言語意味論を背景を持つチャンネル理論が独立に開発されたにもかかわらず, ほぼ同一の枠組みを持っている.

3.8 学習

学習理論の応用と理論の進展はめざましいものがある [63, 5, 43, 67]. 学習理論は, 広い意味で分類を対象とするが, チャンネル理論を適用した例はまだ見られない. チャンネル理論の対象は分類であるので, チャンネル理論で「学習」はどう定式化されるだろうか. それは今後の課題であるが, ここでは, チャンネル理論による定式化について予備的な考察をしてみよう. 学習とは 4-組 $L = (A, X, E, f, n)$ であるとしよう. ここで, $f\colon A \times X \to \mathbb{R}$ は観測関数, $E\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は ‘エネルギー関数’ である, n は自然数である. n 回の試行 x_i に対して観測値 $v_i = f(a, x_i)$ が得られたとする. 最尤推定法によれば, $E(v_1, \ldots, v_n, a)$ を最大にするような a を決定することが解である. それには変分法などさまざま数学的手法が使えるだろう.

この学習モデルは数値計算的である. 一方, チャンネル理論では, 系 v_i に相当するのは 確率空間としての分類の発展系となるだろう. 確率空間はそもそも分類であったから, 学習過程を確率空間がダイナミックに変化していく過程であるとみるのは自然である. チャネル理論は普遍被覆定理が成り立つから, 学習の意味は, エネルギー関数 E に対応するものとして, 系 v_i の普遍被覆として定式化できるだろう. つまり, 数値列が分類のネットワークに一般化され, そのネットワークの普遍被覆が学習の意味出力となる. なお, 伊藤清のマルチンゲールによる確率過程論 [62, 75] は可測集合の単調増加列を用いており, 可測集合は分類であるから, 形式的にはチャンネル理論と重なる.

確率空間はすでに学習にも用いられている. 確率空間を分類に言い換えただけに終るのではつまらない. しかし, チャンネル理論は局所論理という「推論」を持っている. 確率計算だけではないロジックベースの学習理論が得られると期待する.

学習理論は, 選好理論や設計理論など他の応用分野とも重なる. そのためにも, 学習理論ないしそのためのチャンネル理論へのダイナミックスの導入はチャンネル理論の今後の試金石である. 応用分野角を開拓する上で, 角田の抽象設計論は貴重な糸口を示してくれた.

3.9 選好

坂原・佐藤 [42] はチャンネル理論を基礎に選好理論を解説している. 選好の 3 要素を知識・欲求・観察なる分類とし, 欲求と観察それぞれから知識に向う情報射が形成されること, すなわち知識を中央とする 2 項チャンネルの形成を選好としてモデル化している. 制約から普遍分類が作れたから, 知識・欲求・観察は制約であるとしてよい. 選好行為は情報射の構成であるというアイデアがポイントである. 例として「甘いジュースは好き」しかし, 「甘いジュース, ゴキブリ入りはだめ」という選好の非単調論理的な現象をチャンネル理論を基礎に説明している.

BS[12] はチャンネル理論の日常言語の非単調論理性の説明に力を入れている. 人工知能のフレーム問題の回避のために, 帰納論理あるいは仮説推論 (abduction) の研究も盛んである. 実際, Google の衝撃的な, 世界のトップレベルの棋士 をすでに凌駕したと言われるアルファ碁の開発には, 帰納論理の研究者 R. Goebel の研究室出身の学生 4,5 人が参加していると聞いている.

人は仮説的推論, 感情, 感性で行為する. 演繹だけでは動かない. またフレーム問題はひとつのモデルの中の問題である. チャンネル理論やその前身である状況意味論では, 世界の断片としての分類あるいは状況, 言い換えると多部分モデルを対象とするので, フレーム問題はそもそも存在しないと考えられる.

3.10 分類圏のホモロジー論

モノを「分ける」ということは生命体にとって必須の能力である. 獲物かあるいは捕食者かの見分けはまさに命懸けの分類である. 分類の数学理論は, オイラー標数に始まり, ポアンカレが始めたとされるトポロジー (位相幾何学) である. 玉木 [48] にトポロジーとくにホモトピー論の概要と意義が分り易く解説されている. 純粋数学のトポロジーが画像認識など工学的な問題に実際応用されていることも分かる. モデル圏も含めて進んだ話題もとりあげられている. ホモロジー論は, 形式的には, 曲面など幾何学的対象とそれらの間の幾何学的写像のなす圏を他の圏, たとえば, 線形空間と線形写像の圏へ移す関手の研究としてとらえられている.

分類と情報射のなす圏すなわち分類圏は, 位相空間と連続写像のなす圏の一般化と考えられる. それでは分類圏上の 'ホモロジー論' は可能か? 玉木 [48] などによれば, グラフや圏のホモロジー論も開発されている. したがって分類圏上のホモロジー論も期待している. 中沢 [45] はホモロジー計算をするこころ (心) のモデルをを提唱している. 分類圏上のホモロジー論は現時点では雲をつかむような夢想に過ぎない, しかし, 分類圏のホモロジー論を構築する過程で, 逆にこころのモデルが浮びあがってくることも期待される.

次のモース理論によるホモロジー計算の例は, 分類圏上のホモロジー論の最初のヒントとして, 注目している. G 群として G-集合 X は自然に分類と見なせる. G の元は X から X への関数であり, 関数は分類の特別な場合である. 実際, チャンネル理論 [12] では関数を状態空間と言い, 状態空間とその間の射影 (projection) とよぶ射の圏を状態空間の圏と称して, 分類圏との

関係を詳しく調べている．明示的にこそを述べられてはいないが，状態空間圏と分類圏の間の随伴性を記述していることは明白である．これを念頭に，$h\colon G \times X \to X$ を G の X への作用とし，分類 A_G を $\mathrm{tok}(A_G) = X$, $\mathrm{typ}(A_G) = X$, $x \models_{A_G} y \iff \exists g \in G\, h(g,x) = y$ で定義する．状態空間 S_G を $\mathrm{tok}(S_G) = G \times X$, $\mathrm{typ}(S_G) = G \times X$, $(g,x) \models_{S_G} y \iff h(g,x) = y$ で定義する．

G-集合 X が分類であることを使うと，次のように多様体のホモロジーを分類のホモロジーと見なせる．多様体のモース理論 [56, 57, 39, 50] によれば，多様体 M 上のモース関数が与えられると，勾配ベクトル場が決まる．勾配ベクトル場から 1 パラメータ変換群 G が決まる．G により M は互いに交わらない軌道の集合に分割される．その分割から M は胞体に分割され．胞体に分割されるとホモロジーやホモトピーが定義できる．M の点 x が時間 t 後に点 y に移るという関係の原因とみれば，G は分類とみなせる．ここに現われる胞体分割を分類のホモロジーの雛形と考えている．

3.11 正則論理

チャンネル理論に用いられている正則理論を他に変更することは可能だろうか？ 正則論理の公理，その中で特に大域カットは，与えられた制約から普遍分類を構成する根拠である．一方，大域カットは普遍分類の構成を保証するためだけに使われているように見える．ただし，普遍分類は分類のブール化にも使われている．チャネル理論の特徴は，正則理論に基いた局所論理を持っている点である．この点で他の枠組み (Chu 空間, Institutions, Locale, Information System (D.Scott)) とは異なる．局所論理に用いられている大域カットなど推論規則の意味や意義について，筆者には不明である．なお局所論理の大域カットは [18] 由来であることが [12] に記されている．

