数理解析研究所講究録
第2051巻 2017年 57-63

Separability and weak separability in skew polynomial rings

津山工業高等専門学校　総合理工学科　山中聡 (Satoshi YAMANAKA)
Department of Integrated Science and Technology
National Institute of Technology, Tsuyama College

Abstract

[13] において, 筆者は微分型歪多項式環 $B[X;D]$ における p-多項式に関しての分離性と弱分離性との差異を示した. 本論文ではこの結果を $B[X;D]$ における一般のモニック多項式に拡張する.

1　序と準備

A/B を (単位元を共有する) 環拡大, M を 両側 A-加群とする. 加法的な写像 $\delta: A \longrightarrow M$ が B-微分 (B-derivation) であるとは, $\delta(xy)=\delta(x)y+x\delta(y)$ $(x,y\in A)$ かつ $\delta(b)=0$ $(b\in B)$ が成り立つときにいう. さらに, ある適当な $m\in M$ により $\delta(x)=mx-xm$ $(x\in A)$ となるとき, δ は内部的 (inner) であるという.

環拡大 A/B が分離的 (separable) であるとは, $x\otimes y\mapsto xy$ $(x,y\in A)$ により定まる $A\otimes_B A$ から A への A-A-準同型が分裂 (split) するときにいう. 良く知られているように, A/B が分離拡大であることと, 任意の両側 A-加群 M について, A から M への B-微分はすべて内部的であることは同値である. これの一般化として, [1] において浜口直樹と中島惇は次の定義を与えた.

定義 1.1. ([1, Definition 2.1]) 環拡大 A/B が弱分離的 (weakly separable) であるとは, A から A への B-微分がすべて内部的であるときにいう.

本論分を通して B を単位元をもつ環, ρ を B の自己同型, D を ρ-微分 (すなわち D は B の加法的な写像で $D(\alpha\beta)=D(\alpha)\rho(\beta)+\alpha D(\beta)$ $(\alpha,\beta\in B)$ をみたす), $B[X;\rho,D]$ をその乗法が $\alpha X=X\rho(\alpha)+D(\alpha)$ $(\alpha\in B)$ により定まる歪多項式環とする. とくに, $B[X;\rho]=B[X;\rho,0]$ (自己同型型), $B[X;D]=B[X;1,D]$ (微分型) と表す. また, $B[X;\rho,D]_{(0)}$ を $B[X;\rho,D]$ におけるモニック多項式 g で $gB[X;\rho,D]=B[X;\rho,D]g$ をみたすもの全体とする. $f\in B[X;\rho,D]_{(0)}$ が $B[X;\rho,D]$ における分離多項式 (resp. 弱分離多項式) であるとは, $B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]$ が B 上分離的 (resp. 弱分離的) であるときにいう. 歪多項式環における分離多項式は岸本量夫, 永原賢, 宮下庸一, および第二筆者により幅広く研究されてきた (参考文献参照).

[13] において, 筆者は B の標数が素数 p の場合の微分型歪多項式環 $B[X;D]$ における p-多項式 $f=\sum_{j=0}^{e}X^{p^j}b_{j+1}+b_0$ $(b_{e+1}=1)$ の分離性と弱分離性の差異を示した (cf. [13, Theorem 3.10]). 本論文ではではこの結果を一般のモニック多項式の場合に拡張する.

以降, 本論分では $f=X^m+X^{m-1}a_{m-1}+\cdots+Xa_1+a_0\in B[X;D]_{(0)}$ とおき,

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= X^{m-1}+X^{m-2}a_{m-1}+\cdots+Xa_2+a_1,\\
Y_1 &= X^{m-2}+X^{m-3}a_{m-1}+\cdots+Xa_3+a_2,\\
&\cdots\cdots\\
Y_j &= X^{m-j-1}+X^{m-j-2}a_{m-1}+\cdots+Xa_{j+2}+a_{j+1},\\
&\cdots\cdots\\
Y_{m-2} &= X+a_{m-1},\\
Y_{m-1} &= 1.
\end{aligned}
$$

と定める. また, 以下の記号を用いる.

