数理解析研究所講究録
第2053巻 2017年 54-63

Hermite 対称空間の大対蹠集合におけるアソシエーションスキーム構造

栗原大武*, 奥田隆幸†

Abstract

コンパクト型既約エルミート対称空間 M の大対蹠集合 S について, "S 内の最小距離を実現するような二点を辺で結ぶ" という方法により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する. 本報告ではこのように得られたグラフ $\Gamma_M(S)$ が距離推移的となり, 特に P-多項式的アソシエーションスキームとみなせることを紹介し, このようにして得られる距離推移的グラフ $\Gamma_M(S)$ の構造を決定する. また $\Gamma_M(S)$ のグラフとしての各種不変量と全空間 M の幾何学的な各種不変量との関係についての考察を行う.

1 Introduction

コンパクト型既約エルミート対称空間 M の大対蹠集合 S について, "S 内の最小距離を実現するような二点を辺で結ぶ" という方法により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する. 本報告ではこのようにして得られたグラフ $\Gamma_M(S)$ が距離推移的となる, 特に P-多項式アソシエーションスキームとみなせることを紹介し, グラフ $\Gamma_M(S)$ の各種不変量と M の幾何学的不変量の関係についての考察を行う.

まずリーマン対称空間とその大対蹠集合の定義を復習しよう. 連結なリーマン多様体 M を考える. [1] 特に M にはその計量から定まる自然な距離 d_M が定義されているものとする. M 上の自己微分同相であって, リーマン計量

*北九州工業高等専門学校 E-mail:kurihara@kct.ac.jp
†広島大学大学院理学研究科 E-mail:okudatak@hiroshima-u.ac.jp

[1] リーマン多様体とは, 実多様体にリーマン計量を定めたもの, つまり各点の接空間における内積を滑らかに定めたものとする.

を保つものを等長変換と呼ぶことにする．また M 上の等長変換全体のなす群を $I(M)$ と書くことにする．

M の点 p について，等長変換 $s_p : M \to M$ が "p における M 上の (大域的に定義された) 点対称" であるとは，以下の二条件を満たすこととする:

- $s_p(p) = p$.
- 任意の $v \in T_pM$ について $d_p(s_p)(v) = -v$ となる (ただし T_pM は多様体 M の p における接空間とし，$d_p(s_p) : T_pM \to T_pM$ は s_p の p における微分写像とする).

連結リーマン多様体 M がリーマン対称空間であるとは，M の任意の点について，その点における点対称が存在することとする．リーマン対称空間は必ず完備 (測地線がいくらでも延長できる，特に任意の二点が測地線で結べる) となり，各点の点対称は一意的に定まることが知られている.[2]

リーマン対称空間 M 内の対蹠集合を以下のように定義する:

Definition 1.1. リーマン対称空間 M の部分集合 A が対蹠集合 *(antipodal set)* であるとは，任意の $x, y \in A$ について $s_x(y) = y$ を満たすこととする．ただしここで $s_x \in I(M)$ は x における M 上の点対称とする．

リーマン対称空間 M がコンパクトである場合には，M 内の対蹠集合は必ず有限集合であり，さらにその濃度は M のみに依存するある定数で抑えられることが知られている．すなわち

$$\#_2 M := \max\{\#A \mid A \text{ は } M \text{ 内の対蹠集合 }\}$$

が有限の値をとる (証明は例えば [9, Section 2])．この $\#_2M$ をコンパクトリーマン対称空間 M の 2-number といい，$\#A = \#_2M$ となる M 内の対蹠集合を大対蹠集合 (great antipodal set) という．対蹠集合や 2-number の概念は Chen–長野 [4] によって定義され，これまでに [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] など多くの研究がなされている．

コンパクトリーマン対称空間 M の大対蹠集合 S は，何らかの意味で M の幾何学的な様子を反映していると思われる．実際，以下のように大対蹠集合 S の濃度 (つまり M の 2-number) は M のトポロジカルな不変量であるオイラー数と関連がある．