4 分類圏とトポス

数理論理学のモデル論は集合論に支えられているといっても言い過ぎではないだろう．チャンネル理論は自然言語意味論のために開発されたモデル論であるが，基本は集合論である．チャンネル理論は，タイプとトークンの 2 層に分け，タイプ集合に演算を導入し，その演算の意味は支持関係で定義する．特徴のひとつであろう．ブール演算の導入が一例である．演算の性質を公理的に記述する手間が省けて便利である．Barwise は言語自体も集合論化する．そもそも無限論理の研究から出発している [13, 24]．チャンネル理論の局所論理として使われる正則理論は，無限個のタイプからなるシーケントを許す点は，まさに無限論理である．

さて，どんな圏も米田補題を使って，トポスに埋め込めることは良く知られている [47]．しかしながら，モデル記述の枠組みとしての分類圏の特徴を体験してみたい．一例として，分類圏の部分圏として具体的にトポスが作れるだろうか？ 本節は，そのために情報射のタイプ射がトークン射に支配されていることを，まず確認する (命題 4.6)．集合と関数の圏がトポスをなすことは，具体的でほぼ自明な事実であるので，トークン射の情報射に対する‘実効支配’を使って，この事実を情報射へリフトする．これが証明の基本方針である．本節の証明が，米田埋め込みの系として簡単に，あるいは自動的に得られるのかどうか，筆者には不明である．本節は分類圏の

ホモロジー論構築というスローガンの実現に向けての準備体操のつもりであった．長い準備体操になってしまった．

以下，トポスの定義は既知とする [23]．分類圏 $\mathscr{C}$ の部分圏として，あるトポス $\mathscr{T}$ を構成し，$\mathscr{T}$ から $\mathscr{C}$ への忘却関手 G の左随伴関手が存在する．この意味で分類圏は実質トポスである．

証明は ZFC 集合論の宇宙 $\mathbb{V}$ の中で行う [25]．通常どおり $\{x \mid p(x)\}$ は性質 $p(x)$ を満たす x 全体のクラスを表わす．$\mathrm{pow}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{S \mid S \subseteq X\}$．$\mathrm{finpow}(X)$ で X の有限部分集合全体を表わす．集合 X から集合 Y への関数全体を $\mathbf{Set}(X, Y)$ で表す．

4.1 証明の概略

目標は分類圏 $\mathscr{C}$ が実質的にトポスであることの証明である．$\mathscr{C}$ の対象を分類 (classification) という．分類圏 $\mathscr{C}$ は，巾の存在以外は elementary トポスの定義条件を満たしている．よって証明すべきは巾分類の存在のみである．残念ながら簡単な反例により，一般には巾分類は存在しないことが分かる．位相空間でいう開集合の共通部分演算の相当する演算がないために，$\mathscr{C}$ の分類のタイプが少ないことが理由である．

巾の構成のために，まず分類圏 $\mathscr{C}$ の部分圏として以下のようなトポス $\mathscr{T}$ が存在することをいう．トポス $\mathscr{T}$ には，対象 A, B の '直積' $A \oplus B$ および，$\mathscr{T}$ の対象 A, B の巾対象 A^B，さらに情報射適用 $\mathrm{ev}\colon C \rightleftarrows C^B \oplus B$ が存在する．それらは巾の特徴付けの性質を満す．すなわち，$\mathscr{T}$ の任意の情報射 $h\colon C \rightleftarrows A \oplus B$ に対してカリー化情報射 $\mathbf{K}_h\colon C^B \rightleftarrows A$ がユニークに存在して，$h = (\mathbf{K}_h \oplus \mathrm{id}_B) \circ \mathrm{ev}$ となる．

次に，$\mathscr{C}$ から $\mathscr{T}$ への関手 Γ を構成する．$\mathscr{C}$ の射 $h\colon C \rightleftarrows A + B$ に対して，$\Gamma(h)\colon \Gamma(C) \rightleftarrows \Gamma(A) \oplus \Gamma(B)$ が，関数適用射と $\Gamma(h)$ のカリー化の合成に一致する：$\Gamma(h) = (\mathbf{K}_{\Gamma(h)} \oplus \mathrm{id}_B) \circ \mathrm{ev}$．(巾を特徴付ける命題 4.11)．

$\mathscr{C}$ 自身はトポスではない．トポスを構築するために，分類のタイプつまり '開集合' を形式的に十分たくさん付け加える．その効果で，$\mathscr{C}$ における任意の '2 変数関数' を $\mathscr{T}$ の巾分類のトークンとしてカリー化できる．こうして，$\mathscr{C}$ が実質的にトポスであることが示される．

4.2 分類と情報射

3-組 $A = (\mathrm{tok}(A), \mathrm{typ}(A), \models_A)$ を**分類**という．$\mathrm{tok}(A)$ を A の**トークン集合**，$\mathrm{typ}(A)$ を A の**タイプ集合**，2-項関係 $\models_A \subseteq \mathrm{tok}(A) \times \mathrm{typ}(A)$ を A の**支持関係**という．$x \models_A a$ を x が a を**支持する**という．どのトークンにも支持されないタイプを**空タイプ**という．$a \in \mathrm{typ}(A)$ に対して，集合 $[\![a]\!]_A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathrm{tok}(A) \mid x \models_A a\}$ をタイプ a の**外延**という．外延が $\mathrm{tok}(A)$ であるタイプを**普遍タイプ**という．A を分類，$a, b \in \mathrm{typ}(A)$ とする．すべてのトークン $x \in \mathrm{tok}(A)$ について $x \models_A a \Longrightarrow x \models_A b$ なるとき，a を b の**部分タイプ**という．

注意 4.1. 関係は集合の直積の部分集合であるから，分類および関係の概念は，両者まったく同一であることに注意する．

A, B を分類，$f^\wedge\colon \mathrm{typ}(A) \to \mathrm{typ}(B)$，$f^\vee\colon \mathrm{tok}(B) \to \mathrm{tok}(A)$ とする．任意の $a \in \mathrm{typ}(A)$，$y \in \mathrm{tok}(B)$ に対して同値

$$y \models_B f^\wedge(a) \iff f^\vee(y) \models_A a$$

が成り立つとき, 写像の対 $f = (f^\wedge, f^\vee)$ を A から B への**情報射**といい, $f\colon A \rightleftarrows B$, あるいはまぎれのないときは, たんに $f\colon A \to B$ と書く. $f^\wedge$ を f の**タイプ射**, $f^\vee$ を f の**トークン射**という.

注意 4.2. すでに注意したように, 分類と関係は集合論では同一の概念である. 一方, **状態空間**と**射影**は, 圏論の矢圏 *(arrow category)* と明きらかに同じものである. あとでふれるように, 矢圏と分類圏には良く知られた反変随伴関手が存在する. ちなみに, 関係の圏 *(Allegory)* の矢は情報射を抽象化したものではない.

$f\colon A \rightleftarrows B$, $g\colon B \rightleftarrows C$ のとき, $h = (g^\wedge \circ f^\wedge, f^\vee \circ g^\vee)$ は A から C への情報射である. h を f と g の**結合**といい $g \circ f$ と書く. 順序対 $(\mathrm{id}_{\mathrm{typ}(A)}, \mathrm{id}_{\mathrm{tok}(A)})$ は A から A 自身への情報射であり, id_A と書く. $f\colon A \rightleftarrows B$, $g\colon B \rightleftarrows C$, $h\colon C \rightleftarrows D$ は結合律 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を満たす. 単位元律 $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f$ も成り立つ. ゆえに, すべての分類と情報射の集まり $\mathscr{C}$ は圏を成す [26]. $g \circ f = \mathrm{id}_A$, $f \circ g = \mathrm{id}_B$ なる情報射 $f\colon A \rightleftarrows B$, $g\colon B \rightleftarrows A$ が存在するとき, A と B は**同型**といい, $A \cong B$ で表す. 明らかに $\cong$ は分類の間の同値関係である.