$$
\begin{aligned}
B^D &= \{\alpha\in B \mid D(\alpha)=0\}\\
A &= B[X;\rho,D]/fB[X;\rho,D]\\
x &= X+fB[X;D]\in A\\
y_j &= Y_j+fB[X;\rho,D]\quad (0\le j\le m-1)\\
V &= \{z\in A \mid \alpha z=z\alpha\ (\alpha\in B)\}
\end{aligned}
$$

さらに, D の自然な拡張として得られる A の (内部) 微分を $\tilde{D}$ をとする. すなわち, 任意の $\sum_{j=0}^{m-1}x^jc_j\in A$ について

$$\tilde{D}\left(\sum_{j=0}^{m-1}x^jc_j\right)=\sum_{j=0}^{m-1}x^jD(c_j)$$

と定める. さらに,

$$V^{\tilde{D}}=\{v\in V \mid \tilde{D}(v)=0\}$$

とおく.

ここで歪多項式環にける分離多項式について, 宮下庸一が与えた次の結果は最も基本的である.

命題 1.2. ([8, Theorem 1.8]) $f=X^m+X^{m-1}a_{m-1}+\cdots+Xa_1+a_0\in B[X;D]_{(0)}$ とする. このとき f が $B[X;D]$ において分離的であるための必要十分条件は, 適当な $h\in V$ が存在して $\sum_{j=0}^{m-1}y_jhx^j=1$ が成り立つことである.

2 主結果

$f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;D]_{(0)}$ とする．このとき, [3, Lemma 1.5] より

$$\begin{cases} (1)\ a_i \in B^D \\ (2)\ a_i\alpha = \displaystyle\sum_{j=i}^{m} \binom{j}{i} D^{j-i}(\alpha)a_j \end{cases} \quad (\alpha \in B,\ 0 \leqq i \leqq m-1)$$

であることに注意する．

本章では以下で定まる $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型 $\tau : V \longrightarrow V^{\tilde{D}}$ が重要となる．

$$\tau(h) = \sum_{i=0}^{m-1} x^i \sum_{j=i}^{m-1} \binom{j+1}{i} \tilde{D}^{j-i}(h)a_{j+1} \quad (h \in V,\ a_m = 1).$$

初めに A の B-微分に関する次の補題を示す．

補題 2.1. A の B-微分 δ について, $\delta(x) \in V$ かつ $\tau(\delta(x)) = 0$ が成り立つ．逆に $\tau(g) = 0$ をみたす $g \in V$ について, A の B-微分 δ で $\delta(x) = g$ となるものが存在する．

証明. δ を A の B-微分とする．このとき, 任意の $\alpha \in B$ について $\alpha\delta(x) = \delta(x)\alpha$ となることは明らかである．また, 帰納的に $\delta(x^j) = \sum_{i=0}^{j-1} x^i \binom{j}{i} \tilde{D}^{j-1-i}(\delta(x))$ $(j \geqq 1)$ が成り立つこと (cf. [13, Lemma 3.6]) から, 次を得る．

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\left(\sum_{j=0}^{m} x^j a_j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \delta(x^{j+1})a_{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{j} x^i \binom{j+1}{i} \tilde{D}^{j-i}(\delta(x))a_{j+1} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} x^i \sum_{j=i}^{m-1} i \binom{j+1}{i} \tilde{D}^{j-i}(\delta(x))a_{j+1} \\ &= \tau(\delta(x)) \end{aligned}$$

逆に $g = g_0 + fB[X;D] \in V$ $(g_0 \in B[X;D])$ が $\tau(g) = 0$ をみたすとする．このとき, 任意の $\alpha \in B$ について $\alpha g_0 = g_0\alpha$ となるから, $B[X;D]$ の B-微分 δ^* で $\delta^*(X) = g_0$ となるものが存在する．$\tau(g) = 0$ より $\delta^*(f) \in fB[X;D]$, すなわち $\delta^*(fB[X;D]) \subset fB[X;D]$ が成り立つので, δ^* の自然な拡張として A の B-微分 δ で $\delta(x) = g$ となるものが存在する． □

補題2.1により, $B[X;D]$ における弱分離多項式は次のように特徴付けられる.

