数理解析研究所講究録
第2050巻 2017年 123-139

公理的集合論の一角を彷徨って
— 一角からの結果紹介 —

Wandering around a corner of Axiomatic Set Theory

大和大学・教育学部* 金井 康雄
Yasuo KANAI
Department of Education, Yamato University

§1. はじめに

この論稿で，角田博士の研究業績に少し言及しながら，非可算正則基数上の特定な条件を満たすイデアルをいくつか紹介し，それらのイデアルに関係する諸結果を報告する。

一昨年惜しくもわが師，角田先生がお亡くなりになられた。師にささげるほどの論稿ではないが，不肖の弟子の角田先生への感謝を込めた報告とさせていただく。

公理的集合論の一角と論題で述べたが，一角というのだから全体を見渡して言っているのだろう。そうでないと，研究内容の立ち位置が一角かどうかはわからないだろうという尤もな意見を想定して，公理的集合論の流れを概観してみたいと思う。

§2. 公理的集合論の流れ

やはり集合論の創始者はカントールということではないかと思われる。デデキントやフレーゲの名前が聞こえてきそうではあるが。

カントールはクロネッカーのもとで整数論を研究していたが，クレレ大学に就職してからは先輩のハイネなどの影響や提言で三角級数の研究を始めたようだ。この研究の延長に，超限順序数が控えていたのである。

カントール以前にも，古くは射影幾何学やライプニッツの外延性の原理，さらにはガウスの剰余類，ボルツァーノの著作，リーマンの多様体などがカントールの研究に影響を与えており，同時代の人では前述のクンマーの概念を引き継いだデデキントのイデアルなどの集合論的諸概念の扱いやラッセルの思索などもカントールの研究に影響していると思われるが，ここでは，カントール後の集合論に関する出来事を公理的集合論ができるまでチャートで示したいと思う。

カントール

↘

三角級数の表す関数の一意性を証明する (1870)

↘

不連続点からなる集合 A を含む関数の三角級数表現の一意性 (1872)

↙ ↘

* 大阪府吹田市
Suita-shi, 564-0082, Japan

実数全体の非可算性 (1873)

超越数全体の非可算性 (1873)　　α 次導集合 (1880) (derived set)

超限順序数, 基数 (1895,1897) → ベール関数 (1899) [ディリクレ関数は クラス 2 のベール関数]

連続体仮説 (1878)　　リーマン積分 ジョルダン測度 ルベーグ測度 (1902) ↔ ボレル集合 (1898) ボレル集合の超限階層 (1905)

記述集合, 完全集合 (1884) 完全集合は連続体と 同じ濃度をもつ (1884) ヒルベルト：２３問題の最初 (1900) → 完全集合性質 ボレル集合の集まり だけで考えると 連続体仮説が成り立つ　　ハウスドルフ非可算 順序型 (1908)

デデキント　　フレーゲの論理の形式的体系 (1879) ラッセルのパラドックス (1901)

ベールの関数, カテゴリ (1899) ← 集合による数学の記述 (1871) → ボレル集合：実数の 記述部分集合 (1898)

クラトフスキの順序対 (現代集合論) ウィナーの順序対 ハウスドルフの順序対 (1914)　　デデキントの (切断による) 実数の定義 (1872) → ツェルメロの選択公理 の考察 (1904)

ヴィタリの選択公理よりの ルベーグ不可測集合の導き (1908)　　ツェルメロの集合論 の公理 (1908)

超限順序数 超限帰納法 → ミリマノフの累積的階層 (1917) → フランケル (1921-22), スコーレムの集合論の公理 (1923)

以上の流れで公理的集合論が整備されていったと考えても全く検討違いとは言えないと思われる。では，巨大基数の公理が考えられていく経緯を再びチャートで示すと次のようになると思う。

巨大基数の理念はゲーデルにより，具現化はいろいろな研究者によると思われる。具現化の初期過程として測度問題を取り上げる。

[測度問題]

ルベーグ積分　　ボレル集合 (1898) → ルベーグ ： ボレル集合はベール関数 による開区間の逆像 (1905)

ルベーグ可測 → ボレル集合 (1898)

↙ ↘

↙ ↘

ジョルダン'測度'(1902) → ルベーグの測度問題 (1904)

ルジン，ススリンの解析集合 (1917)

↓

ルジン，シェルピンスキーの射影集合 (1925)

ジョルダンの面積
= ジョルダン'測度'
J は 次の2つを満たす。
(1) $J(A) \geqq 0$, $J(\emptyset) = 0$
(2) $A \cap B = \emptyset$ ならば
$J(A \cup B) = J(A) + J(B)$
(有限加法性) この2つが，
「面積とは何か？」
の答えである。
(ルベーグ
「積分・長さおよび面積」)

区間 $I = [0, 1]$ のすべての
部分集合上で定義された
(負の値をとらない)
測度 m で次の条件を
満たす ものが存在するか？
1) A と B が (平行移動で)
合同ならば $m(A) = m(B)$
2) $m(X) = 1$
3) $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n)$
$= \sum_{n=1}^{\infty} m(S_n)$
ただし，S_n は
互いに共通部分をもたない。
(完全加法性)

↓

ハウスドルフ 測度の大域的問題 (1914)

n 次元ユークリッド空間の各有界集合 E
に負でない実数 $m(E)$ を対応させる，
次の条件を満たす関数 m は存在するか？
1) $m(I) = 1$ ただし，I は単位立法体
2) $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ならば
$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$
3) E_1 と E_2 が合同ならば $m(E_1) = m(E_2)$

↙

バナッハの $n = 1,\ 2$ に対する肯定的解決 (1923) →

バナッハ，タルスキーの定理 (1924)
選択公理を仮定して，$n \geqq 3$ では
上記ハウスドルフの問題を否定的に解決
=バナッハ-タルスキーの逆理

↓

バナッハ，クラトフスキーの定理 (1929)
連続体仮説を仮定すると，区間 I = [0,1] の
すべての部分集合上で定義された完全加法的
測度 m で 1) 1 点の測度は 0 であり，
2) $m(I) = 1$ を満たすものは存在しない。

←

連続体仮説を仮定すると，
数直線上で定義された
非可測関数で，高々可算
集合を除いて連続となる
ものが存在する。

↓ ↙ ↓

シルピンスキーの研究
連続体仮説への疑念

カントールの
超限順序数 →

ウラム (1929)
ω 上の超フィルター ←

↓

ウラムの定理 (1930)
集合 E の濃度が
$\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \cdots, \aleph_n, \aleph_\omega$
のいずれであっても，
E のすべての部分集合上
で定義された完全加法的
測度 m で
1) 1 点の測度は 0 であり，
2) $m(I) = 1$ を満たすもの
は存在しない。

→

測度問題の巨大
基数の必要性

《実数値可測基数》

↓

《可測基数》 可測基数は 到達不能基数 (ウラム：1929) → 《到達不能基数》はウラムの意味で可測か？可測基数の存在性は？《実数値可測基数》(real-valued mesurable cardinal) はどの程度大きいか？ → タルスキー (1943) 《強コンパクト基数》 ⇒ 可測基数 ⇒ 《弱コンパクト基数》の証明 (現代的用語) 強コンパクト基数，弱コンパクト基数の定義 (1962)

以上で，ゲーデルより生じた巨大基数の理念は，集合への考察が深まるにつれその必要性が強くなっていった流れを追ってきた。

次に，巨大基数の一つと考えられるいくつかの条件を満たす基数上の**イデアル**の生まれるまでを眺めて，公理的集合論の一角の位置を確認し，以下に記す諸結果・考察を見ていただきたいと思う。

[イデアル]

↓

ボレルの σ-イデアル (強ルベーグ測度零イデアル) (1919)) → ウラムの ω 上の超フィルター (1929)

デデキントのイデアル論 (1871)

↙ ↙

ウラムのフィルター，超フィルター (1930) ← ブール環におけるイデアル (1929)

↙ ↙

ブルバキの一員であるカルタンのイデアル (1936)

タルスキーのイデアル (1940?)