Fact 1.2 (Chen–長野 [4]). M をコンパクトリーマン対称空間とし，$\chi(M)$ を M のオイラー数とする．このとき，

$$\#_2M \geq \chi(M).$$

[2] 本報告では "リーマン対称空間" と言ったら連結であることとする．

ここで, コンパクトリーマン対称空間 M の大対蹠集合 S について, M の距離 d_M を S に制限することにより, S は有限距離空間とみなすことができる. 本報告では, 「S の濃度だけでなく, S の有限距離空間としての各種不変量を考えると, それらが M の何らかの幾何学的不変量と関連するのではないか?」ということについて考えたい.

一般に, 距離空間 (M, d_M) の有限部分集合 S (ただし $\#S \geq 2$ の場合のみ考える) に対して, S を頂点とする有限単純グラフ $\Gamma_M(S)$ を以下のように定義する:

Definition 1.3. S の (M, d_M) における最小距離 $d_{\min}(S) \in \mathbb{R}_{>0}$ を

$$d_{\min}(S) := \min\{d(x,y) \mid x, y \in S \ \textit{with}\ x \neq y\}$$

と定める. S を頂点とする単純グラフ $\Gamma_M(S) := (S, E_S)$ を

$$E_S := \left\{\{x,y\} \in \binom{S}{2} \mid d_M(x,y) = d_{\min}(S)\right\}$$

として定義する *(ただし $\binom{S}{2}$ は S の二点部分集合全体のなす族とする)*.

つまりグラフ $\Gamma_M(S)$ は "S の最小距離を実現するような二点を辺で結ぶ" という方法で得られるグラフである.

本報告ではコンパクト型既約エルミート対称空間 M の大対蹠集合 S から上記の方法で得られるグラフ $\Gamma_M(S)$ を考えたとき, $\Gamma_M(S)$ が必ず距離正則となることを紹介し, このようにして得られる距離正則グラフ $\Gamma_M(S)$ の構造を決定する. さらに距離正則グラフ $\Gamma_M(S)$ のいくつかの不変量と, コンパクト型既約エルミート対称空間 M のいくつかの幾何学的不変量の対応についての考察を行う.

2 Hermitian symmetric spaes

本節ではエルミート対称空間についての基本事項について復習する. 詳細については [5] や [14] などを参照されたい.

連結なエルミート多様体 M を考える. [3] M 上の自己正則微分同相でエルミート計量を保つものを正則等長変換とよび, M 上の正則等長変換全体のなす群をここでは $A(M)$ と書くことにする.

[3]エルミート多様体とは, 複素多様体にエルミート計量を定めたもの, つまり各点の正則接空間におけるエルミート内積が滑らかに定めたものとする.

連結なエルミート多様体 M の点 p について, 正則等長変換 $s_p : M \to M$ が "p における M 上の (大域的に定義された) 点対称" であるとは, 以下の二条件を満たすこととする:

- $s_p(p) = p$.
- 任意の $v \in T_pM$ について $d_p(s_p)(v) = -v$ となる (ただし T_pM は多様体 M の p における接空間とし, $d_p(s_p) : T_pM \to T_pM$ は s_p の p における微分写像とする).

連結なエルミート多様体 M がエルミート対称空間であるとは, M の任意の点について, その点における (正則等長な) 点対称が存在することとする. エルミート対称空間 M は必ずケーラー多様体となることが知られている. また一般にエルミート多様体には自然なリーマン計量が定義され, リーマン多様体とみなすこともできるが, この意味でエルミート対称空間はリーマン対称空間とみなされる. [4]

以下, コンパクトエルミート対称空間の分類について復習しよう. いくつかのエルミート対称空間の直積多様体を考えると, その多様体には自然にエルミート対称空間の構造が入る. 本報告ではいくつかのエルミート対称空間の直積の形で書けないようなエルミート対称空間が非平坦であるとき, そのエルミート対称空間は既約であるということにする. 既約なエルミート対称空間は単連結であり, リーマン対称空間として, 更にリーマン多様体として既約となる.