以下, $\models_A = \{(x, a) \in \mathrm{tok}(A) \times \mathrm{typ}(A) \mid x \in a\}$, すなわち $\models_A$ がメンバシップ $\in$ の制限のとき, $\models_A$ を $\in$ と略記する.

例 4.1. 分類と情報射は, 集合と関数の一般化である. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を関数, $A = (X, \mathrm{pow}(X), \in)$, $B = (Y, \mathrm{pow}(Y), \in)$ とする. すると, $f(x) \in S \iff x \in f^{-1}(S)$ である. ゆえに (f^{-1}, f) は B から A への情報射である.

例 4.2. 線形空間 X の線形部分空間の全体を $\mathscr{L}(X)$ で表す. 線形空間 X, Y, 線形写像 $f\colon X \to Y$ に対して, $A = (X, \mathscr{L}(X), \in)$, $B = (Y, \mathscr{L}(Y), \in)$, $S \in \mathscr{L}(Y)$, $x \in X$ とする. f は線形写像であるから, $f^{-1}(S) \in \mathscr{L}(X)$ であり, かつ $f(x) \in S \iff x \in f^{-1}(S)$ である. ゆえに (f^{-1}, f) は分類 B から A への情報射である.

例 4.3. 可測空間 X の可測集合の全体を $\sigma(X)$ で表す. 可測空間 X, Y, 可測写像 $f\colon X \to Y$ に対して, $A = (X, \sigma(X), \in)$, $B = (Y, \sigma(Y), \in)$, $S \in \sigma(Y)$, $x \in X$ ならば, 可測写像の定義より $f^{-1}(S) \in \sigma(X)$ であり, かつ $f(x) \in S \iff x \in f^{-1}(S)$ である. ゆえに (f^{-1}, f) は分類 B から A への情報射である.

定義 4.1. *[外延的分類]* 分類 A のすべてのタイプ $a, b \in \mathrm{typ}(A)$ について次の性質が成り立つとき, A を**外延的**という.

$$\forall x \in \mathrm{tok}(A)\ (x \models_A a \iff x \models_A b) \Longrightarrow a = b.$$

集合論の外延性公理そのものである *[25]*.

明らかに, 外延的分類とその間の情報射のなす圏は分類圏 $\mathscr{C}$ の部分圏である. 外延的分類と情報射からなる圏を**外延的**という. 上述の例の, 位相空間と連続写像からなる圏, 可測空間と可測写像からなる圏, 線形空間と線形写像からなる圏は, すべて外延的である. 節 4.5 で注意するように, 外延的分類の間の情報射はトークン射で決まる. 位相空間など, 集合とその上の部分集合系の理論は多い. 分類は部分集合系をタイプ集合として, 抽象化・一般化したものと考えられる.

$\mathscr{C}$ は広大である. 集合と関数の圏, 位相空間と連続写像の圏, 可測集合, 可測写像の圏をそれぞれ部分圏として $\mathscr{C}$ に包含される. しかし, たとえば, 可測写像が連続写像とは限らないことから分かるように, この包含関手は充満 (full) ではない. しかし, これらの包含関手を $\mathscr{C}$ への忘却関手とみて, その左随伴関手の存在を議論をすることはできる. 実際, のちに定義する完備

分類圏 $\mathscr{T}$ については，その忘却関手が左随伴関手を持つことが示される (命題 4.7).

typ$(A) = \emptyset$ かつ tok(A) がシングルトンなる分類が存在する．A の支持関係は常に $\emptyset$ (空集合) である．A は $\mathscr{C}$ の始対象である．A を**始分類**ともいう．同様に，typ(B) がシングルトン，かつ tok$(B) = \emptyset$ なる分類も存在し，B の支持関係は空集合である．B は $\mathscr{C}$ の終対象である．B を**終分類**という．

注意 4.3. $f^\vee$, $f^\wedge$ の記法における $\vee, \wedge$ は *[12]* の踏襲である．便利ではあるが，タイプにブール演算を導入するときに和と積の記号と衝突する．混乱の恐れがあるときは括弧を使うことにする．$f^\vee$, $f^\wedge$ に代わるもっと良い記法が望まれる．たとえば，それぞれ f_*, f^* はどうだろう．

4.3 分類の和 $A + B$

定義 4.2 (分類の和 $A + B$).

- typ$(A + B) =$ typ$(A) +$ typ(B) *(*直和*)*.
- tok$(A + B) =$ tok$(A) \times$ tok(B) *(*直積*)*.
- $(x, y) \models_{A+B} u \iff \begin{cases} x \models_A u & (u \in \mathrm{typ}(A)), \\ y \models_B u & (u \in \mathrm{typ}(B)). \end{cases}$

分類の和 $+$ は結合律を満す．$(A + B) + C \cong A + (B + C)$.

和のタイプの外延は $[\![a]\!]_A \times \mathrm{tok}(B)$, $\mathrm{typ}(A) \times [\![b]\!]_B$ なる '帯' のみであり，ふたつの帯の共通部分は必ずしも帯ではない．

注意 4.4. 分類の和は，トークン集合については積，タイプ集合について直和をとる．トークンレベルでみれば，位相空間における直積位相空間の定義に近い．古典的な位相空間論では，まず点集合があり，その上に開集合系を考え，連続写像の向きは点集合の関数の向きとし，その逆関数で開集合の対応が定義される．一方 チャンネル理論では，タイプ *(*開集合*)* とトークン *(*点*)* の二元論である，とくにタイプは外延では決まらない内包的な対象であり，情報の流れの観点から，むしろタイプ *(*開集合*)* が主でトークン *(*点*)* が従と考える．したがって，情報射を連続写像と思うと写像の向きが逆になっている．経験上，混乱が予想される．慣れるまで注意が必要である．

4.4 完備分類と完備化

分類圏の上にトポスを構築するために，タイプの無限和および有限積のふたつの演算を持つ分類を導入する．A を分類とする．二つの演算 $\bigvee$: pow(typ(A)) $\to$ typ(A) と $\wedge$: finpow$(typ(A)) \to$ typ(A) が次の性質を満たすならば，A を**完備**という．なお $a \wedge b = \wedge(\{a, b\})$, $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = \wedge(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$ と規約する $(n \geq 0)$.

- すべての $x \in \mathrm{tok}(A), S \in \mathrm{pow}(\mathrm{typ}(A))$ について $x \models_A \bigvee(S) \iff \exists a \in S\ x \models_A a$.
- すべての $x \in \mathrm{tok}(A), a, b \in \mathrm{tok}(A)$ について $x \models_A a \wedge b \iff x \models_A a$かつ$x \models b$.

注意 4.5. A が完備ならば $[\![\bigvee(\emptyset)]\!]_A = \emptyset$, $[\![\wedge(\emptyset)]\!]_A = \mathrm{tok}(A)$ である．

完備分類の間の情報射はタイプ演算と可換である．A, B が完備，$f\colon A \rightleftarrows B$, $S \subseteq \mathrm{typ}(A)$ ならば 明きらかに $x \models_B f^\wedge(\bigvee(S)) \iff x \models_B \bigvee(f^\wedge(S))$ である．さらに，$a, b \in \mathrm{typ}(A)$ ならば，$x \models_B f^\wedge(a \wedge b) \iff x \models_b f^\wedge(a) \wedge f^\wedge(b)$.

定義 4.3. A を分類として，完備分類 $\Gamma(A)$ を次の等式で定義する． $S, S' \in \mathrm{pow}(\mathrm{finpow}(\mathrm{typ}(A))), x \in \mathrm{typ}(A)$ とする．

1. $\mathrm{typ}(\Gamma(A)) = \mathrm{pow}(\mathrm{finpow}(\mathrm{typ}(A)))$,
2. $\mathrm{tok}(\Gamma(A)) = \mathrm{tok}(A)$,
3. $\bigvee S = \bigcup S \quad (S \in \mathrm{pow}(\mathrm{finpow}(\mathrm{typ}(A))))$,
4. $S \wedge S' = \{p \cap q \mid p \in S, q \in S'\}$,
5. $x \models_{\Gamma(A)} S \iff \exists p \in S \, \forall a \in p \, x \models_A a$.