ストーン (1936) ブール環におけるイデアル分析

§3. 基数の部分集合全体またはブール代数におけるイデアル

これより，節タイトルにあるように，イデアルについての諸結果を報告する。

先ず，定義の確認より始める。

定義 1． κ を非可算正則基数とし，I を $\mathcal{P}(\kappa)$ の部分集合とする。

次の条件を満たすとき，I は **基数 κ 上の非自明イデアル** と呼ばれる。

1) 任意の $\xi<\kappa$ に対し，$\{\xi\}\in I$,

2) $X,Y\in I$ ならば $X\cup Y\in I$,

3) $X\in I$ かつ $Y\in\mathcal{P}(\kappa)$ ならば $X\cap Y\in I$.

I の双対フィルターは I^* で示される。

そして，κ 上の非自明イデアル I が，

4) κ の任意の部分集合 X に対し，$X\in I$ または $\kappa-X\in I$

を満たすならば，I は **プライムイデアル** と言われ，双対のフィルターは**超フィルター** と言われる。

さらに，上記イデアル I において，$\mu<\kappa$ として $A=\{X_\xi\in I\mid \xi<\mu\}$ に対し，κ の部分集合 $\bigcup A$ が I に属するならば，I は κ-**完備**であると言われ，$A=\{X_\xi\in I\mid \xi<\kappa\}$ に対し，

$\triangledown A = \triangledown_{\xi<\kappa} X_\xi = \{\zeta < \kappa \mid \exists \xi < \zeta\ \zeta \in X_\xi\}$ (この集合は A の**対角和集合**と言われる) が I に属するならば，I は**正規**であると言われる。

定義2． B をブール代数，I を B の部分集合とする。
このとき，次の条件が満たされれば I は B **におけるイデアル** と言われる。
1) $\mathbf{0} \in I$,
2) $a,\ b \in I$ ならば $a \vee b \in I$,
3) $a \in I$ かつ $b \in B$ ならば $a \wedge b \in I$,
ただし $\mathbf{0}$ は B の最小元で，$a,\ b \in B$ に対し，$a \vee b$ は $\{a,b\}$ の最小上界，$a \wedge b$ は $\{a,b\}$ の最大下界を表わす。
そして，B 上の非自明イデアル I が，
4) B の任意の要素 a に対し，$a \in I$ または $a^* \in I$ （a^* は a の補元を表す）
を満たすならば，I は **プライムイデアル** と言われ，双対のフィルターは**超フィルター** と言われる。

定義3． U を集合 I 上の超フィルターとし，各 A_i $(i \in I)$ を L-構造とする。このとき，次の条件を満たす A_i $(i \in I)$ **の超積** と言われる L-構造 S が存在する。
1) S の土台集合は $\Pi_{i\in I}A_i/U = \Pi_U A_i$，即ち，$f,\ g \in \Pi_{i\in I}A_i$ に対し，
$\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U$ によって同値関係 $f \equiv g$ を定義し，$f \equiv g$ を満たす f と g を同一視した f の全体である $\Pi_U A_i$ を土台集合とする。
2) L の論理式 $\psi(x_1, \cdots, x_k)$ と $\Pi_U A_i$ の要素 $f_{1_U}, \cdots, f_{k_U}$ に対し，$S \models \psi(f_{1_U}, \cdots, f_{k_U})$ であることと，$\{i \in I \mid A_i \models \phi(f_1(i), \cdots, f_k(i))\} \in U$ となることが同値となるように，$S \models \psi(f_{1_U}, \cdots, f_{k_U})$ が定義される。
各 A_i $(i \in I)$ がすべて L-構造 A に等しいとき，A_i $(i \in I)$ の超積 $\Pi_U A_i$ は A **の** U **による超べき** と言われ，$Ult_I(A, U)$ で表わされる。

定義4．(Solovay [24]) I を非可算正則基数 κ 上のイデアルとする。このとき，商代数 $\mathcal{P}(\kappa)/I$ はブール代数となり，強制法の概念となり得る。この概念で集合全体 V を強制拡大し，その生成集合を G_I とすると，G_I は $\mathcal{P}(\kappa)$ 上の V-超フィルターとなる。この超フィルターで V の超べきを作ることができ，この超べきを **生成超べき** と言い，$Ult_\kappa(V, G_I)$ で表わす。
$x \in V$ に対し，値が x である κ 上の定関数を c_x とするとき，x に $c_x \in Ult_\kappa(V, G_I)$ を対応させる関数 j は V から $Ult_\kappa(V, G_I)$ への初等埋込となる。

この生成超べきが整基底的となるイデアル I を**プレシピタス イデアル**という。

私が修士課程にいた 1978 年頃，角田先生は飽和イデアルの研究からプレシピタスイデアルの研究へ移られていたようで，その成果として論文 [10] を発表されたと思う。

定義5． λ を非可算基数，I を非可算正則基数 κ 上の非自明 κ-完備イデアルとする。
このとき，
1) $I^+ = P(\kappa) - I$ の部分族で濃度が λ である I-分割が存在しないとき，イデアル I は λ-**飽和**と言われる。ここで，$P(\kappa)$ の部分族 A が I**-分割** であるとは，任意の異なる二つの A の要素 $X,\ Y$ に対し，$X \cap Y \in I$ となることを言っている。

2) I による商代数 $P(\kappa)/I$ が λ-完備であるとき，イデアル I は **λ-完備的**と言われる。また，商代数 $P(\kappa)/I$ が完備であるとき，イデアル I は単に **完備的**と言われる。
3) I による商代数 $P(\kappa)/I$ が λ-分配的となるとき，イデアル I は **λ-分配的**と言われる。

ここで，記述的イデアルの例を紹介する。
$BD_\kappa = \{X \in P(\kappa) \mid |X| < \kappa\}$
で定義されるイデアル BD_κ を非可算正則基数 κ 上の**有界イデアル** と言われる。

非可算正則基数 κ の部分集合 C は次の各条件を満たすとき，**非有界閉**集合と言われる。
1) 任意の極限順序数 $\alpha < \kappa$ に対し，$sup(C \cap \alpha) = \alpha$ (閉鎖性),
2) 任意の順序数 $\xi < \kappa$ に対し，$\xi < \alpha$ かつ $\alpha \in C$ を満たす順序数 α が存在する。(非有界性)
このように定義すると，
$NS_\kappa = \{X \in P(\kappa) \mid \kappa$ のある非有界閉部分集合 C に対し，$X \cap C = \emptyset$ となる $\}$
は κ 上の**非定常イデアル**と言われるイデアルを形成する。
非可算正則基数 κ 上の非定常イデアルは正規であることが証明される。