既約エルミート対称空間 M の正則等長変換群 $A(M)$ は実単純 Lie 群となる. その単位連結成分を $G := A_0(M)$ と書くことにすると, G は M をリーマン多様体とみなした場合の等長変換群 $I(M)$ の単位連結成分と一致することが知られている. この実単純 Lie 群 G の M への作用は推移的となり, G がコンパクトであることと, M がコンパクトであることは同値となる. コンパクトな既約エルミート対称空間 M をコンパクト型既約エルミート対称空間ということにする. またコンパクト型既約エルミート対称空間のいくつかの直積で表せるようなエルミート対称空間をコンパクト型エルミート対称空間と呼ぶ. 特に一般のコンパクトなエルミート対称空間はコンパクト型エルミート対称空間と平坦なコンパクトエルミート対称空間の直積として表せる.

以下 M をコンパクト型既約エルミート対称空間とする. M に正則等長変換群の単位連結成分 $G = A_0(M)$ は推移的に作用するので, M の基点 x_0 を固定すれば $M = G/K$ と等質空間表示が得られる. ただし $K := \{g \in G \mid$

[4] 本報告ではリーマン多様体やエルミート多様体を仮定した形で対称空間の概念を紹介したが, 各種幾何構造と切り離した立場で対称空間論を論じることも可能である. 詳細は [6] などを参照されたい.

$gx_0 = x_0\}$ (x_0 における G のイソトロピー部分群) とする. このとき (G,K) は対称対[5] であり, K は連結で 1 次元の中心をもつ. 逆に G を連結コンパクト実単純 Lie 群とし, σ を G の対合的 Lie 群同型とし,

$$K := \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$$

としたとき, K が一次元の中心を持つなら G/K にはコンパクト型既約エルミート対称空間の構造がエルミート計量の定数倍と複素構造の ± 1 倍を除いて一意的に定まることが知られている.

この意味でコンパクト型既約エルミート対称空間は以下の形で分類されている.

Label	$M = G/K$	Realization
AIII	$SU(n)/(S(U(k) \times U(n-k)))$	Grassmannian of complex k-subspaces of $\mathbb{C}^n$
BDI	$SO(n)/(SO(2) \times SO(n-2))$	Grassmannian of oriented real 2-subspaces of $\mathbb{R}^n$
CI	$Sp(n)/U(n)$	Space of complex structures on $\mathbb{H}^n$ compatible with the inner product
DIII	$SO(2n)/U(n)$	Space of orthogonal complex structures on $\mathbb{R}^{2n}$
EIII	$E_6/((Spin(10) \times U(1))/\mathbb{Z}_4)$	see [1]
EVII	$E_7/((E_6 \times U(1))/\mathbb{Z}_3)$	see [1]

Table 1: List of irreducible Hermitian symmetric spaces of compact type

Remark 2.1. 一般にコンパクトリーマン対称空間 M にはその等長変換群の単位連結成分 $G := I_0(M)$ が推移的に作用し, 基点を固定することにより等質空間表示 $M = G/K$ を得る. またこのとき (G,K) は対称対となる. 逆にコンパクト *Lie* 群 G とその対称対 (G,K) から得られる等質空間 $M = G/K$ にはリーマン対称空間の構造が入る. コンパクトリーマン対称空間はこの意味で分類が知られている *(*詳細については *[5]* などを参照*).*

---

[5] 一般に Lie 群 G とその閉部分 Lie 群 K について (G,K) が対称対であるとは, G の対合的 Lie 群同型 σ が存在して, K は

$$G^\sigma := \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$$

の開 (かつ閉) 部分 Lie 群であることとする. これは G の Lie 代数の部分 Lie 代数として, G^σ と K に対応するそれぞれの Lie 代数が一致することと同値である.