定理 2.2. $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;D]_{(0)}$ とする. このとき, f が $B[X;D]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は次が成り立つことである:

$$\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V)$$

証明. まず, 任意の $h \in A$ について, $a_i h = \sum_{j=i}^{m} \binom{j}{i} \tilde{D}^{j-i}(h) a_j$ $(0 \leqq i \leqq m-1)$ となることから, 任意の $h \in V$ について

$$\begin{aligned} 0 &= a_i h - h a_i \\ &= \sum_{j=i+1}^{m} \binom{j}{i} \tilde{D}^{j-i}(h) a_j \\ &= \sum_{j=i}^{m-1} \binom{j+1}{i} \tilde{D}^{j-i}\left(\tilde{D}(h)\right) a_{j+1} \quad (0 \leqq i \leqq m-1) \end{aligned}$$

となる. これより, 常に $\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} \supset \tilde{D}(V)$ が成り立つことに注意しておく.

$\{g \in V \mid \tau(g) = 0\} = \tilde{D}(V)$ を仮定し, δ を A の B-微分とする. このとき, 補題2.1より $\delta(x) \in \{g \in V \mid \tau(g) = 0\}$ であるから, 仮定より適当な $h \in V$ により $\delta(x) = \tilde{D}(h) = hx - xh$ と表される. これより, 任意の $w \in A$ について $\delta(w) = hw - wh$ であることが確かめられる. すなわち δ は内部的であり, したがって f は $B[X;D]$ における弱分離多項式である.

逆に f が $B[X;D]$ における弱分離多項式である仮定し, $p \in \{g \in V \mid \tau(g) = 0\}$ とする. このとき, 補題2.1より A の B-微分 δ で $\delta(x) = p$ となるものが存在する. 仮定より δ は内部的であるから, 適当な $h \in V$ により $p = \delta(x) = hx - xh = \tilde{D}(h) \in \tilde{D}(V)$ となる. □

ここで主結果 (定理2.4) を示すために次の補題を準備しておく.

補題 2.3. 任意の $h \in V$ について, $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x^j = \tau(h)$ が成り立つ.

証明. h を V の任意の元とし,

$$X = \begin{pmatrix} 1, x, x^2, \cdots, x^{m-1} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h \\ \tilde{D}(h) \\ \tilde{D}^2(h) \\ \vdots \\ \tilde{D}^{m-1}(h) \end{pmatrix}$$

とおく. また, $m \times m$ 行列 S を

$$S = \begin{pmatrix} \binom{1}{0}a_1 & \binom{2}{0}a_2 & \cdots & \cdots & \binom{m}{0}a_m \\ \binom{2}{1}a_2 & \binom{3}{1}a_3 & \cdots & \binom{m}{1}a_m & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \binom{m-1}{m-2}a_{m-1} & \binom{m}{m-2}a_m & \iddots & & \vdots \\ \binom{m}{m-1}a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると, 以下が成り立つ.

$$\tau(h) = XSH \tag{2.1}$$

次に, $m \times m$ 行列 T_j $(1 \leqq j \leqq m-1)$ を以下のように定める.

$$T_j = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{0 \quad\quad 0 \quad\quad \cdots \quad\quad 0 \quad\quad \binom{j}{j}a_{j+1}}}^{j+1} & \overbrace{\hphantom{0 \;\cdots\; 0}}^{m-j-1} \end{array} \\ \begin{array}{r} j\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ m-j\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{j}{j}a_{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \binom{j}{j}a_{j+2} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{j}{1}a_{j+1} & \iddots & & \binom{j}{j}a_m & \vdots & & \vdots \\ \binom{j}{0}a_{j+1} & \binom{j}{1}a_{j+2} & & \iddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \binom{j}{0}a_{j+2} & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \binom{j}{1}a_m & \iddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{j}{0}a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

このとき, 直接的な計算により $y_j h x_j = XT_jH$ が成り立つことがわかる. したがって, 以下が成り立つ.

$$\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x_j = X \left(\sum_{j=0}^{m-1} T_j \right) H \tag{2.2}$$