定義6．(Smith & Tarski [23]) ブール代数 B は次の条件を満たすとき (α,β)-**分配的**であると言われる。ただし，α，β を順序数とする。
$\langle a_{\xi,\eta} \in B \mid \langle \xi,\eta\rangle \in \alpha\times\beta \rangle$ を B における二重列とし，各 $\xi < \alpha$ に対し，最小上界 $\sum_{\eta<\beta} a_{\xi,\eta}$ とそれらの最大下界 $\Pi_{\xi<\alpha}\sum_{\eta<\beta} a_{\xi,\eta}$ および α から β への関数 f に対し，最大下界 $\Pi_{\xi<\alpha} a_{\xi,f(\xi)}$ がすべて存在するとすると，
最小上界 $\sum_{f\in{}^\alpha\beta}\Pi_{\xi<\alpha}a_{\xi,f(\xi)}$ も存在し，$\Pi_{\xi<\alpha}\sum_{\eta<\beta} a_{\xi,\eta} = \sum_{f\in{}^\alpha\beta}\Pi_{\xi<\alpha}a_{\xi,f(\xi)}$ が成り立つ。

この分配律は次のように一般化される。

《分配律の一般化》

定義7． B をブール代数，λ を基数，f を集合 A からべき集合 $P(B)$ への関数とする。このとき，B が次の条件を満たすならば，B は $\langle\lambda, f\rangle$-**分配律を満たす**と言われる。
あるいは，B は $\langle\lambda, f\rangle$-**分配的**であると言われる。
任意の $b \in B$ および任意の $a \in A$ に対し $\mathbf{0} < b \leqq \bigvee f(a)$ が成り立つならば，任意の $[A]^{<\lambda}$ の要素 t に対し，$b \wedge \bigwedge_{a\in t} v(a) > \mathbf{0}$ を満たす Πf の要素 v が存在する。
ただし，$[A]^{<\lambda} = \{X \subseteq A \mid |X| < \lambda\}$ である。

《一般化の理念》
‘When we construct and develop a powerful set theory based on Zermelo-Fraenkel set theory, it happens quite often to find out one condition, say $h(\alpha)$, from each set of conditions, say A_α, whose disjunction is consistent (i.e., $\bigvee_{\alpha<\kappa} A_\alpha = \mathbf{1}$ in Boolean terms) and arrange them into one consistent condition (i.e., $\bigwedge_{\alpha<\kappa} h(\alpha) > \mathbf{0}$ in Boolean terms).’

§4. イデアルの性質

この節で，いくつかの定義を続けながら，部分節で諸結果を報告したい。

定義8． 非可算正則基数 κ は次の条件を満たすとき，**定常基数**と言われる。

$\mathbf{M}$ を κ の部分集合 X に対し，κ の部分集合

$$\mathbf{M}(X) = \{\xi < \kappa \mid cf(\xi) > \omega \text{ かつ } X \cap \xi \in NS_\xi^+ \}$$

を対応させる関数 (この関数 $\mathbf{M}$ を **マロー算法**という) とするとき，

部分集合の族 $\{ \mathbf{M}(X) \mid X \in NS_\kappa^+ \}$ が κ 上の非自明 κ-完備正規フィルターを生成する。

ただし，$NS_\xi^+ = P(\kappa) - NS_\xi$ である。

定義9． I を非可算正則基数 κ 上の非自明 κ-完備イデアルとする。このとき，

(1) $A \in I^*$ ならば $\mathbf{M}(A) \in I^*$ が成り立つとき，I を M-**イデアル (マローイデアル)** という。

(2) D を I^+ の部分集合とする。$I \subseteq J$ を満たす κ 上の非自明 κ-完備イデアル J が $A \subseteq \kappa$, $S \subseteq D$, $|S| < \lambda$ かつ $[A]_I = \bigvee_{X \in S}[X]_I$ ならば $A \in J$ という条件を満たすならば，J は D **で生成されて** λ-I-**閉鎖的**と言われる。

(3) $I \subseteq J$ を満たす κ 上の非自明 κ-完備イデアル J が $A \subseteq \kappa$, $S \subseteq J$, $|S| < \lambda$ かつ $[A]_I = \bigvee_{X \in S}[X]_I$ ならば $A \in J$ という条件を満たすならば，J は λ-I-**閉鎖的**と言われる。

$|J|^+$-I-閉鎖的な J は，単に，I-**閉鎖的**と言われる。

《部分順序集合への諸概念の一般化》

これよりのち，κ を非可算正則基数，λ を $\kappa \leq \lambda$ である無限基数とし，$\langle S, \prec_S \rangle$ と $\langle T, \prec_T \rangle$ を無限濃度をもつ部分順序集合とする。そして，I を S 上のイデアルとする。

S の部分集合 A は，I に属したときは I-**測度** 0，I に属さなければ I-**測度正**，$S - A$ が I に属していれば，A は I-**測度** 1 であるなどと言われ，測度論的な言い回しをする場合がある。

では，これらを用いて従来の概念を次のように一般化する。

定義１０． A を S の部分集合とするとき，

(1) A が $\prec$-**有界 (bounded)** であることを，すべての A の要素 x に対し $x \prec a$ を満たす S の要素 a が存在することと定める。

(2) A が $\prec$-**非有界 (unbounded)** であることを，S の各要素 a に対し $a \prec x$ を満たす A の要素 x が存在することと定める。

(3) A が $\prec$-**閉鎖 (closed)** であることを，$\langle a_\xi : \xi < \mu \rangle$ が A における $b = \sup_{\xi < \mu} a_\xi$ を満たす任意の $\prec$-増加列ならば b は A に属することと定める。

(4) A が $\prec$-**非有界閉 (unbounded closed)** であることを，A が $\prec$-非有界かつ $\prec$-閉鎖であることと定める。

(5) A が $\prec$-**定常 (stationary)** であることを，A が任意の $\prec$-閉非有界 C と空でない交わりをもつことと定める。

(6) A が $\prec$-**稀薄 (thin)** あるいは $\prec$-**非定常 (non-stationary)** であることを，A が $\prec$-定常でないことと定める。

定義１１． I を S 上のイデアル，f を S の部分集合 A で定義された関数とする。
(1) f が I-**小的 (small)** であることを，任意の $ran(f)$ の要素 x に対し $f^{-1}(\{x\}) \in I$ となることと定める。
(2) f が A の部分集合 D において $\prec$-**単射 (injection)** であることを，a，b を $a \prec b$ または $b \prec a$ を満たす D の要素とすると $f(a) \neq f(b)$ となることと定める。
(3) f が $\prec$-**後退的 (regressive)** であることを，$ran(f) \subseteq S$ で A の各要素 a に対し $pr_{\prec}(a) \neq \emptyset$ ならば $f(a) \prec a$ が成り立ち，それを満たさない a ならば $f(a) = a$ となることと定義する。ただし，$pr_{\prec}(a) = \{b \in S \mid b \prec a\}$ である。