$\Gamma(A)$ が完備であることは明らかである．$\Gamma(A)$ を A の**完備化**という．空集合 $\emptyset$ は分類 $\Gamma(A)$ の空タイプである．一方，シングルトン $\{\emptyset\}$ は分類 $\Gamma(A)$ の全トークンにより支持される．

$\mathscr{T}$ をすべての完備分類と情報射からなるクラスとする．

命題 4.1. $\mathscr{T}$ は圏である．

次に，分類 A, B, 関数 $\sigma\colon \mathrm{tok}(B) \to \mathrm{tok}(A)$ に対して，

$$\delta_\sigma(a) \overset{\mathrm{def}}{=} \{b \in \mathrm{typ}(B) \mid \forall y \in \mathrm{tok}(B)\,(y \models_B b \iff \sigma(y) \models_A a)\}$$

とおく．$\delta_\sigma(a)$ は，σ によってその外延がすべて a の外延に写されるようなタイプ b の全体である．δ_σ は $\mathrm{typ}(A)$ から $\mathrm{pow}(\mathrm{typ}(B))$ への関数である．$\delta_\sigma(a) \neq \emptyset$ とは限らない．

定義 4.4. $\sigma\colon \mathrm{tok}(B) \to \mathrm{tok}(A)$ は，すべての $a \in \mathrm{typ}(A)$ に対して $\delta_\sigma(a) \neq \emptyset$ なるとき**可連続**という．

定義 4.5. A を分類，B を完備分類，$\sigma\colon \mathrm{tok}(B) \to \mathrm{tok}(A)$ を可連続とする．$\Delta_\sigma\colon \mathrm{typ}(A) \to \mathrm{typ}(B)$ を次で定義する．

$$\Delta_\sigma(a) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigvee \delta_\sigma(a).$$

Δ_σ をトークン射 σ から**誘導される**タイプ射という．

σ が可連続であるから，集合族 $(\delta_\sigma(a))_{a \in \mathrm{typ}(A)}$ の直積は空ではない．しかも $\delta_\sigma(a)$ の定義より，任意の $t \in (\delta_\sigma(a))_{a \in \mathrm{typ}(A)}$ について，(t, σ) は A から B への情報射である．よって明らかに対 (Δ_σ, σ) は A から B への情報射である．しかも，A から B への情報射 (t, σ) はすべて $x \models_B t(a) \iff x \models_B \Delta_\sigma(a)$ $(x \in \mathrm{tok}(B), a \in \mathrm{typ}(A))$ を満たす．この意味で，Δ_σ は σ からユニークに決まる．位相空間の連続写像 f の逆対応 f^{-1} が，開集合の対応を決めることに酷似している．情報射は連続写像の一般化である．

A, B が完備とは限らない一般の分類とする．$f\colon A \rightleftarrows B$ が情報射のとき，$f\colon A \rightleftarrows \bigvee B$ とみなし，$\Delta_{f^\vee}$ を $f^\vee$ から誘導されるタイプ射とおく．順序対 $(\Delta_{f^\vee}, f^\vee)$ は $\Gamma(A)$ から $\Gamma(B)$ への情報射である．$\Gamma(f) \overset{\mathrm{def}}{=} (\Delta_{f^\vee}, f^\vee)$ とおく．

命題 4.2. Γ は $\mathscr{C}$ から $\mathscr{T}$ への関手である．

証明 Γ が恒等情報射を保存することは自明である．情報射の結合を保存することを示す．$f\colon A \rightleftarrows B$, $g\colon B \rightleftarrows C$ を $\mathscr{C}$ の射とする．一般性を失うことなく，$\mathrm{typ}(A)$, $\mathrm{typ}(B)$, $\mathrm{typ}(C)$ の元はすべて urelement と仮定してよい．(タイプが集合の場合，タイプの集合が再びタイプになる可能性がある．urelement はその混乱を避けるためである．) 定理は，$\Gamma(g \circ f) = \Gamma(g) \circ \Gamma(f)$ を証明すればよい．そのため $P \in \mathrm{typ}(\Gamma(A))$ と仮定する．$a \in \mathrm{typ}(A)$ ならば，仮定より a, $f(a)$ は urelement である．したがって，$a \in \mathrm{typ}(A)$ ならば $f(a) = \Gamma(f)(a)$ である．この等式を次の式変形で暗黙に使う．B, g についても同様である．式変形中の $\wedge$ の引数は完備化の定義によりつねに有限であることに注意する．

$$\begin{aligned}\Gamma(g\circ f)(P) &= \bigvee\{\wedge\{(g\circ f)(a)\mid a\in p\}\mid p\in P\}\\ &= \bigvee\{\wedge\{g(f(a))\mid a\in p\}\mid p\in P\}\\ &= \bigvee\{\Gamma(g)(\wedge\{f(a)\mid a\in p\})\mid p\in P\}\\ &=\Gamma(g)(\Big\{\bigvee(\wedge\{f(a)\mid a\in p\})\Big| p\in P\Big\})\\ &=\Gamma(g)(\Gamma(f)(P))\\ &=(\Gamma(g)\circ\Gamma(f))(P).\end{aligned}$$

□

$f,g\colon A\rightleftarrows B$ を情報射とする. $f^\vee = g^\vee$ かつ, すべての $a\in \mathrm{typ}(A)$ について, $f^\wedge(a)$ と $g^\wedge(a)$ の外延が一致するとき, $f\simeq g$ で表わす. 明きらかに関係 $\simeq$ は A から B への情報射の間の同値関係である.

定義 4.6. A,B を分類, $f\colon A\rightleftarrows B$, $F\colon \Gamma(A)\rightleftarrows\Gamma(B)$ を情報射とする. 次の条件が成り立つことを $F\restriction A\simeq f$ と表す: すべての $a\in\mathrm{typ}(A), y\in\mathrm{tok}(B)$ について, 次の同値が成り立つ:

$$y\models_{\Gamma(B)} F^\wedge(a) \iff y\models_B f^\wedge(a).$$

条件 $F\restriction A\simeq f$ は, 任意の $a\in\mathrm{typ}(A)$ について $F^\wedge(a)$ と $f^\wedge(a)$ の外延が一致することであるから, 次の命題は明らかである.

命題 4.3. A,B を分類, $f,g\colon A\rightleftarrows B$, $F\colon\Gamma(A)\rightleftarrows\Gamma(B)$ を情報射とする. $F\restriction A\simeq f$ かつ $F\restriction A\simeq g$ ならば $f\simeq g$ である.

命題 4.4. A,B を分類, $f\colon A\rightleftarrows B$ を情報射とする. $f^\vee$ から誘導される情報射 $\Gamma(f)\colon\Gamma(A)\rightleftarrows\Gamma(B)$ は次を満す:

$$\Gamma(f)\restriction A\simeq f.$$

証明 記号の定義をほどくだけである. A,B を分類, $f\colon A\rightleftarrows B$, $\Gamma(f)\colon\Gamma(A)\rightleftarrows\Gamma(B)$ を $f^\vee$ から誘導された情報射とする. $a\in\mathrm{typ}(A), y\in\mathrm{tok}(B)$ とする. $y\models_{\Gamma(B)}\Gamma(f)^\wedge(a)$ と仮定する. $\Gamma(f)$ は情報射であるから, $\Gamma(f)^\vee(y)\models_{\Gamma(A)} a$ である. $a\in\mathrm{typ}(A)$ だから $\Gamma(A)$ の定義より, $\Gamma(f)^\vee(y)\models_A a$ である. $\Gamma(f)^\vee(y)=f^\vee(y)$ であるから, $f^\vee(y)\models_A a$ である.