(2.1) および (2.2) より, 補題の主張を示すには $S = \sum_{j=0}^{m-1} T_j$ を示せば十分である. ここで

$$S \text{ の } (i,k) \text{ 成分} = \begin{cases} \binom{i+k-1}{i-1}a_{i+k-1} & (i+k-1 \leqq m) \\ 0 & (i+k-1 \geqq m+1) \end{cases}$$

$$T_j \text{ の } (i,k) \text{ 成分} = \begin{cases} \binom{j}{k-1}a_{i+k-1} & (j+1 \leqq i+k-1 \leqq m) \\ 0 & (k \geqq j+2,\ i+k-1 \geqq m+1) \end{cases}$$

であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{m-1} T_j\right) \text{の} (i,k) \text{成分} &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{j}{k-1} a_{i+k-1} \\
&= \sum_{j=k-1}^{i+k-2} \binom{j}{k-1} a_{i+k-1} \\
&= \left\{1 + \sum_{j=k}^{i+k-2} \binom{j}{k-1}\right\} a_{i+k-1} \\
&= \left\{1 + \sum_{j=k}^{i+k-2} \left\{\binom{j+1}{k} - \binom{j}{k}\right\}\right\} a_{i+k-1} \\
&= \left\{1 - 1 + \binom{i+k-1}{k}\right\} a_{i+k-1} \\
&= \binom{i+k-1}{i-1} a_{i+k-1} \\
&= S \text{の} (i,k) \text{成分}
\end{aligned}
$$

を得る. したがって, $S = \sum_{j=0}^{m-1} T_j$ が成り立つ. □

以下が本論文の主結果である.

定理 2.4. $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0 \in B[X;D]_{(0)}$ とする.

(1) f が $B[X;D]$ における弱分離多項式であるための必要十分条件は, $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型からなる次の列が完全系列となることである:

$$
0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}}
$$

(2) f が $B[X;D]$ における分離多項式であるための必要十分条件は, $V^{\tilde{D}}$-$V^{\tilde{D}}$-準同型からなる次の列が完全系列となることである:

$$
0 \longrightarrow V^{\tilde{D}} \xrightarrow{\text{inj}} V \xrightarrow{\tilde{D}} V \xrightarrow{\tau} V^{\tilde{D}} \longrightarrow 0
$$

証明. (1) 定理 2.2 より明らか.

(2) 命題 1.2 および補題 2.3 より, f が分離的であるための必要十分条件は $\tau(h) = 1$ となる h が存在することである. これは τ が全射であることを意味する. □

参考文献

[1] N. Hamaguchi and A. Nakajima, On generalizations of separable polynomials over rings, *Hokkaido Math. J.*, **42** 2013, no. 1, 53–68.

[2] K. Hirata and K. Sugano, On semisimple extensions and separable extensions over noncommutative rings, *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 360–373.

[3] S. Ikehata, On separable polynomials and Frobenius polynomials in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **22** 1980, 115–129.

[4] S. Ikehata, Azumaya algebras and skew polynomial rings, *Math, J. Okayama Univ.,* **23** 1981, 19–32.

[5] S. Ikehata, A note on separable polynomials of derivation type, *Int. J. Algebra,* **3** no.15, 2009, 707–711.

[6] S. Ikehata, On separable and H-separable polynomials of degree p in skew polynomial rings, *Int. J. Pure Appl. Math.,* **51** no. 1, 2009, 129–156.

[7] K. Kishimoto, On abelian extensions of rings. I, *Math. J. Okayama Univ.,* **14** 1970, 159–174.

[8] Y. Miyashita, On a skew polynomial ring, *J. Math. Soc. Japan,* **31** 1979, no. 2, 317–330.

[9] T. Nagahara, On separable polynomials over a commutative ring II, *Math. J. Okayama Univ.,* **15** 1972, 149–162.

[10] T. Nagahara, On separable polynomials of degree 2 in skew polynomial rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **19** 1976, 65–95.

[11] K. Sugano, Separable extensions and Frobenius extensions, *Osaka J. Math.* **7** (1970), 29–40.

[12] S. Yamanaka and S. Ikehata, An alternative proof of Miyasita's theorem in a skew polynomial rings, *Int. J. Algebra,* **21** 2012, 1011–1023.

[13] S. Yamanaka, On weakly separable polynomials and weakly quasi-separable polynomials over rings, *Math. J. Okayama Univ.,* **58** 2016, Vol. 58, pp.175–188.

E-mail address : yamanaka@tsuyama-ct.ac.jp