定義１２． h を S から $\mathcal{P}(S)$ への関数とする。
(1) $X = \{x \in S \mid \forall y \prec x,\ \ x \in h(y)\}$ で定義される X を h の $\prec$-**対角積集合 (diagonal-intersection)** といい，$\triangle_{\prec} h$ で示される。
(2) $X = \{x \in S \mid \exists y \prec x,\ \ x \in h(y)\}$ で定義される X を h の $\prec$-**対角和集合 (diagonal-union)** といい，$\triangledown_{\prec} h$ で示される。

定義１３． I を S 上のイデアルとする。
(1) I が**非自明 (non-trivial)** であるとは，任意の $a \in S$ に対し，$\{a\} \in I$ となることと定める。
(2) I が $\prec$-**微細 (fine)** であるとは，S の部分集合 A が $\prec$-非有界でなければ，$A \in I$ となることと定める。
(3) I が $\prec$-**正規 (normal)** であるとは，任意の S から I への関数 h に対し，$\triangledown_{\prec} h \in I$ となることと定める。

したがって，$\prec$-微細なイデアルは非自明となる。

以上の定義された概念は，S を非可算正則基数 κ，$S = \kappa$ 上の順序 $\prec$ を所属関係 $\in$ とすると，通常のイデアルに対する概念である，**有界**，**非有界**，**閉鎖**，**非有界閉**，**定常**，**稀薄** あるいは **非定常**，**対角和集合**，**対角積集合**，**微細**，**正規**となる。

補題１． ***I を S 上の $\prec$-微細イデアル，集合 $A = \{a \in S : pr_{\prec}(a) = \emptyset\}$ が I-測度 0，つまり，I に属すると仮定する。***

このとき，I が $\prec$-正規であることは，任意の I-測度正，つまり，I に属さない集合 D で定義された $\prec$-後退関数は I-細小でないことの必要十分条件である。

補題１ の証明. (必要性) ： I に属さない集合 D で定義されたどのような $\prec$-後退関数も I-小的でないと仮定し，導きたい結論とは逆の，I は $\prec$-正規でない，つまり，ある S から I への関数 h に対し，$\triangledown_{\prec} h \notin I$ であると仮定する。

$D = \triangledown_{\prec} h$ とおくと，各 $a \in D - A \notin I$ に対し，選択公理を用いて $a \in h(b_a)$ かつ $b_a \prec a$ を満たす b_a をとる。そして，各 $a \in A$ にこの b_a を対応させる関数 f を考える。明らかに，f は $\prec$-後退的関数で，仮定より $f^{-1}(\{b\}) \subseteq h(b) \in I$ なので，f は I-小的関数である。これは仮定に反する。したがって，I は $\prec$-正規である。

(十分性) ： I を $\prec$-正規と仮定し，f を I-測度正の集合 D で定義された $\prec$-後退関数とす

る。もし，すべての $b \in ran(f)$ に対し，$f^{-1}(\{b\}) \in I$ とすると，$a \in D$ ならば $f(a) \prec a$ で，$b \in ran(f)$ で $b \prec a$ かつ $a \in f^{-1}(\{b\})$ を満たす b が存在する。$g(b) = f^{-1}(\{b\})$ とおくと，g は $ran(f)$ から I への関数で，$a \in \triangledown_{\prec} g$ を満たす。ゆえに，$D \subseteq \triangledown_{\prec} g$ かつ $\triangledown_{\prec} g \in I$ となるので，$D \in I$ が導かれれる。これは f についての仮定に矛盾する。したがって，任意の I-測度正の集合 D で定義された $\prec$-後退関数は I-小的でない。

最後に，マロー算法の一般化を紹介する。

先ず，$pr_{\prec}(a) = \{b \in S \mid b \prec a\}$ の一般化として，次の各条件を満たす S から $\mathcal{P}(T)$ への関数 σ を定める。

*1) $a \prec b$ ならば $\sigma(a) \subseteq \sigma(b)$ となる，

*2) 各 $a \in S$ に対し，$|\sigma(a)| < \kappa$ となる，

*3) 集合 $C_0 = \{a \in S \mid \sigma(a) \subseteq \bigcup_{b \prec a} \sigma(b)\}$ は S において $\prec$-非有界閉となる。

定義１４． $\langle S, \prec_S \rangle$ と $\langle T, \prec_T \rangle$ を部分順序集合，σ を $a \prec_S b$ ならば $\sigma(a) \subseteq \sigma(b)$ となる S から $\mathcal{P}(T)$ への関数とする。このとき，一般化されたマロー算法 M_σ を次のように定義する。

$M_\sigma(X) = \{a \in S \mid cf_{\prec_T}(\sigma(a)) > \aleph_0$ かつ $X \cap \sigma(a)$ は $\sigma(a)$ において $\prec_T$-定常である $\}$

ここで，$cf_{\prec T}(A)$ は，正則基数 λ から A への関数 h で $ran(h)$ が A において $\prec$-非有界となる関数 h が存在する最小の基数 λ を表す。

§5. κ^+-飽和イデアル

イデアルについての諸結果の紹介のはじめとして，κ^+-飽和イデアルを採り上げる。角田先生の論文 [8] を踏まえて，後述の定理１の系を結果 (解答) とする問題を修士論文の課題として課されたのを思いだす。

定理１．([12]) λ を κ^+ 以下の基数とし，I を κ 上の非自明 κ-完備イデアルとする。このとき，次の各条件は同値となる。

(1) I は λ-飽和である。

(2) 生成超べき $Ult_\kappa(V, G_I)$ の各要素は V における濃度が λ より小さい分離汎関数によって表わされる。

(3) 生成超べき $Ult_\kappa(V, G_I)$ における $j(sat(I))$ より小さい順序数は V における濃度が λ より小さい分離汎関数によって表わされる。

上記における**分離汎関数**とは関数の集まり F で集合 $\{dom(f) \mid f \in F\}$ が I-分割となっているものを言う。

さらに，j が $V[G_I]$ における V から生成超べき $Ult_\kappa(V, G_I)$ への自然な初等的埋込とし，$sat(I)$ で I が μ-飽和でない最小の順序数 (正則基数となる) を表す。

濃度が κ^+ より小さい分離汎関数 F においては，$\{dom(f) \mid f \in F\}$ が真の分割，つまり，F の異なる要素 f，f' に対し，$dom(f) \cap dom(f') = \emptyset$ となるので，$\bigcup F$ が一つの関数となる。これより，次のことが証明される。

系. ([12]) **κ-完備非自明イデアル I が κ^+-飽和であることと，生成超べき $Ult_\kappa(V, G_I)$ の順序数が V の通常の関数 (の同値類) で表わされることとは同値となる。**

§6. 完備的イデアル

イデアルについての諸結果の次なる報告として，完備的イデアルを採り上げる。
角田先生が完備的イデアルについても考察されていたことは論文 [9] で窺うことができる。

定義15. 正則非可算基数 κ 上の**自然なマロー列** $\langle M_\alpha : \alpha < \theta(\kappa) \rangle$ を次のように α に関する帰納法で定義する :