逆の証明のため, $f^\vee(y)\models_A a$ を仮定する. $\Gamma(A)$ の定義より, $f^\vee(y)\models_{\Gamma(A)} a$. $f^\vee(y)=\Gamma(f)^\vee(y)$ だから, $\Gamma(f)^\vee(y)\models_{\Gamma(A)} a$. $\Gamma(f)$ は情報射であるから, $y\models_{\Gamma(B)}\Gamma(f)^\wedge(a)$.

よって $y\models_{\Gamma(B)}\Gamma(f)^\wedge(a)\iff y\models_B f^\wedge(a)$ である. ゆえに $\Gamma(f)\restriction A\simeq f$ である. □

命題 4.5 (完備化の性質)**.** 情報射 $f,g\colon A\rightleftarrows B$ が $f^\vee=g^\vee$ ならば $\Gamma(f)\simeq\Gamma(g)$ である.

証明 命題 4.3 からでる. □

ゆえに情報射 f のタイプ射 $f^\wedge$ はトークン射 $f^\vee$ の逆対応 $(f^\vee)^{-1}$ で決まる. 井出は修士論文 [76] で「情報射のトークン射はタイプの外延をタイプの外延に写す」ことを示した. 連続写像の逆写像が開集合を開集合に写すことの一般化である. 次の命題はその言い換えである.

命題 4.6 (トークン射はタイプ射を決定)**.** 情報射 $f,g\colon A\rightleftarrows B$ が $f^\vee=g^\vee$ ならば $f\simeq g$ である.

完備分類はタイプ演算 $\bigvee$ と $\wedge$ を忘れれば, $\mathscr{C}$ の対象である. この忘却関手を G とおく: $G\colon\mathscr{T}\to\mathscr{C}$. 以下簡単のため, 圏 $\mathscr{T}$ の射集合 $\mathscr{T}(A,B)$ を商集合 $\mathscr{T}(A,B)/\simeq$ に置き換えて改めて $\mathscr{T}(A,B)$ で表わし, 得られる圏も同じく $\mathscr{T}$ で表わす. 混乱はないであろう.

命題 4.7. G を $\mathscr{T}$ から $\mathscr{C}$ への，タイプ和演算およびタイプ積演算を忘れる関手とおく．分類 A を $\Gamma(A)$ に，情報射 f を $\Gamma(f)$ に割り当てる $\mathscr{C}$ から $\mathscr{T}$ への上述の対応 Γ は忘却関手 G の左随伴関手である．すなわち $\mathscr{C}$ の任意の分類 A,$\mathscr{T}$ の任意の分類 B について $\mathscr{C}(A,G(B)) \cong \mathscr{T}(\Gamma(A),B)$ なる同型 $\theta_{A,B}$ が存在し，A, B それぞれについて自然である．
証明　情報射はトークン射で決ったから，同じトークン射を持つ情報射を割り当てる関数を $\theta_{A,B}$ とおけばよい．同値な情報射を同一視すれば，$\theta_{A,B}$ が全単射であることは明らかである．A,B について自然であることもルーティンである．■

4.5　商分類と外延化

A が分類，R が $\mathrm{typ}(A)$ 上の同値関係のとき，商分類 A/R を次で定義する．

- $\mathrm{tok}(A/R) = \mathrm{tok}(A)$.
- $\mathrm{typ}(A/R) = \mathrm{typ}(A)/R$ (商集合).
- すべての $(x,P) \in \mathrm{tok}(x) \times \mathrm{typ}(A/R)$ について，$x \models_{A/R} P \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists a \in P\ x \models_A a$.

支持関係 $\models_A$ のもとで外延が等しいという関係 $\sim_A$ は $\mathrm{typ}(A)$ 上の同値関係である．商分類 $\widetilde{A} \overset{\mathrm{def}}{=} A/\sim_A$ を分類 A の外延化という．$\mathrm{tok}(\widetilde{A}) = \mathrm{tok}(A)$. $\mathrm{typ}(\widetilde{A}) = \mathrm{typ}(A)/\sim_A$. $x \in \mathrm{tok}(\widetilde{A})$, $q \in \mathrm{typ}(\widetilde{A})$ ならば $x \models_{\widetilde{A}} q \iff \exists a \in q\ x \models_A a$ である．X,Y を集合，$R \subseteq X \times X$, $S \subseteq Y \times Y$, $f\colon X \to Y$ とする．

$$x,y \in X, (x,y) \in R \Longrightarrow (f(x),f(y)) \in S$$

が成り立つならば，関数 f は関係 R,S と両立するという．次の命題は明らかである．
命題 4.8 (射の商分類リフティングの一意性).　*1.* $f\colon A \rightleftarrows B$ ならば $\widetilde{f}\colon \widetilde{A} \rightleftarrows \widetilde{B}$ である．
2. $F\colon \widetilde{A} \rightleftarrows \widetilde{B}$, $F^{\vee} = f^{\vee}$ ならば $F^{\wedge} = \widetilde{f}^{\wedge}$，すなわち，$F$ は $\widetilde{f}$ と一致する．

4.6　完備分類の和 $A \oplus B$

Γ は，完備分類圏 $\mathscr{T}$ から圏 $\mathscr{C}$ へ忘却関手 G の左随伴関手であった．左随伴関手は余極限を保存するから，とくに和も保存する．完備分類圏 $\mathscr{T}$ における和であることを強調する場合は $\oplus$ で表わす．すなわち $A \oplus B = \Gamma(G(A)+G(B))$ である．圏の一般論から，完備分類圏 $\mathscr{T}$ の中では，$A \oplus B$ を，A, B のそれぞれから情報射が存在する中で普遍的な分類として定義してもよい．あるいは，直積位相空間の位相のように，$A \oplus B$ は $\mathrm{typ}(A)$ と $\mathrm{typ}(B)$ を含む最小の完備分類であるといってもよいだろう．$\oplus$ は結合律を満す．$(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$.
定義 4.7. A, B, C, D が完備で $f\colon A \rightleftarrows B$, $g\colon C \rightleftarrows D$ を情報射とする．情報射 $f \oplus g\colon A \oplus C \rightleftarrows B \oplus D$ を次のように，圏論的に定義する．$A \oplus C$, $B \oplus D$ の定義より，A から $A \oplus C$ への標準情報射 φ_A, C から $A \oplus C$ への標準情報射 φ_C, B から $B \oplus D$ への標準情報射 φ_B, D から $B \oplus D$ への標準情報射 φ_D がある．すると $\varphi_A \circ f\colon A \rightleftarrows B \oplus D$, $\varphi_D \circ g\colon C \rightleftarrows B \oplus D$ である．$B \oplus D$ の普遍性から，$A \oplus C$ から $B \oplus C$ への，次の等式を満す情報射 F がユニークに存在する．

- $F \circ \varphi_A = \varphi_B$,
- $F \circ \varphi_C = \varphi_D$.

この F を $f \oplus g$ で表す．

4.7 巾分類 B^A

定義 4.8 (巾分類). 分類 A から分類 B への情報射の全体 $\mathscr{C}(A,B)$ $(= \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(A,B))$ をトークン集合とする分類 B^A を構成する.

- $\mathrm{tok}(B^A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathscr{C}(A,B)$.
- $\mathrm{typ}(B^A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pow}(\mathrm{typ}(A) \times \mathrm{typ}(B))$.
- $f \models_{B^A} P \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \exists (a,b) \in P\ \forall x \in \mathrm{tok}(B)$

$$x \models_B b \Longrightarrow f^{\vee}(x) \models_A a.$$

情報射 f がタイプ (a,b) を支持するとは, b を支持するトークンはすべて, a を支持するトークンへ, $f^{\vee}$ により写されることである.