3 Great antipodal sets on Hermitian symmetric spaces of compact type

M をコンパクト型エルミート対称空間とし, $G := A_0(M)$ を M 上の正則等長変換群の単位連結成分 (これは M をリーマン対称空間とみなした場合の等長変換群の単位連結成分と一致する) とする. M の 2-number や大対蹠集合は以下のような著しい性質をもつことが知られている:

Fact 3.1. **(i: Chen–長野 [4, Section 4])** M のオイラー数を $\chi(M)$ としたとき,

$$\#_2 M = \chi(M).$$

(ii: Sánchez [7], 田中–田崎 [10]) M 内の大対蹠集合は G-共役を除いて一意である.

Fact 3.1 (i) は, 「コンパクト型エルミート対称空間 M の大対蹠集合 S の情報 (濃度) から全空間 M の位相的な情報 (オイラー数) が読み取れる」ということを主張している. [6] 本報告では 「コンパクト型エルミート対称空間 M 内の大対蹠集合 S から定義される不変量として, S 上の距離構造を反映したものを考えたとき, そこから M の位相や幾何構造を読み取ることができるか?」ということについて考える.

Remark 3.2. コンパクト型エルミート対称空間はコンパクトリーマン対称空間であるが, コンパクト型エルミート対称空間を含むより大きなコンパクトリーマン対称空間のクラスとして "対称 R 空間" という概念が知られている. *Fact 3.1 (ii)* は実際には一般的に "M が対称 R 空間" という場合に証明されている. また *Fact 3.1 (i)* の対称 R 空間への一般化としては次のような定理が知られている:

Theorem 3.3 ((竹内 [8])). M を対称 R 空間とし, $H_k(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を M の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数 k-ホモロジー群とし, $H_*(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k\geq 0} H_k(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ とする. このとき

$$\#_2 M = \dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_*(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

M がエルミート対称空間である場合には $\dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_*(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \chi(M)$ が成り立つため, 上記の定理は *Fact 3.1 (i)* の一般化となっている.

---

[6] 各コンパクト型既約エルミート対称空間のオイラー数 (= 2-number) については Table 3 にまとめた.

4 Distance-transitive graphs and its eigen-values

主結果を述べるためにに必要なグラフ理論の概念として, グラフの直径, 最小固有値, 距離推移性の定義を紹介する. 本報告の内容と深く関係するグラフ理論の教科書として [3] を挙げておく.

以下, 有限単純グラフ $\Gamma = (S, E)$ について考える. すなわち S は有限集合であり, E は $\binom{S}{2}$ の部分集合である. ただし $\binom{S}{2}$ は有限集合 S の 2 点部分集合全体のなす族とする.

有限単純グラフ $\Gamma = (S, E)$ の頂点集合 S 上に, "Γ 上の二頂点を繋ぐ最短経路の長さ" によって定義される距離 $d_\Gamma : S \times S \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を Γ 上のグラフ距離と呼ぶ. 有限単純グラフ $\Gamma = (S, E)$ の直径 $\operatorname{diam}\Gamma$ を距離空間 (S, d_Γ) の直径, すなわち

$$\operatorname{diam}\Gamma := \max\{d_\Gamma(a,b) \mid a, b \in S \text{ with } a \neq b\}$$

と定める. また距離空間 (S, d_Γ) の等長変換群を $\operatorname{Aut}(\Gamma)$ (グラフの自己同型群) と書くことにする.

有限単純グラフ $\Gamma = (S, E)$ について, S 上の複素数値関数全体のなすベクトル空間を $\mathbb{C}^S$ とし, Γ のグラフラプラシアン $\Delta_\Gamma \in \operatorname{End}_\mathbb{C}(\mathbb{C}^S)$ を, 各 $\phi \in \mathbb{C}^S$ に対して

$$(\Delta_\Gamma \phi)(a) := \sum_{b \in S \mid \{a,b\} \in E} \phi(a) - \phi(b) \quad \text{for each } a \in S$$

とすることにより定義する. グラフラプラシアン Δ_Γ は半正定値な自己共役作用素であり, 固有値はすべて非負実数となる. 特に辺集合 E が空集合でないとき Δ_Γ は正の固有値を一つ以上持つ. Δ_Γ の正の固有値の中で最小なものを Γ の最小固有値といい, その重複度を本報告では $m_1(\Gamma)$ と書くことにする.