$M_0 = \kappa$ とし，$\alpha = \beta + 1$ かつマロー算法 $\mathbf{M}$ を用いて，$\mathbf{M}(M_\beta)$ が κ の定常な部分集合ならば $M_\alpha = \mathbf{M}(M_\beta)$ と定義する。ただし，$\mathbf{M}(M_\beta)$ が κ の定常な部分集合でなければ，$\theta(\kappa) = \alpha$ として，定義する列は M_β で終わる。

α が極限順序数で，すべての $\beta < \alpha$ に対し，M_β が κ の定常部分集合として定義されているとする。このとき，M_α を $[M_\alpha]_{NS_\kappa} = \bigwedge_{\beta<\alpha}[M_\beta]_{NS_\kappa}$ を満たす κ の定常部分集合として定義する。そのような部分集合がなければ，$\theta(\kappa) = \alpha$ として，定義を終了する。

定義16. λ を基数とするとき，イデアル NS_κ の部分集合の列が $N = \langle A_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ が κ **上の λ-閉マロー族** であるとは，その列が次の条件を満たすことを言っている。

(1) $A_0 = NS_\kappa^*$, 各 $\alpha < \delta$ に対し，$\emptyset \notin A_\alpha$，$A_\alpha \neq A_{\alpha+1}$ かつ $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1}$ が成り立っている。

(2) $\alpha < \delta$ とする。A_α のある要素 Y に対し，$\mathbf{M}(Y) - X \in NS_\kappa$ となる X をすべて集めた集合が $A_{\alpha+1}$ である。

(3) α が δ 未満の極限順序数とする。$\bigwedge_{Z\in B}[Z]_{NS_\kappa}$ が存在し濃度が λ 未満の $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ のある部分集合 B に対し，$[\emptyset]_{NS_\kappa} < \bigwedge_{Z\in B}[Z]_{NS_\kappa} \leq [X]_{NS_\kappa}$ となる κ の部分集合 X をすべて集めた集合が A_α である。

(4) 任意の $\bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha$ の濃度が λ 未満である部分集合 B に対し，$\bigwedge_{Z\in B}[Z]_{NS_\kappa}$ が存在するならば，$[X]_{NS_\kappa} = \bigwedge_{Z\in B}[Z]_{NS_\kappa}$ を満たす $\bigcup_{\alpha<\delta} A_\alpha$ の要素 X が存在する。

ここで δ は λ-閉マロー族 N の**長さ**といわれ，$l(N)$ で表わされる。特に，$|NS_{\kappa^+}|^+$-閉マロー族は，単に，κ **上の マロー族**と呼ばれる。

定義17. (1) ([2]) 非可算正則基数 κ が**強大マロー (greatly Mahlo)** であるとは，自然なマロー列の長さが κ^+，つまり，$\theta(\kappa) = \kappa^+$ となることである。

(2) ([16]) 非可算正則基数 κ が**超大マロー (super Mahlo)** であるとは，κ 上のマロー族が存在することを言う。

定理2. ([17]) **κ を非可算正則基数とし，λ を κ^+ 以下の無限基数とする。このとき，κ 上の λ-閉マロー族が存在することと，κ が λ-NS_κ-閉鎖的 M-イデアルをもつことと同値になる。**

系. ([17]) **(1) κ が超大マロー基数であることと，κ が NS_κ-閉鎖的 M-イデアルをもつことは同値である。**

(2) κ が強大マロー基数であることと，κ が κ^+-NS_κ-閉鎖的 M-イデアル，つまり，正規 M-イデアルをもつことは同値である。

補題3．([17]) **J を NS_κ を含む非可算正則基数 κ 上の非自明イデアルとする。このとき，次のことが成り立つ。**

(1) J が κ-完備であることと，J が κ-NS_κ-閉鎖的であることは同値となる。

(2) J が κ-完備で正規であることと， J が κ^+-NS_κ-閉鎖的であることは同値となる。

補題4．(Baumgartner, Taylor and Wagon ([2]) or Kakuda ([9])) I が非可算正則基数 κ 上の M-イデアルならば，任意の κ の定常部分集合 A に対し，$I \neq NS_\kappa \lceil A$ となる。

上記結果は角田先生がバウムガルトナーの方たちとは独立に証明された。少し？理由があって公表が遅れたと聞いている。

定理5．(Baumgartner, Taylor and Wagon ([2]) or Kakuda ([9])) I を非可算正則基数 κ 上の非自明 κ-完備イデアルとする。 このとき，

(1) I が κ-飽和であることと，I の任意の非自明 κ-I-閉鎖的拡大イデアル J は $J = I\lceil A$ となる $A \in I^+$ があることとが，同値になる。

(2) I が正規であると仮定すると，I が κ^+-飽和であることと，I の任意の非自明 κ^+-I-閉鎖的拡大イデアル J は $J = I\lceil A$ となる $A \in I^+$ があることとが，同値になる。

ただし，J **が** I **の拡大イデアル**とは J が I を含むイデアルということである。

補題3 (2) と 定理5 (2) より， NS_κ が κ^+-飽和ならば，非自明 κ-完備正規イデアル J はある $A \in NS_\kappa$ に対し，$J = NS_\kappa\lceil A$ となる。したがって，補題4より， J は M-イデアルでない。故に，κ は 非自明 κ-完備正規 M-イデアルをもたない。 これと定理2の系の (2) より，κ が 強大マロー基数 ならば NS_κ は κ^+-飽和でないこととなる。

定理6．([17]) I を非可算正則基数 κ 上の非自明 κ-完備イデアルとする。 このとき，λ を κ^+ 以上の基数とすると，I が λ-完備的であることと，濃度が λ 未満の I^+ の任意の部分集合 D に対し，J が 非自明 κ-完備 λ-I-閉鎖的 I の拡大イデアルならば $J = I\lceil A$ となる $A \in I^+$ が存在することと，同値となる。

系1．([17]) I を非可算正則基数 κ 上の非自明 κ-完備イデアルとするとき，I が完備的であることと，I の I-閉鎖的拡大イデアル J は，ある $A \in I^+$ に対し，$J = I\lceil A$ となることと同値である。

系2．([17]) 非可算正則基数 κ が超大マロー基数ならば非定常イデアル NS_κ は完備的でない。

補題7．([17]) κ を定常基数，H を集合 $\{ \mathrm{M}(X) \mid X \in NS_\kappa^+ \}$ で生成された非自明 κ-完備

正規フィルターとする。そして，$A=\{\alpha<\kappa \mid \alpha$ は弱到達不可能基数 $\}$ とおく。
このとき，A は κ における定常集合で，H^* に属する。

定理８．([17]) **すべての定常基数は超大マロー基数である。**

系 ([17]) **(1) κ を弱コンパクト基数とすると，商代数 $P(\kappa)/NS_\kappa$ は完備でない。**
(2) κ が 非自明 κ-完備 κ-飽和イデアルをもつならば，商代数 $P(\kappa)/NS_\kappa$ は完備でない。