4.8 情報射適用 ev

分類 A, B の巾 B^A に関する**情報射適用** $\mathrm{ev}_{A,B}\colon B \rightleftarrows B^A + A$ を定義する. ev の添字 A, B は適宜省略する.

- $f \in \mathrm{tok}(B^A)$, $x \in \mathrm{tok}(B)$ ならば, $\mathrm{ev}^{\vee}(f,x) = f^{\vee}(x)$.
- $b \in \mathrm{typ}(B)$ ならば, $\mathrm{ev}^{\wedge}(b)$ を次の集合と定義する.

$$\{((b,a),a) \mid a \in \mathrm{typ}(a), \forall f \models_{B^A} (b,a)\ \forall x \in \mathrm{tok}(A)\ (x \models_A a \Longrightarrow f^{\vee}(x) \models_B b)\}.$$

次の命題は適用 $\mathrm{ev}_{A,B}$ の定義から明きらかである.

命題 4.9. 完備分類圏 $\mathscr{T}$ において, 情報射適用 $\mathrm{ev}_{A,B}$ は情報射である : $\mathrm{ev}_{A,B}\colon B \rightleftarrows B^A + A$.

4.9 情報射のカリー化

A が完備分類のとき, $\mathscr{C}$ の情報射 $f\colon C \rightleftarrows A + B$ のカリー化 $\mathbf{K}_f\colon B^C \rightleftarrows A$ を定義する. $\mathbf{K}_f$ は $\mathscr{C}$ の射である. まず, $\mathbf{K}_f{}^{\wedge}\colon \mathrm{typ}(B^C) \to \mathrm{typ}(A)$ を $(b,c) \in \mathrm{typ}(B^C)$ について

$$\mathbf{K}_f{}^{\wedge}(b,c) = \bigvee \{a \in \mathrm{typ}(A) \mid \forall x \in \mathrm{tok}(A)\, x \models_A a \Longrightarrow f^{\vee}(x) \models_{B^C} (b,c)\}$$

と定義する. 次に, $\mathbf{K}_f{}^{\vee}\colon \mathrm{tok}(A) \to \mathrm{tok}(B^C)$ を定義する. そのために, まず $x \in \mathrm{tok}(A)$ についてふたつの関数 $(\mathbf{K}_f{}^{\vee}(x))^{\vee}\colon \mathrm{tok}(B) \to \mathrm{tok}(C)$, $(\mathbf{K}_f{}^{\vee}(x))^{\wedge}\colon \mathrm{typ}(C) \to \mathrm{typ}(B)$ を次の等式で定義する.

- $(\mathbf{K}_f{}^{\vee}(x))^{\vee}(y) = f^{\vee}(x,y) \in \mathrm{tok}(C) \quad (y \in \mathrm{tok}(B))$,
- $(\mathbf{K}_f{}^{\vee}(x))^{\wedge}(c) = \bigvee\{b \in \mathrm{typ}(B) \mid \exists a \in \mathrm{typ}(A)\, x \models_A a, (a,b) \in f^{\wedge}(c)\} \quad (c \in \mathrm{typ}(C))$.

すると ‘カリー化’ $\mathbf{K}_f = (\mathbf{K}_f{}^{\wedge}, \mathbf{K}_f{}^{\vee})$ は次の命題を満たす.

命題 4.10. $f\colon C \rightleftarrows A \oplus B$ のカリー化 $\mathbf{K}_f = (\mathbf{K}_f{}^{\wedge}, \mathbf{K}_f{}^{\vee})$ は巾 B^C から A への情報射である.

証明　すべての $x \in \mathrm{tok}(A)$ と $(b,c) \in \mathrm{typ}(B^C)$ について次が成り立つことを示せばよい.

$$x \models_A \mathbf{K}_f{}^{\wedge}(b,c) \iff \mathbf{K}_f{}^{\vee}(x) \models_{B^C} (b,c).$$

$x \models_A \mathbf{K}_f{}^{\wedge}(b,c)$ と仮定する．$\mathbf{K}_f{}^{\wedge}(b,c)$ の定義より $x \models_A a$ かつ $\mathbf{K}_f{}^{\vee}(x) \models_{B^C} (b,c)$ を満たす $a \in \mathrm{typ}(A)$ が存在する．ゆえに $x \models_A \mathbf{K}_f{}^{\wedge}(b,c) \Longrightarrow \mathbf{K}_f{}^{\vee}(x) \models_{B^C} (b,c)$.

逆向きを示すため, $\mathbf{K}_f{}^{\vee}(x) \models_{B^C} (b,c)$ を仮定する．$y \models_B b$ ならば, 仮定より $f^{\vee}(x,y) \models_C c$ が成り立つ．f は情報射なので, $(x,y) \models_{A\oplus B} f^{\wedge}(c)$ である．情報射の定義から, 各 $y \models_B b$ について, $a_y \in \mathrm{typ}(A)$, $b_y \in \mathrm{typ}(B)$, (a_y, b_y) が $f^{\wedge}(c)$ の部分タイプ, $x \models_A a_y$, $y \models_B b_y$, さらに b_y が b の部分タイプであるように選ぶことができる．明らかに, b と $\bigvee\{b_y \mid y \models_B b\}$ は同一の外延を持つ．$a = \bigvee\{a_y \mid y \models_B b\}$ とおく．ゆえに,A の任意のトークン u について, $u \models_A a$, $y \models_B b$ ならば $\mathbf{K}_f{}^{\vee}(u)(y) \models_C c$ である．すなわち $u \models_A a$ ならば $\mathbf{K}_f{}^{\vee}(u) \models_{B^C} (b,c)$ である．$x \models_A a$ であるから, $x \models_A \mathbf{K}_f{}^{\wedge}(b,c)$ を得る．ゆえに, $\mathbf{K}_f{}^{\vee}(x) \models_{B^C} (b,c) \Longrightarrow x \models_A \mathbf{K}_f{}^{\wedge}(b,c)$ である．よって $\mathbf{K}_f$ は B^C から A への情報射である． □

4.10 情報射適用の性質

A, B, C が完備ならば, 情報射適用の普遍性命題が成り立つ．

命題 4.11. $\mathrm{ev}_{C,B}\colon C \rightleftarrows C^B \oplus B$ を情報射適用とする．$h\colon C \rightleftarrows A \oplus B$ を情報射とする．h のカリー化 $\mathbf{K}_h\colon C^B \rightleftarrows A$ *(情報射)* は, 次の等式を満たす: $(\mathbf{K}_h \oplus \mathrm{id}_B) \circ \mathrm{ev}_{C,B} = h$. すなわち次の図は可換である．

$$\begin{tikzcd} & A \oplus B \\ C \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\mathrm{ev}_{C,B}"'] & C^B \oplus B \arrow[u, "\mathbf{K}_h \oplus \mathrm{id}_B"'] \end{tikzcd}$$

さらに $\Gamma(h)$ を商集合 $\mathscr{T}(C, A \oplus B)/\simeq$ の h の同値類に対応させる関係は一対一対応である．

証明 $\ell = (\mathbf{K}_h \oplus \mathrm{id}_B) \circ \mathrm{ev}_{C,B}$ とおく．$\ell^{\vee} = h^{\vee}$ はカリー化と関数適用射の定義より明らかである．$\ell^{\wedge}$ は $\ell^{\vee}$ から誘導され, $h^{\wedge}$ は $h^{\vee}$ から誘導される．命題 4.5 で示された完備分類の性質より, $\ell^{\wedge} \simeq h^{\wedge}$ である．ゆえに, $\ell \simeq h$.