本報告で扱う距離推移的グラフについての定義を以下で与える:

Definition 4.1 (距離推移的な有限単純グラフ). 有限単純グラフ $\Gamma = (S, E)$ が距離推移的であるとは, $d_\Gamma(a_1, b_1) = d_\Gamma(a_2, b_2)$ となる各 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in S$ について, $g \in \operatorname{Aut}(\Gamma)$ であって $g \cdot a_1 = a_2$ かつ $g \cdot b_1 = b_2$ となるものが存在することとする.

距離推移的な有限単純グラフ $\Gamma = (S, E)$ について, $S \times S$ 上の関係 $\{R_i\}_{i=0,\ldots,\operatorname{diam}\Gamma}$ を

$$R_i := \{(x, y) \in S \times S \mid d(x, y) = i\}$$

と定めると, $\mathfrak{X}(\Gamma) = (S, \{R_i\}_{i=0,\dots,\mathrm{diam}\,\Gamma})$ は P-多項式的アソシエーションスキームとなることが知られている.

Remark 4.2. 距離推移的グラフの一般化として "距離正則グラフ" という概念が知られている. 一般に距離正則グラフから P-多項式的アソシエーションスキームが得られ, 逆に任意の P-多項式的アソシエーションスキームは距離正則グラフから得られる. 詳細は 坂内–坂内–伊藤 *[2]* を参照されたい.

5 Main results

本報告の主結果は以下のものである:

Theorem 5.1. *M をコンパクト型既約エルミート対称空間とし, G を M の正則等長変換群の単位連結成分 (これは M をリーマン対称空間とみなしたときの等長変換群の単位連結成分と一致する) とする. S を M 内の大対蹠集合とし, 有限単純グラフ $\Gamma_M(S)$ を Deftinition 1.3 の意味で定める. このとき以下が成り立つ:*

(1) グラフ $\Gamma_M(S)$ は距離推移的である. また次の意味で S 上のグラフ距離 $d_{\Gamma_M(S)}$ と M 上の距離から誘導される S 上の距離は対応する: 各 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ について,

$$d_{\Gamma_M(S)}(x_1, y_1) = d_{\Gamma_M(S)}(x_2, y_2) \iff d_M(x_1, y_1) = d_M(x_2, y_2).$$

(2) グラフ $\Gamma_M(S)$ の直径 $\mathrm{diam}\,\Gamma_M(S)$ は $\mathrm{rank}\,M$ と一致する.

(3) グラフ $\Gamma_M(S)$ の最小固有値の重複度 $m_1(\Gamma_M(S))$ は $\mathrm{rank}\,G$ と一致する.

(4) 距離推移的グラフ $\Gamma_M(S)$ から得られる P-多項式的アソシエーションスキームは Q-多項式的でもある.

さらに, 各コンパクト型既約エルミート対称空間 M について, その大対蹠集合 S から得られるグラフ $\Gamma_M(S)$ (*Fact* 3.1 より大対蹠集合を取り換えてもグラフとして同型である) は *Table 2* のような形になる. 特に $\Gamma_M(S)$ は *[3, Chapter 10]* の意味での *Coxter* グラフの一種となる.

Table 2 において, Coxter グラフのラベルや各距離推移的グラフの定義については [3] を参照されたい. また各不変量については Table 3 の通りである.