弱コンパクト基数および非自明 κ-完備 κ-飽和イデアルをもつ非可算正則基数は定常基数であることが知られているので，上記の系が導かれる。

定理９．([17]) **κ を強コンパクト基数，I を κ 上の非自明 κ-完備イデアルそして B を I-正則なブール代数とする。このとき，**
I が完備的イデアルならば，B による生成拡大 V^B において，$J\lceil A$ が完備的となる $\check{\kappa}$ の部分集合 A が存在する。

ここで，J は生成拡大 V^B において，$\check{I}$ から生成されたイデアルを表し，B の I-**正則**という性質は，V^B において，$J\lceil A$ が非自明 $\check{\kappa}$-完備イデアルとなる $\check{\kappa}$ の部分集合 A が存在することを保証する B についての条件である。

系１．([17]) **M を ZFC の推移的模型とし，この M において κ を強コンパクト基数，λ を κ 未満の非可算正則基数とする。 このとき，ある生成拡大 $M[G]$ において，$\kappa=\lambda^+$ で，κ 上に非自明 κ-完備で完備的であるが κ^+-飽和でないイデアルが存在する。**

系２．([17]) **$ZFC+$“強コンパクト基数が存在する”という理論が無矛盾ならば，$ZFC+$“商代数 $P(\kappa)/I$ が完備だが κ^+-飽和でない非可算正則基数 κ 上の非自明 κ-完備イデアル I が存在する”という理論も無矛盾である。**

非可算正則基数 κ が非自明 κ-完備で完備的だが κ^+-飽和でないイデアルをもつと，$\kappa^+<2^\kappa$ となることは確認しておくべきである。

定理１０．(Kanamori & Shelah [22]) **$ZFC+$“ウッディン基数が存在する”という理論が無矛盾ならば，$ZFC+$“$\aleph_1$ 上に非自明 $\aleph_1$-完備で完備的なイデアル I があり，$2^{\aleph_0}=\aleph_1$ かつ $2^{\aleph_1}=\aleph_3$ である (したがって，I は $\aleph_2$-飽和でない)”という理論も無矛盾である。**

定理１１．(Gitik & Shelah (1997)) **$\aleph_2$ 以上の任意の正則基数 κ に対し，イデアル NS_κ は κ^+-飽和でない。**

§7. 分配的イデアル

種々のイデアルの性質として，分配的イデアルを採り上げ，それらの結果を報告する。この性質に注目した理由は，角田先生の論文 [10] におけるプレシピタスイデアルより強い条件である ω-分配的イデアルに注目して，[10] と同様な結果 ([13]) を得ようとしたことである。

その後，[5] の影響を受けて，一般化された分配律の定義と考察に向かっていった。([15])

定理１２． ([18]) ZF **の体系において，次の各条件は同値となる。**

(1) κ-**選択公理**

(2) **すべてのべき集合は** $\langle 2, \kappa\rangle$-**分配律を満たす。**

定理１３． ([18]) ZF **の体系において，次の各条件は同値となる。**

(1) **従属選択公理**

(2) **すべてのブール代数は** $\langle \omega, \omega\rangle$-**分配律を満たす。**

定理１４． ([18]) κ **を任意の基数，** B **を濃度が** λ **である** κ-**完備ブール代数とする。このとき，次の各条件は同値となる。**

(1) B **において** κ-**完備プライムイデアルが存在する。**

(2) B **において** $\langle \kappa, C_{\lambda,2}\rangle$-**分配的イデアルが存在する。**

上記において， $C_{\lambda,2}$ **は** λ **上で定義された常に** 2 **の値をとる定関数を表すことを確認する。**

系． ([5]) **(F.G. Abramson, L.A. Harrington, E.M. Kleinberg and W.S. Zwicker, C.A. DiPrisco and W.S. Zwicker)** κ **を非可算正則基数とするとき，次のことが成り立つ。**

(1) κ **が弱コンパクト基数であることとイデアル** BD_κ **が** $\langle \kappa, C_{\kappa,2}\rangle$-**分配的であることは同値となる。**

(2) κ **が可測基数であることとイデアル** BD_κ **が** $\langle \kappa, C_{2^\kappa,2}\rangle$-**分配的であることは同値となる。**

(3) κ **が強コンパクト基数であることと** κ **以上の各正則基数** λ **に対し，イデアル** BD_κ **が** $\langle \kappa, C_{2^\lambda,2}\rangle$-**分配的であることは同値となる。**

定理１５． ([15]) κ **を非可算正則基数，** λ **を** $\kappa \le \lambda$ **である無限基数とし，** $\langle S, \prec_S\rangle$ **と** $\langle T, \prec_T\rangle$ **を無限濃度をもつ部分順序集合とする。このとき，次の各条件は同値となる。**

(1) σ **を定義１４の前に定めた *1)，*2) かつ *3) を満たす** S **から** $\mathcal{P}(T)$ **への関数で，各** S **の要素** a **に対して** $\langle t_a \mid a \in S\ \rangle$ **を** $t_a \subseteq \sigma(a)$ **を満たす列とするならば，任意の** $a \in S$ **に対し，** S **の要素** $a \prec b$ **かつ** $t \cap \sigma(a) = t_b \cap \sigma(a)$ **を満たす** b **が見つかるような** T **の部分集合** t **が存在する。**

(2) S **上のイデアルで，任意の** S **から** κ **への関数** f **に対し** $\langle \kappa, f\rangle$-**分配的となる微細イデアルが存在する。**

補題１６． ([16]) D **を空でない任意の集合とする。** κ **を非可算正則基数，** λ **を** $\kappa \le \lambda$ **である無限基数とし，** $\langle S, \prec_S\rangle$ **と** $\langle T, \prec_T\rangle$ **を無限濃度をもつ部分順序集合とする。**

σ を定義14の前に定めた *1) と *2) を満たす S から $\mathcal{P}(T)$ への関数とし，I を S 上の $\prec_S$-微細 κ-完備 $\prec_S$-正規 $\langle 3, f\rangle$-分配的イデアルとする。ただし，f は $H = (\{0\}\times S)\cup(\{1\}\times D)$ において定義された基数を値とする関数で $f(0,a) = |P(\sigma(a))| = \mu_a$ $(a \in S)$ かつ $f(1,d) = \eta_d$ $(d \in D)$ を満たすものとする。

そして，A が I-測度正の S の部分集合，$\langle t_a \mid a \in A\ \rangle$ と $\langle W_d \mid d \in D\ \rangle$ を条件

$t_a \subseteq \sigma(a)$ $(a \in A)$，$|W_d| \leq \eta_d$ および $[A]_I \leq \bigvee_{X\in W_d}[X]_I$ ($d \in D$) を満たす共に $P(S)$ の部分集合の列とする。

このとき，S の部分集合 E および H で定義された関数 h で

1) $d \in D$ ならば $h(1,d) \in W_d$,

2) 任意の $a \in S$ に対し，集合 $h(0,a) \subseteq \{b \in A \mid a \prec_S b$ かつ $E\cap\sigma(a) = t_b \cap \sigma(a)\ \}$ が I-測度正となる,

3) 任意の $p \in [H]^{<3}$ に対し，$\bigcap_{\langle i,b\rangle\in p} h(i,b)$ も I-測度正になる,