$h, h' \in \mathscr{T}(C, A \oplus B)$, $h \simeq h'$ ならば定義により $h^{\vee} = h'^{\vee}$ であり, $h^{\vee} = h'^{\vee}$ ならば カリー化の定義より $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_{h'}$ である．$\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_{h'}$ なら, トークン射を共有する情報射の性質 (命題 4.5) から, $\mathbf{K}_h \simeq \mathbf{K}_{h'}$ である．$\mathbf{K}_h{}^{\vee} = \mathbf{K}_{h'}{}^{\vee}$ ならば $h^{\vee} = h'^{\vee}$ であることは, カリー化の定義から明らかである．結局, $\mathbf{K}_h$ は商集合 $\mathscr{T}(C, A \oplus B)/\simeq$ の h の同値類で決まる．h と $\mathbf{K}_h$ の対応は一対一である． □

系 4.12. B, C を分類とする．A が分類で $h\colon C \rightleftarrows A + B$ が $\mathscr{C}$ の情報射ならば, $(\Gamma(\mathbf{K}_h) \oplus \mathrm{id}_{\Gamma(B)}) \circ \mathrm{ev}_{\Gamma(C),\Gamma(B)} = \Gamma(h)$ である．さらに $\mathbf{K}_h$ は商集合 $\mathscr{T}(C, A \oplus B)/\simeq$ の h の同値類からユニークに決まる．

$$\begin{tikzcd} & A + B \\ C \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \Gamma(A) \oplus \Gamma(B) \\ \Gamma(C) \arrow[ur, "\Gamma(h)"] \arrow[r, "\mathrm{ev}_{\Gamma(C),\Gamma(B)}"'] & \Gamma(C)^{\Gamma(B)} \oplus \Gamma(B) \arrow[u, "\mathbf{K}_h \oplus \mathrm{id}_{\Gamma(B)}"'] \end{tikzcd}$$

注意 4.6. A, B, C のいずれかが完備でないとする．そのときは, 次の図式を可換にするよう

な情報射 $\varphi\colon B^C \to A$ が存在するとは限らない．すなわち，$\mathscr{C}$ においては，巾が存在するとは限らない．

$$\begin{tikzcd} & A+B \\ C \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & B^C+B \arrow[u, dotted, "\varphi+\mathrm{id}_B"'] \end{tikzcd}$$

4.11　分類圏のトポス性

$\mathscr{C}$ をすべての分類と情報射の圏とする．

定義 4.9 (右簡約可能)．情報射 $m\colon A \rightleftarrows B$ は，任意の分類 C と任意の情報射 $f\colon B \rightleftarrows C, g\colon B \rightleftarrows C$ に対して，$f \circ m = g \circ m$ ならば $f = g$ であるとき，m は**右簡約可能**であるという．m が右簡約可能であることはつぎの条件と同値である：$m^\wedge$ が単射かつ $m^\vee$ が全射である．

$\bar{1} = \{\emptyset\}$, $\bar{2} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ とおく．

- $\mathbf{0} = (\bar{1}, \emptyset, \emptyset)$ は $\mathscr{C}$ の始対象．
- $\mathbf{1} = (\emptyset, \bar{1}, \emptyset)$ は $\mathscr{C}$ の終対象．

さらに

- $\mathbf{2} = (\emptyset, \bar{2}, \emptyset)$ を分類，
- $t\colon \mathbf{1} \rightleftarrows \mathbf{2}$ を $t^\wedge(\emptyset) = \emptyset$ なる情報射

とおくと，$(\mathbf{2}, t)$ は分類圏の分類器である：任意の $\chi\colon A \rightleftarrows \mathbf{2}$ に対して，**右簡約可能な** $m\colon S \rightleftarrows A$ が存在して，次が pullback 図式となる．

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"] & \mathbf{1} \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, "\chi"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

完備圏に巾対象が存在することは，すでに示されている．$\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ は分類圏 $\mathscr{C}$ の対象であり，完備圏 $\mathscr{T}$ の対象でもある．したがって，$\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ はそれぞれ完備分類圏の始対象，終対象，分類器でもある．

完備分類圏 $\mathscr{T}$ では，極限，余極限，分類器，巾対象が存在することが示されているので，$\mathscr{T}$ はトポスである．さらに，分類圏 $\mathscr{C}$ から $\mathscr{T}$ への関手 Γ が $\mathscr{T}$ から $\mathscr{C}$ への忘却関手 G の左随伴であることも示された：$\Gamma \dashv G$．$\mathscr{T}$ は $\mathscr{C}$ の部分圏であった．この意味で分類圏 $\mathscr{C}$ は実質的にトポスである．

4.12　分類圏の惑星系

分類圏は太陽であり，位相圏，局所コンパクト圏，可測圏，完備分類圏はその惑星である．惑星とは，$\mathscr{C}$ への忘却関手が左随伴を持つ圏である．同様に他にも，frame の圏とその惑星系，Chu 空間圏 とその惑星系，など多くの惑星系があるのだろう．本節は，基礎理論のなす宇宙の地図を描くためのひとつのデータになることを念頭に書かれた．

巾の構成の根拠は, 情報射が, トークン射により外延的には決まってしまうという簡単な事実であった. この事実 および 巾の構成が集合の圏では自明であることから, 集合の圏における巾を分類圏に持ち上げることできた. 集合の圏がモデル構築のための道具であるように分類の圏もモデル構築のための道具である. 分類のタイプは制約をになうので, 集合はタイプが退化した分類とみなせる. あるいは位相空間のような点空間とその上の構造を, 分けずにひとつの対象としているとみることもできる. 対象の内部を見ないのであれば, 情報射が圏論における矢の役割りを担うことになる. 分類の圏論的な考察は半ば必然であろう. 分類圏の圏論的な性質が, 本節の内容を含めて, もっとすっきりと明らかにされることだろう.

参考文献

[1] P. Aczel. *Non-well-founded Sets.* CSLI lecture notes Number 14. CSLI Publications, Stanford University, 1988.

[2] P. Aczel and R. Lunnon. Universes and parameters. In J. Barwise, G. Plotkin, and J.M. Gawron, editors, *Situation Theory and Its Applications, volume II.* CSLI Publications, Stanford University, 1991.

[3] P. Aczel and N. Mendler. A final coalgebra theorem. In P.H. Pitts, D.E. Rydeheard, P. Dybjer, A.M. Pitts, and A. Poigné, editors, *Category Theory and Computer Science*, number 389 in LNCS. Springer-Verlag, 1989.

[4] Jĭri Adámek. *Theory of Mathematical Structure.* D. Reidel, 1983.

[5] Shun-ichi Amari. *Information Geometry and Its Applications.* Springer, 2016.

[6] J. Barwise. Situations, sets, and the axiom of foundation. chapter 8. In Barwise[9].

[7] J. Barwise. *Admissible Sets and Structures.* Springer-Verlag, 1975.

[8] J. Barwise. Noun phrases, generalized quantifiers and anaphora. In P. Gärdenfors, editor, *Generalized Quantifer.* Dordrecht: Reidel, 1987.

[9] J. Barwise. *The Situation in Logic.* CSLI Lecture Notes 17. Stanford: CSLI Publications, 1988.

[10] J. Barwise and L. Moss. *Vicious Circles.* CSLI Lecture Notes Number 60. CSLI Publications, 2001. ISBN 1-57586-008-2.

[11] J. Barwise and Eds. S. Feferman. *Model-Theoretic Logics, 1985.* Perspectives in Logic. ASL, 1985.

[12] J. Barwise and J. Seligman. *Information Flow—-The Logic of Distributed Systems.* Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 44. Cambridge University Press, 1997.

[13] K. J. Barwise. *Infinitary logic and admissible sets.* PhD thesis, Stanford University, 1967.

[14] J. Barwise(ed). *Handbook of Mathematical Logic.* North-Holland, 1977.