$M = G/K$	$\Gamma_M(S)$	Coxter graph
$SU(n)/(S(U(k) \times U(n-k)))$	Johnson graph $J(n,k)$	$A_{n,k}$
$SO(2n+1)/(SO(2) \times SO(2n-1))$	Complete multipartite graph $K_{n\times 2}$	$B_{n,1}$
$SO(2n)/(SO(2) \times SO(2n-2))$	Complete multipartite graph $K_{n\times 2}$	$D_{n,1}$
$Sp(n)/U(n)$	Hamming graph $H(n,2)$	$C_{n,n}$
$SO(2n)/U(n)$	Halved graph $\frac{1}{2}H(n,2)$ of $H(n,2)$	$D_{n,n-1} \simeq D_{n,n}$
$E_6/((Spin(10) \times U(1))/Z_4))$	Schläfli graph	$E_{6,1}$
$E_7/((E_6 \times U(1))/Z_3))$	Gosset graph	$E_{7,7}$

Table 2: Graphs comes from great antipodal sets of irreducible Hermitian symmetric spaces of compact type

$M = G/K$	$\#S = \chi(M)$	$\operatorname{diam}\Gamma(S) = \operatorname{rank} M$	$m_1(\Gamma(S)) = \operatorname{rank} G$
$SU(n)/(S(U(k) \times U(n-k)))$	$\binom{n}{k}$	k	$n-1$
$SO(n)/(SO(2) \times SO(n-2))$	$2\lfloor n/2 \rfloor$	2	$\lfloor n/2 \rfloor$
$Sp(n)/U(n)$	2^n	n	n
$SO(2n)/U(n)$	2^{n-1}	$\lfloor n/2 \rfloor$	n
$E_6/((Spin(10) \times U(1))/\mathbb{Z}_4)$	27	2	6
$E_7/((E_6 \times U(1))/\mathbb{Z}_3)$	56	3	7

Table 3: Some parameters of irreducible Hermitian symmetric spaces of compact type

References

[1] K. Abe, and I. Yokota *Realization of Spaces $E_6/(U(1)Spin(10))$, $E_7/(U(1)E_6)$, $E_8/(U(1)E_7$ and Their volumes.* Tokyo J. Math., **20**:73–86, 1997.

[2] 坂内英一, 坂内悦子, 伊藤達郎. **代数的組合せ論入門**, 共立叢書 現代数学の潮流, 共立出版, 2016.

[3] A.E. Brouwer, A.M. Cohen and A. Neumaier. *Distance-regular graphs*, volume 18 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[4] B.-Y. Chen and T. Nagano. *A Riemannian Geometric Invariant and its Applications to a Problem of Borel and Serre.* Trans. Amer. Math. Soc., **308**:273–297, 1988.

[5] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Graduate Studies in Mathematics, **34**:American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[6] 長野正. 対称空間の幾何理論. 数理解析研究所講究録, **1206**:55–82, 2001.

[7] C.U. Sánchez. *The index number of an R-space: an extension of a result of M. Takeuchi's.* Proc. Amer. Math. Soc., **125**:893–900, 1997.

[8] M. Takeuchi. *Two-number of symmetric R-spaces.* Nagoya Math. J., **115**:43–46, 1989.

[9] M.S. Tanaka and H. Tasaki. *The intersections of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type.* J. Math. Soc. Japan, **64**:1297–1332, 2012.

[10] M.S. Tanaka and H. Tasaki. *Antipodal sets of symmetric R-spaces.* Osaka J. Math, **50**:161–169, 2013.

[11] H. Tasaki. *Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds.* Internat. J. Math. **24**:1350061-1-28, 2013.

[12] H. Tasaki. *Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds.* Springer Proceedings in Mathematics and Statistics **106**, Y.J. Suh et al. (eds.), ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds":515–524, 2014.

[13] H. Tasaki. *Estimates of antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds.* "Global Analysis and Differential Geometry on Manifolds" (special issue: the Kobayashi memorial volume), Internat. J. Math. **26**:1541008-1-12, 2015.

[14] J.A. Wolf. *On the classification of hermitian symmetric spaces.* J. Math. Mech., **13**:489–495, 1964.