を満たすものが存在する。

補題16 の証明. 各 $a \in S$ に対し，$\langle t_{\xi,a} : \xi < \mu_a\rangle$ を $\mathcal{P}(\sigma(a))$ の枚挙とする。

各 $a \in S$ と $\xi < \mu_a$ に対し，$X_{\xi,a} = \{b \in A \mid a \prec_S b$ かつ $t_b \cap \sigma(a) = t_{\xi,a}\ \}$ と定義する。

このとき，各 $a \in S$ に対し，$P_a = \{X_{\xi,a} \mid \xi < \mu_a$ かつ $X_{\xi,a} \in I^+\ \}$ は A の I-分割になっている。I の $\langle \nu, f\rangle$-分配的性質より，H 上の関数 h で，任意の $p \in [H]^{<3}$ に対し，$\bigcap_{\langle i,b\rangle\in p} h(i,b)$ が I-測度正となっている h がある。

したがって，$\bigcap_{\langle i,b\rangle\in p} h(i,b)$ は空集合でない。

$h(0,a) = X_{i(a),a}$ $(a \in A)$ とし，a，b を S の任意の要素とする。さらに，$c \in h(0,a)\cap h(0,b)$ を任意とすると，$t_c \cap \sigma(a) = t_{i(a),a}$ かつ $t_c \cap \sigma(b) = t_{i(b),b}$ が成り立ち，

$t_{i(a),a} \cap \sigma(b) = t_c \cap \sigma(a) \cap \sigma(b) = t_{i(b),b} \cap \sigma(a)$ が導かれる。

$E = \bigcup_{a\in S} t_{i(a),a}$ とおくと，任意の $a \in S$ に対し，$b \in h(0,a)$ ならば $E \cap \sigma(a) = t_b \cap \sigma(a)$ となる。

何故ならば，$\sigma(a) \subseteq \sigma(b)$ なので，すべての $c \in S$ に対し，$t_{i(c),c}\cap\sigma(a) = t_{i(b),b}\cap\sigma(a)\cap\sigma(c)$ が成り立つので，次の等式の鎖が導かれるからである：

$E\cap\sigma(a) = \bigcup_{c\in S} t_{i(c),c}\cap\sigma(a) = t_{i(b),b}\cap\bigcup_{c\in S}\sigma(c)\cap\sigma(a) = t_{i(b),b}\cap\sigma(a) = t_{i(a),a} = t_b\cap\sigma(a)$

これで定理の証明が完了する。

定理17．([16]) κ を非可算正則基数，λ を $\kappa \leq \lambda$ である無限基数とし，$\langle S, \prec_S\rangle$ と $\langle T, \prec_T\rangle$ を無限濃度をもつ部分順序集合とする。

σ を定義14の前に定めた *1) と *2) を満たす S から $\mathcal{P}(T)$ への関数とし，I を S 上の $\prec_S$-微細 κ-完備 $\prec_S$-正規 $\langle 3, f\rangle$-分配的イデアルとする。ただし，f は $H = (\{0\}\times S)\cup(\{1\}\times T)$ において定義された基数を値とする関数で $f(0,a) = P(\sigma(a))$ $(a \in S)$ かつ $f(1,t) = T$ $(t \in T)$ を満たすものとする。

さらに，集合 $R = \{a \in S \mid cf_{\prec_T}(\sigma(a)) > \aleph_0\ \}$ は I-測度正で，各 $t \in T$ に対し，集合 $\{a \in S \mid t \in \sigma(a)\ \}$ は I-測度 1 をもつとする。また，g が I-測度正の S の部分集合 A 上の関数で $g(a) \in \sigma(a)$ を満たすならば $g\lceil B$ が定関数となる I-測度正の A の部分集合 B があると仮定する。

このとき，X が T の $\prec_T$-定常部分集合ならば集合 $R - M_\sigma(X)$ は I-測度 0 をもつ。

定理17 の証明. 証明すべきこととは逆に，X が T の $\prec_T$-定常部分集合で，集合 $A =$

$R - M_\sigma(X)$ が I-測度正であると仮定し，矛盾を導く。

各 $a \in A$ に対し，$X \cap C_a = \emptyset$ を満たす $\sigma(a)$ の $\prec_T$-非有界閉部分集合 C_a が存在する。t を T の任意の要素，f_t を集合 $\{C_b \mid t \in \sigma(b)$ かつ $b \in A\}$ 上で定義された選択関数で $t \prec_T f_t(b)$ かつ $f_t(b) \in C_b$ を満たすものとする。

このとき，I の $\prec_S$-正規性より $\subseteq$ に関する極大集合 $\{\langle X_{t,\xi}, e_{t,\xi}\rangle \mid \xi < \eta_t \le |T|\}$ で次の条件を満たすものが存在する：

i) $W_t = \{X_{t,\xi} \mid \xi < \eta_t\}$ は A の I-分割である，

ii) 任意の $b \in X_{t,\xi}$ に対して，$t \prec_T e_{t,\xi}$ かつ $e_{t,\xi} \in C_b$ となる。

補題１６より，S の部分集合 C および H で定義された関数 h で

1) $t \in T$ ならば $h(1,t) = X_{t,\xi} \in W_t$,

2) 任意の $a \in S$ に対し，集合 $h(0,a) \subseteq \{b \in A \mid a \prec_S b$ かつ $C \cap \sigma(a) = t_b \cap \sigma(a)\}$ が I-測度正となる，

3) 任意の $p \in [H]^{<3}$ に対し，$\bigcap_{\langle i,b\rangle \in p} h(i,b)$ も I-測度正になる，

を満たすものが存在する。

b と t をそれぞれ A および T の任意の要素で $h(1,t) = X_{t,\xi}$ かつ $e_{t,\xi} \in \sigma(b)$ を満たすものとする。A は I-測度正なのでそのような b がとれる。

このとき，$h(0,b) \cap h(1,t)$ から要素 d を選ぶと，明らかに $e_{t,\xi} \in C_d$ かつ $t \prec_T e_{t,\xi} \in \sigma(b)$ となる。これより，$e_{t,\xi}$ は $C_d \cap \sigma(b) = C \cap \sigma(b)$ に属する。このように，C は $\prec_T$-非有界集合である。

C が $\prec_T$-閉鎖であることは簡単に示せるので，C は $C \cap X = \emptyset$ で T における $\prec_T$-非有界閉集合となる。このことは X が T の $\prec_T$-定常部分集合であることに矛盾する。

この定理は定常反映についての結果をいくつか導く。

系１．([16]) κ を到達不能基数とし，I を κ 上の非自明 κ-完備正規で $\langle\aleph_1, C_{\kappa,\kappa}\rangle$-分配的イデアルとする。このとき，$I$ は M-イデアルとなる。したがって，κ は強大マロー基数となる。

系２．([16]) $S = P_{<\eta}(\lambda)$，$T = P_{<\mu}(\lambda)$ とし，$\aleph_0 < \mu < \eta \le \kappa \le \lambda$ かつ 各 $\nu < \eta$ に対し，$2^{(\nu^{<\mu})} < \kappa$ とする。