[15] A. Colmerauer. Prolog and infinite trees. In S.A. Tarnlund, editor, *Logic Programming*, APIC Studies in Data Processing No. 16. Academic Press, 1982.

[16] A. Colmerauer. Equations and unequations on finite and infinite trees. In *Proceedings of the Second International Conference on Fifth Generation Computer*

Systems, Tokyo, 1984.

[17] Fred Dretske. *Knowledge and the Flow of Information.* MIT Press, Cambridge, 1981.

[18] J. Michael Dunn and Gary M. Hardegree. *Algebraic Methods in Philosophical Logic.* Oxford Logic Guides 41. Oxoford Science Publications, 2001.

[19] Wan Fokkink. *Introduction to process algebra.* Springer-Verlag, 2000.

[20] J.A. Goguen and R.M. Burstall. Institutions: abstract model theory for specification and programming. *Journal of the ACM (JACM)*, 39(Issue 1), 1992.

[21] Vineet Gupta. *Chu Spaces: A model of Concurrency.* PhD thesis, Stanford University, 1994.

[22] Bart Jacob. New directions in categorical logic, for classical, probabilistic and quantum logic. *Logical Methods in Computer Science*, 11(3:24), pp. 1 – 76, 2015.

[23] P.T. Johnstone. *Topos Theory.* Dover Publications, 2014.

[24] H. Jerome Keisler and Julia F. Knight. Barwise: infinitary logic and admissible sets. *The Journal of Symbolic Logic.*

[25] K. Kunen. *Set Theory.* North Holland, 1980.

[26] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer Verlag, 1991.

[27] Tom Leinster. ベーシック圏論 普遍性からの速習コース. 丸善出版, 2017.

[28] Luminy. Case 919–13288 Marseille Cedex 09-France: ProloGIA. *Prolog III*, 1990.

[29] R. Lunnon. Many sorted universes, srds, and injective sums. In J. Barwise, G. Plotkin, and J.M. Gawron, editors, *Situation Theory and Its Applications, volume II.* CSLI Publications, Stanford University, 1991.

[30] Rodney Van Meter. *Quatum Networking.* Wiley, 2014.

[31] R. Milner. *Communication and Concurrency.* Prentice Hall, 1989.

[32] Richard Montague. Universal grammar. *Theoria*, 36:373–398, 1970.

[33] A. Mostowski. On a generalization of quantifiers. *Fund. Math.*, 44:12–36, 1957.

[34] Kuniaki Mukai. *Constraint Logic Programming and the Unification of Information.* PhD thesis, Department of Computer Science, Faculty of Engeneering, Tokyo Institute of Technology, 1991.

[35] V.R. Pratt. Chu spaces, July 1999.

[36] Atsushi Shimojima. *Semantic Properties of Diagrams and Their Cognitive Potentials.* Stanford Univ Center for the Study, 2015.

[37] Jan Wielemaker. SWI-Prolog Home Page. `http://www.swi-prolog.org/`.

[38] ジョン・バーワイズ=ジョン・ペリー著/土屋他 (共訳). 状況と態度. 産業図書, 1993.

[39] J. ミルナー. モース理論. 吉岡書店, 2004.

[40] 津田 一郎. 心はすべて数学である. 文藝春秋, 2015.

[41] 中岡宏行. 圏論の技法. 日本評論社, 2015.

[42] 坂原樹麗 佐藤崇. 表象システム (3). `http://www.rease.e.u-tokyo.ac.jp/read/jp/archive/essay/index.html`.

[43] 甘利 俊一. 情報理論 *(ちくま学芸文庫)*. 筑摩書房, 2011.

[44] 甘利 俊一. 脳・心・人工知能 数理で脳を解き明かす. 講談社, 2016.

[45] 河合 俊雄, 中沢 新一, 広井 良典, 下條 信輔, and 山極 寿一. **〈こころ〉はどこから来て, どこへ行くのか**. 岩波書店, 2016.
[46] 圏論の歩き方委員会. **圏論の歩き方**. 日本評論社, 2015.
[47] 竹内 外史. **層・圏・トポス―現代的集合像を求めて**. 日本評論社, 1978.
[48] 玉木 大. **広がりゆくトポロジーの世界―言語としてのホモトピー論**. 現代数学社, 2012.
[49] 山田友幸. Parametric Constraints in Channel Theory. 1015 年 11 月 7 日. 科学基礎論学会 秋の研究例会 (於) 東大駒場.
[50] 松本 幸夫. ***Morse* 理論の基礎**. 岩波書店, 2005.
[51] 弥永昌吉=小平邦彦. **現代数学概説 (I)**. 岩波書店, 1961.
[52] 彌永昌吉=彌永健一. **集合と位相 II**. 岩波講座　基礎数学. 岩波書店, 1977.
[53] 中井 悦司. ***IT* エンジニアのための機械学習理論入門**. 技術評論社, 2015.
[54] 日本数学会編集. **岩波数学辞典第 第 *4* 版**. 岩波書店, 2007.
[55] 小林 昭七. **接続の微分幾何とゲージ理論**. 裳華房, 5 1989.
[56] 服部 晶夫. **多様体のトポロジー**. 岩波書店, 2003.
[57] 横田一郎. **多様体とモース理論**. 現代数学社, 2016.
[58] 林 正人. **量子情報への表現論的アプローチ**. 共立出版, 1 2014.
[59] 林 正人. **量子論のための表現論**. 共立出版, 1 2014.
[60] 長澤 正雄. **増補改訂版マルコフ過程論による新しい量子理論**. 創英社/三省堂書店, 2015.
[61] 小嶋 泉. **量子場とミクロ・マクロ双対性 *(シュプリンガー量子数理シリーズ)***. 丸善出版, 2013.
[62] 伊藤 清. **確率論 *(岩波基礎数学選書)***. 岩波書店, 1991.
[63] 渡辺 澄夫. **代数幾何と学習理論**. 森北出版株式会社, 2006.
[64] 増永 良文. **リレーショナルデータベース入門―データモデル・*SQL*・管理システム・*NoSQL***. サイエンス社, 2017.
[65] 大森 英樹. **幾何学の見方・考え方**. 日本評論社, 1989.
[66] 大森 英樹. **数学のなかの物理学―幾何学的量子論へむかって**. 東京大学出版会, 2004.
[67] 麻生 英樹, 安田 宗樹, 前田 新一, 岡野原 大輔, 岡谷 貴之, 久保 陽太郎, and ボレガラ ダヌシカ. **深層学習 *Deep Learning***. 近代科学社, 2015.
[68] 麻生 英樹, 安田 宗樹, 前田 新一, 岡野原 大輔, 岡谷 貴之, 久保 陽太郎, ボレガラ ダヌシカ, 人工知能学会, and 神嶌敏弘. **深層学習*: Deep Learning***. 近代科学社, 2015.
[69] 茨木俊秀 and 福島雅夫. **最適化の手法**. 共立出版, 1993.
[70] 西野友年. **今度こそわかる量子コンピューター *(今度こそわかるシリーズ)***. 講談社, 2015.
[71] 角田 譲. **数理論理学入門**. 朝倉書店, 1996.
[72] Steve Awodey (前原 訳). **圏論**. 共立出版, 2015.
[73] エドワード・フレンケル (青木 薫 訳). **数学の大統一に挑む**. 文藝春秋.
[74] 菊池 誠. 一般設計学と抽象設計論に関する考察. 京都大学数理解析研究所講究録 1318, 2003.
[75] 高橋 陽一郎. **伊藤清の数学**. 日本評論社, 2011.
[76] 井出 陽子. チャネル理論に基づく情報の流れのモデルの設計. Master's thesis, 慶応義塾大学政策・メディア研究科, 2011.
[77] 黒川信重. **ガロア理論と表現論*: ゼータ関数への出発***. 日本評論社, 2015.