さらに，I を S 上の $\prec_S$-微細 κ-完備 $\prec_S$-正規で $\langle\aleph_1, C_{S,\tau}\rangle$-分配的なイデアルとする。

このとき，X が T の $\prec_T$-定常部分集合ならば，集合

$M_{\sigma_1}(X) = \{a \in S \mid cf_{\prec_T}(P_{<\mu}(a)) > \aleph_0$ **かつ** $X \cap P_{<\mu}(a)$ **は** $P_{<\mu}(a)$ **において** $\prec_T$**-定常である** $\}$
は I-測度 1 をもつ。

系３．κ を λ-超コンパクト基数とし，λ は $\kappa \le \lambda$ を満たす正則基数とする。

このとき，すべての非可算正則基数 $\mu < \kappa$，$T = P_{<\mu}(\lambda)$ のすべての $\prec_S$-定常部分集合 X および $S = P_{<\kappa}(\lambda)$ のすべての 固い (tight) $\prec_S$-非有界部分集合 A に対し，集合 $\{a \in A \mid X \cap P_{<\mu}(a)$ $P_{<\mu}(a)$ において $\prec_T$-定常である $\}$ はある S 上の $\prec_S$-微細 κ-完備 $\prec_S$-正規 超フィルターに含まれる。

系３における，S の部分集合 A が **固い (tight)** であるとは，D を A の任意の部分集合と

するとき，任意の D における列 $\langle a_n : n < \omega \rangle$ に対し，$\bigcup_{n<\omega} a_n \subseteq a$ を満たす D の要素 a があり (このことを D は ω-**方向性 (-directed)** と言われる)， $\omega < cf.(|D|) \leq |D| < \kappa$ が成り立つならば，$\bigcup D \in A$ が満たされることを言う。

定理１８．(Feng & Magidor) κ を λ-超コンパクト基数とし，λ は $\kappa \leq \lambda$ を満たす正則基数とする。

このとき，$P_{<\omega_1}(\lambda)$ のすべての定常部分集合 S，$P_{<\kappa}(\lambda)$ のすべての固い非有界部分集合 A に対し，$S \cap P_{<\omega_1}(X)$ が $P_{<\omega_1}(X)$ において定常集合となるような集合 $X \in A$ が存在する。

定理１９．([16]) κ を到達不能基数とし，$S = P_{<\kappa}(\lambda)$ 上に $\prec$-微細 κ-完備 $\prec$-正規 $\langle \aleph_1, C_{S,\lambda} \rangle$-分配的イデアルがあるとすると，$\lambda^{<\kappa} = \lambda$ が成り立つ。

系. (Solovay) κ を超コンパクト基数とすると，κ より大きい任意の正則基数 λ に対し，$\lambda^{<\kappa} = \lambda$ が成り立つ。

参考文献

[1] K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, **Princeton University Press, Princeton**, (1940).

[2] J. E. Baumgartner, A. D. Taylor, and S. Wagon, *On splitting stationary subsets of large cardinals*, *Structural properties of ideals*, **The Journal of Symbolic Logic**, vol.42, (1977), pp 203-214.

[3] J. E. Baumgartner, A. D. Taylor, and S. Wagon, *Saturation properties of ideals in generic extensions I·II*, **Trans. Amer. Math. Soc.**, vol.270, (1982), pp 557-574.

[4] J.L.Bell, *Boolean-valued Models and Independence Proofs in Set Theory*, **Oxford University Press**, (1978/1/12).

[5] F.G.Abramson, L.A.Harrington, E.M. Kleinberg, W.S. Zwicker, *Flipping properties: A unifying thread in the theory of large cardinals*, **Annals of Mathematical Logic**, vol.12, (1977), pp 25-58.

[6] T. Jech, **Set Theory** (The Third Millennium Edition, revised and expanded), **Springer Monographs in Mathematics**, (2003).

[7] T. Jech, M. Magidor, W. Mitchell and K. Prikry, *Precipitous ideals*, **Journal of Symbolic Logic**, vol.45, (1980), pp.1-8.

[8] Y. Kakuda, *Saturated ideals in Boolean extensions,* **Nagoya Math. J.**, vol.48, (1972), pp 159-168.

[9] Y. Kakuda, *Saturation of Ideals and Pseudo-Boolean Algebras of Ideals on Sets*, **Mathematics seminar notes**, vol.6(2), (1978), pp 269-321.

[10] Y. Kakuda, *On a condition for Cohen extensions which preserve precipitous ideals*, **The Journal of Symbolic Logic**, vol.46(2), (1981), pp 296-300.

[11] 角田 譲, 最近の集合論, **科学基礎論研究,** vol.17(1), (1984), pp 21-30.

[12] Y. Kanai, *About κ^+-saturated ideals*, **Mathematics Seminar Notes**, Kobe University,

vol.9(1), (1981), pp 65-74.

[13] Y. Kanai, *On quotient algebras in generic extensions*, **Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli**, vol.33(1), (1984), pp 71-77.

[14] Y. Kanai, *On a variant of weak Chang's Conjecture*, **Zeitschrift math.Logik und Grundlagen d. Math.**, vol.37, (1991), pp 289-292.

[15] Y. Kanai, *On a generalization of distributivity*, **Journal of Symbolic Logic**, vol.59(3), (1994), pp 1055-1067.

[16] Y. Kanai, *Distributivity and Stationary Reflections*, **Proceedings of American Mathematical Society**, vol.127(10), (1999), pp 3073-3080.

[17] Y. Kanai, *On Completeness of the Quotient Algebras* $P(\kappa)/I$, **Archive for Mathematical Logic**, vol.39(2), (2000), pp 75-87.

[18] Y. Kanai, *On the Deductive Strength of Distributivity Axioms for Boolean Algebras in Set Theory*, **Mathematical Logic Quarterly**, vol.48(3), (2002), pp 413-426.

[19] A. Kanamori, *The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen*, **The Bulletin of Symbolic Logic**, vol.2, (1996), pp 1-71.

[20] A. Kanamori, *Introduction*, in **Handbook of Set Theory Vol. 1**, (2010), pp 1-92.

[21] A. Kanamori and M. Magidor, *The evolution of large cardinal axioms in set theory*, in : **Higher set theory (G. Muller and D. Scott, eds)' Lecture Notes in Mathematics**, vol.669, Springer-Verlag, Berlin, (1978), pp 99-275.

[22] A.Kanamori and S.Shelah, *Complete quotient Boolean algebras*, **Trans. Amer. Math. Soc.**, vol.347, (1995), pp 1963-1979.

[23] G.H. Moore, *Early History of Generalized Continuum Hypothesis*, **The Bulletin of Symbolic Logic**, vol.17, (2011), pp 489-532.

[24] E. C. Smith, Jr. and Alfred Tarski, *Higher Degrees of Distributivity and Completeness in Boolean Algebras*, **Transactions of the American Mathematical Society**, Vol. 84, No. 1, (1957), pp 230-257.

[25] R.M. Solovay, *Real-valued measurable cardinals*, **Axiomatic Set Theory, (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967)**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1971), pp 397-428.

[26] 田中一之 編, ‘ゲーデルと２０世紀の論理学’東京大学出版会 , (2007)